Aufg.-Nr.: 7	Bereich: ganzrat. Funktion	Kursart: GK	WTR

Lipnature

Die Kosmetikfirma „lipnature“, die sich auf die Produktion von Lippenpflegeprodukten spezialisiert hat, möchte ein neues Firmenlogo entwerfen. Die PR-Abteilung der Firma schlägt dem Vorstand vor, dem neuen Firmenlogo die Form eines „Kussmundes“ zu verleihen.
Die Umrandung der Oberlippe entspricht dem Graphen einer achsensymmetrischen Funktion vierten Grades (f_1), welche an der Stelle $x_0 = 4$ eine Nullstelle und an der Stelle $x_E = -2$ ein relatives Extremum besitzt. Zudem schneidet der Graph die y-Achse an der Stelle $y_s = 2$.
Für die Randlinie der Unterlippe soll der Graph einer quadratischen Funktion f_2 benutzt werden, die durch die Funktionsgleichung $f_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2$ gegeben ist.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f_1, welche die Randlinie der Oberlippe beschreibt.
(Zur Kontrolle: $f_1(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 2$.)

b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Schnittpunkte der Funktionen f_1 und f_2.

c) Bestimmen Sie alle relativen Extrempunkte sowie Wendepunkte der Funktion f_1.

d) Skizzieren Sie das Firmenlogo.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des „Kussmundes“.

f) Die PR-Abteilung der Kosmetikfirma schlägt vor, den Firmennamen „lipnature“ als Schriftzug so in den Kussmund zu integrieren, dass er in einem Rechteck zwischen der x-Achse und der Unterlippenrandlinie erscheint. Berechnen Sie die Maße des entsprechenden Rechtecks maximalen Flächeninhalts und geben Sie zudem die Flächenmaßzahl an.

g) Die Fläche des in Teilaufgabe f) ermittelten Rechtecks reicht nicht aus, um den Firmennamen angemessen darin unterbringen zu können. Nun soll die Gleichung, welche die Unterlippenrandlinie beschreibt, derart verändert werden, dass die Nullstellen bei $x_0 = \pm 4$ erhalten bleiben, aber die Lage des Scheitelpunkts auf der y-Achse variieren kann. Zeigen Sie, dass alle möglichen Unterlippenrandlinien durch eine allgemeine Funktion f_k mit $f_k(x) = kx^2 - 16k$ ($k \in \mathbb{R}^{>0}$) wiedergegeben werden.

Lösung

a) Bestimmung des Funktionsterms

Ansatz für die achsensymmetrische Funktion vierten Grades ist $f_1(x) = ax^4 + bx^2 + c$

<u>Bedingungen:</u> f_1 hat an der Stelle $x_0 = 4$ eine Nullstelle, also, f_1 hat an der Stelle $x_E = -2$ ein relatives Extremum, also $f_1'(-2) = 0$ und der Graph schneidet die y – Achse an der Stelle $y_S = 2$, also $f_1(0) = 2$.

I. $f_1(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$

II. $f_1(4) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{mit\ \text{I.}} a \cdot 4^4 + b \cdot 4^2 + 2 = 0$

III. $f_1'(-2) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot a \cdot (-2)^3 + 2 \cdot b \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow -32a - 4b = 0$

II. $256a + 16b + 2 = 0$

III. $-32a - 4b = 0$

II + $4 \cdot$ III: $128a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{64}$

Einsetzen in III. folgt: $-32 \cdot \left(-\frac{1}{64}\right) - 4b = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{8}$

Also ist $f_1(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 2$

b) Schnittpunkte

$f_1(x) = f_2(x)$

$$-\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 2 = \frac{1}{8}x^2 - 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{64}x^4 = -4 \Leftrightarrow x^4 = 256 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 4$$

Schnittpunkte sind $S_1(4\,|\,0)$ und $S_2(-4\,|\,0)$; die y – Koordinate ergibt sich jeweils durch Einsetzen von 4 und -4 in $f_1(x)$ oder $f_2(x)$.

c) Extrempunkte

notwendige Bedingung für Extrema $f_1^{'}(x) = 0$

$f_1^{'}(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{4}x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ oder

$-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{2,3} = \pm 2$

hinreichende Bedingung für Extrema: $f_1^{'}(x) = 0$ und $f_1^{''}(x) \neq 0$

$f_1^{''}(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{4}$

$f_1^{''}(0) = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \textit{Minimum}$ TP(0 | 2)

$f_1^{''}(2) = -\frac{3}{16} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \textit{Maximum}$ HP(2 | 2,25)

$f_1^{''}(-2) = -\frac{3}{16} \cdot (-2)^2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \textit{Maximum}$ HP(-2 | 2,25)

Wendepunkte

notwendige Bedingung für Wendepunkte $f_1^{''}(x) = 0$

$\mathrm{f}_1^{''}(\mathrm{x}) = -\frac{3}{16}\mathrm{x}^2 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \mathrm{x}_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \approx \pm 1{,}15$

hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f_1^{''}(x) = 0$ und $f_1^{'''}(x) \neq 0$

$f_1^{'''}(x) = -\frac{3}{8}x \Rightarrow f_1^{'''}(\pm\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}) = \mp\frac{\sqrt{3}}{4} \neq 0$

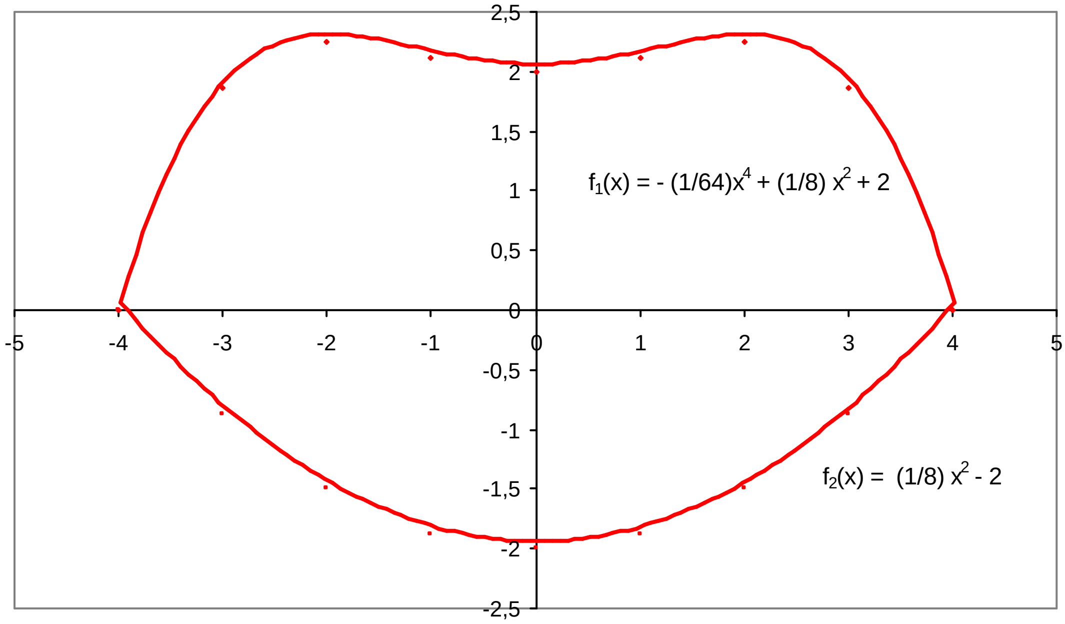
also gibt es Wendpunkte WP$_{1,2}$($\pm\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{77}{36}$) oder WP$_{1,2}$(± 1,15 | 2,14)

$$f_1(\pm\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}) = -\frac{1}{64}\left(\pm\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^4 + \frac{1}{8}\left(\pm\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{64}\left(\frac{16\cdot 9}{81}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{4\cdot 3}{9}\right) + 2$$
$$= -\frac{1}{64}\cdot\frac{16}{9} + \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3} + 2 = -\frac{1}{36} + \frac{1}{6} + 2 = -\frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{72}{36} = \frac{77}{36}$$

d) Skizze des Firmenlogos

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
-4	0	0
-3	-0,875	1,859375
-2	-1,5	2,25
-1	-1,875	2,109375
0	-2	2
1	-1,875	2,109375
2	-1,5	2,25
3	-0,875	1,859375
4	0	0

Lipnature



e) Flächeninhalt des Kussmundes

$$\int_{-4}^{4}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx = 2\cdot\int_{0}^{4}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx = 2\cdot\int_{0}^{4}\left(-\frac{1}{64}x^4+4\right)dx = 2\cdot\left(-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{5}x^5+4x\right)\Big|_0^4$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{5}\cdot 4^5+4\cdot 4\right) = 2\cdot\left(-\frac{16}{5}+16\right) = \frac{128}{5} = 25{,}6$$ **(Flächeneinheiten FE)**

f) Extremwertaufgabe

Gesucht ist ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt:

- Größe, die extremal werden soll: $A(x;y) = x \cdot (-y)$

(Beachte: da A positiv ist und y nach unten zeigt, ergänze das Minuszeichen; x ist nur eine Hälfte des Rechteckes)

- Nebenbedingung: Der Eckpunkt des Teilrechtecks liegen auf dem Graphen der Funktion f_2, also gilt $y = f_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2$

- Einsetzen der Nebenbedingung in die Extremalgröße ergibt

$$A(x) = -x \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - 2\right) = -\frac{1}{8}x^3 + 2x$$

- Bestimmung der Extremwerte der Funktion A (notwendige und hinreichende Bedingung)

$$A'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} = \pm\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$$

x muss positiv sein, da es sich um eine Rechtecklänge handelt.

$$A''\left(\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3}{4}\cdot\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} < 0$$

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -y = -\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{8}\cdot\frac{16\cdot 3}{9} + 2 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$$A(x;y) = 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3} = 2\cdot\frac{16}{9}\sqrt{3} = \frac{32}{9}\sqrt{3}$$

g) Funktionsschar

Ansatz für die gesuchte Funktion: $f(x) = kx^2 + c$

Bedingungen: $f(4) = 0 \Rightarrow 16k + c = 0 \Rightarrow c = -16k$

$$\Rightarrow f_k(x) = k \cdot x^2 - 16k$$

