Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Abschlussprüfung zum Realschulabschluss
Schuljahr 2005/2006

16. Mai 2006

Mathematik

Gymnasien

Aufgabensatz - HAUPTTERMIN

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **insgesamt 135 Minuten**. Für den ersten Prüfungsteil (Aufgabe I, ohne Taschenrechner) stehen bis zu 45 Minuten zur Verfügung, für den zweiten Prüfungsteil (3 Aufgaben aus den Aufgaben II, III, IV, V) steht nach Abgabe des bearbeiteten ersten Prüfungsteils der verbleibende Rest der Arbeitszeit zur Verfügung.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig), Formelblatt, Rechtschreiblexikon.

2 Aufgabenauswahl

Die Prüfungsleitung

- erhält **fünf** Aufgaben (**I, II, III, IV, V).**
  Aufgabe I ist von allen Prüflingen verbindlich zu bearbeiten.
- wählt unter Beteiligung der ersten Fachprüferin bzw. des ersten Fachprüfers aus den Aufgaben **II bis V** weitere **drei** Aufgaben aus.

Der Prüfling

- erhält zunächst **Aufgabe I** zur Bearbeitung ohne Taschenrechnerunterstützung. Diese Aufgabe ist auf den Aufgabenblättern zu bearbeiten.
- erhält bei Abgabe der bearbeiteten Aufgabe I die **drei von der Prüfungsleitung ausgewählten Aufgaben** zur Bearbeitung sowie seinen Taschenrechner. Diese Aufgaben sind auf Extrablättern zu bearbeiten.
- ist verpflichtet, jeweils die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.).

3 Korrekturverfahren

Die **Erstkorrektur** erfolgt durch die Fachlehrkraft der jeweiligen Klasse /des jeweiligen Kurses entsprechend der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsarbeiten in den Hauptschul- und Realschulabschlussprüfungen“ sowie dem „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

- Die Erstkorrektur erfolgt in **roter** Farbe.
- Auf der Arbeit werden in Form von Randbemerkungen Korrekturzeichen angebracht. Kennzeichnungen und Anmerkungen, die die Vorzüge und Mängel der Aufgabenlösung verdeutlichen, zählen zu den Korrekturen.
- Bewertung und Benotung erfolgen auf einem gesonderten Blatt (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Noten werden kurs- bzw. klassenweise in Listen eingetragen.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Die **Zweitkorrektur** erfolgt durch eine Lehrkraft der gleichen Schule. Der Zweitkorrektor erhält die Prüfungsarbeiten mit den Randbemerkungen der Erstkorrektur sowie den zu den Aufgaben zugehörigen Lösungsvorschlägen, Erwartungshorizonten und Bewertungsschemata. Der Zweitkorrektor kennt lediglich die Korrekturen des Erstkorrektors, nicht jedoch dessen Bewertung und Benotung.

- Die Zweitkorrektur erfolgt in **grüner** Farbe.
- Auf der Arbeit werden in Form von Randbemerkungen Korrekturzeichen angebracht, soweit der Zweitkorrektor von der Erstkorrektur abweichende Korrekturen für nötig hält. Hält der Zweitkorrektor eine Erstkorrektur für unrichtig oder unangemessen, klammert er diese ein. Kennzeichnungen und Anmerkungen, die die Vorzüge und Mängel der Aufgabenlösung verdeutlichen, zählen zu den Korrekturen.
- Bewertung und Benotung erfolgen auf einem gesonderten Blatt (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Noten werden in kurs- bzw. klassenweise in Listen eingetragen.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

4 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

Bewertung:

Die erreichbare Prüfungsleistung beträgt 100 Bewertungseinheiten (BWE), 34 BWE aus der Pflichtaufgabe I sowie jeweils 22 BWE aus drei der Aufgaben II, III, IV, V. Es werden nur ganzzahlige BWE vergeben. Bei der Festlegung der Prüfungsnote gilt die folgende Tabelle.

Bewertungseinheiten	Note
≥ 95	1+
≥ 90	1
≥ 85	1–
≥ 80	2+
≥ 75	2
≥ 70	2–
≥ 65	3+
≥ 60	3

Bewertungseinheiten	Note
≥ 55	3–
≥ 50	4+
≥ 45	4
≥ 40	4–
≥ 33	5+
≥ 26	5
≥ 19	5–
< 19	6

Bewertungskriterien für die Noten „gut“ und „ausreichend“

Die Note 2 („gut“) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Die Note 4 („ausreichend“) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit ist die Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße um bis zu einer Note herabzusetzen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Realschulabschlussprüfung an Gymnasien 2006 **Erstkorrektor**

Fach: Mathematik

Aufgaben-nummer ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)						BWE pro Aufgabe ↓
I	Von 34 BWE wurden erreicht ➔						
II	a)	b)	c)	d)			
III	a)	b)	c)	d)	e)		
IV	a)	b)	c)	d)	e)		
V	a)	b)	c)	d)	e)	f)	
						Summe der BWE ➔	

Bewertungstext

Note ➔

Realschulabschlussprüfung an Gymnasien 2006 **Zweitkorrektor**

Fach: Mathematik

Aufgaben-nummer ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)						BWE pro Aufgabe ↓
I	Von 34 BWE wurden erreicht ➔						
II	a)	b)	c)	d)			
III	a)	b)	c)	d)	e)		
IV	a)	b)	c)	d)	e)		
V	a)	b)	c)	d)	e)	f)	
						Summe der BWE ➔	

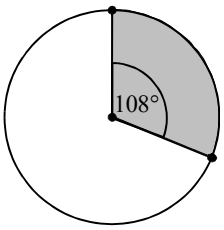
Bewertungstext

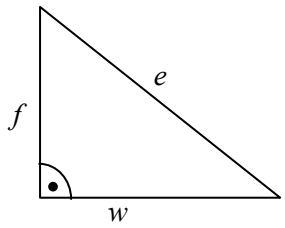
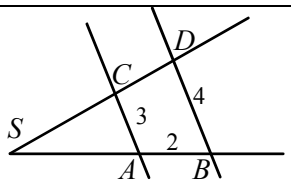
Note ➔

Name: _____ Klasse: _____

Aufgabe I – verbindlich – ohne Taschenrechner zu bearbeiten

1. Notiere jeweils den Buchstaben der korrekten Lösung in der letzten Spalte: (15 Punkte)

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
a)	$0{,}0025 \cdot 40 =$	1	0,1	0,01	0,001	
b)	$3\frac{1}{4}$ h =	210 min	195 min	165 min	325 min	
c)	$\frac{3}{5}$ kg =	300 g	$333,\overline{3}$ g	600 g	1 200 g	
d)	$\frac{7}{8} =$	87,5 %	70%	82,5%	56 %	
e)	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} =$	9	2,82	3	6	
f)	$(3-2x)\cdot(2+3x) =$	$9-4x^2$	$-6x^2+5x+6$	$6-13x+6x^2$	$6-5x+6x^2$	
g)	 Welcher prozentuale Anteil der Kreisfläche wird durch den Kreissektor beschrieben?	40 %	35 %	$33,\overline{3}$ %	30 %	
h)	Es gelte $3^n = \frac{1}{9}$. Welche Aussage ist danach richtig?	$n = 2$	$n = \frac{1}{2}$	$n = -2$	$n = -3$	
i)	Um welchen Faktor ändert sich der Flächeninhalt eines Kreises, wenn man den Radius verdreifacht ?	3	6	8	9	

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
j)	 Welche Gleichung gilt?	$e=\sqrt{f^2}+\sqrt{w^2}$	$f^2+e^2=w^2$	$w=\sqrt{f^2-e^2}$	$f^2=e^2-w^2$	
k)	135,5 Millionen km =	$1{,}355\cdot 10^8$ km	$1{,}355\cdot 10^8$ m	$1{,}355\cdot 10^6$ km	$1{,}355\cdot 10^9$ km	
l)	„Multipliziere die Summe aus einer Zahl und deren Kehrwert mit 4 und subtrahiere das Doppelte der Zahl.“ Zu welchem der angegebenen Terme passt der Text?	$4\cdot(x-\frac{1}{x})-2x$	$4\cdot(x+\frac{1}{x})-2x$	$4x+\frac{1}{x}-2x$	$4(x+\frac{1}{x}-2x)$	
m)	Ein DVD-Player kostet 168 €. Sein Preis wurde um 20 % herabgesetzt. Was kostete er ursprünglich?	201,60 €	188 €	210 €	180 €	
n)	 Die Geraden AC und BD sind parallel. Welche Längenangabe für die Strecke $\overline{SA}$ ist richtig?	$\lvert SA\rvert = 7$	$\lvert SA\rvert = 6$	$\lvert SA\rvert = 1{,}5$	$\lvert SA\rvert = 3$	
o)	Anke, Bert und Cecilia gehen ins Kino. Bert hat Karten für drei nebeneinander liegende Plätze gekauft, hält Anke und Cecilia die Karten verdeckt hin und lässt beide je eine der Karten ziehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Bert dabei einen Platz neben Anke?	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	

2. Gleichungen (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen (Lösungsmengen) folgender Gleichungen (in der Grundmenge $\mathbb{R}$).

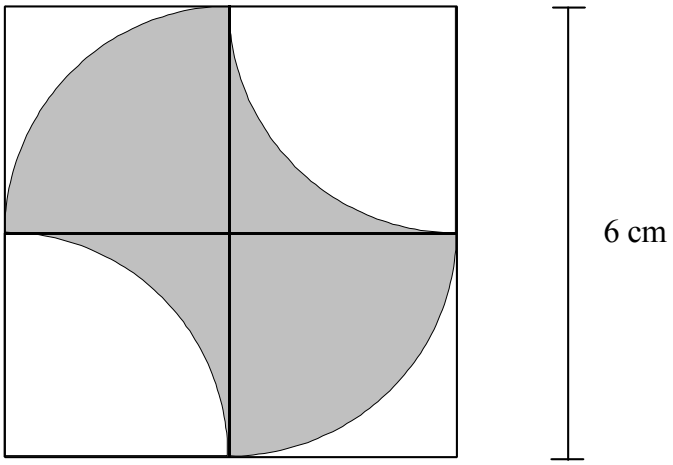
a) $67x \cdot (x-4) \cdot (2x+6) \cdot (x-0{,}03) = 0$

b) $\frac{2x+8}{x} = x$

3. Flächen (3 Punkte)

Gib den Flächeninhalt der grauen Fläche an und begründe dein Ergebnis.
Die Seitenlänge des großen Quadrats beträgt dabei 6 cm. Es ist unterteilt in 4 gleichgroße kleine Quadrate, in denen jeweils ein Viertelkreis die Trennlinie bildet.

Hinweis: Das Ergebnis kann mit minimalem Rechenaufwand bestimmt werden.



4. Wahrscheinlichkeit (6 Punkte)

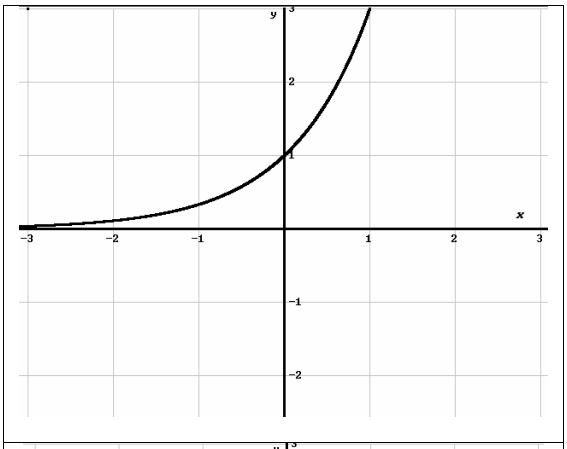
a) Zwei Freunde A und B spielen gegeneinander ein Glücksspiel. Sieger ist derjenige, der zuerst zweimal gewonnen hat.
Zeichne ein zugehöriges Baumdiagramm (ohne die Wahrscheinlichkeiten an den einzelnen Pfaden) und notiere am Ende jedes Pfades, wer bei dem entsprechenden Ergebnis der Sieger ist.

b) A gewinnt ein einzelnes Spiel gegen B mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{5}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A Sieger wird?

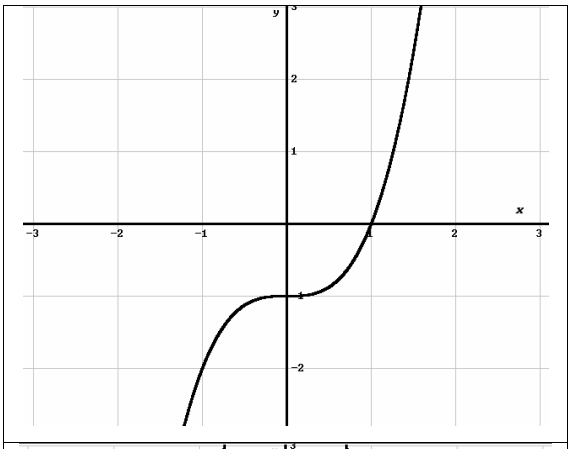
5. Graphen zuordnen (6 Punkte)

Bestimme zu jedem der skizzierten Funktionsgraphen den zugehörigen Funktionsterm aus der Liste der unten vorgegebenen Funktionsterme. Trage dazu den passenden Buchstaben in der Tabelle ein (Es müssen dann noch 6 Felder frei bleiben).

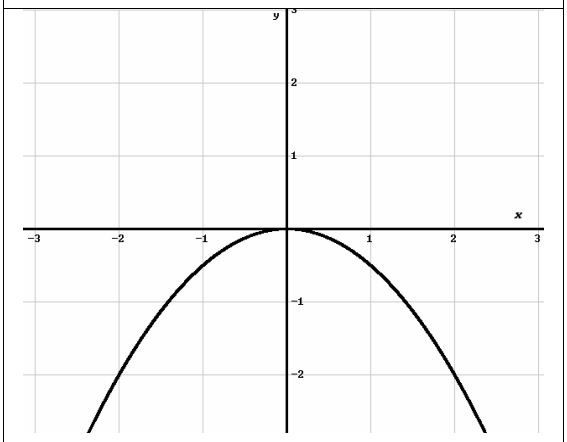
A



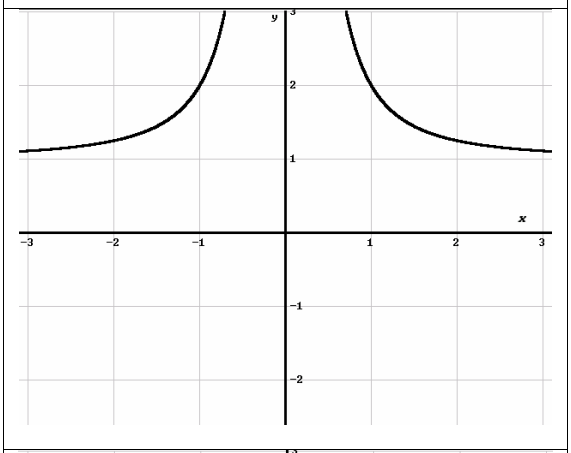
B



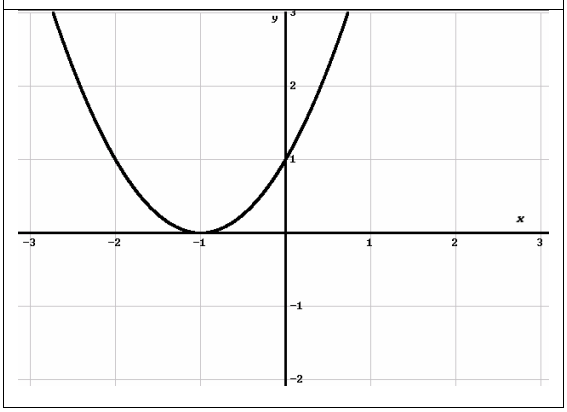
C



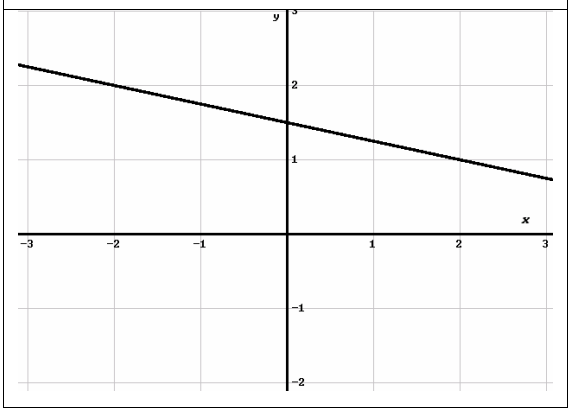
D



E



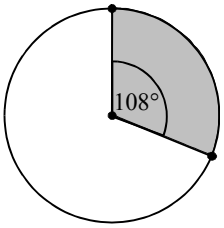
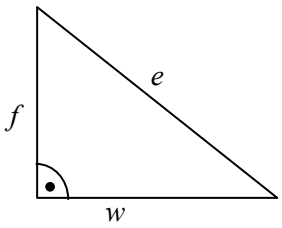
F

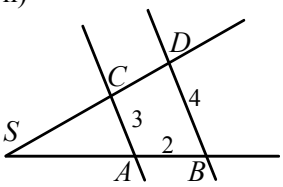


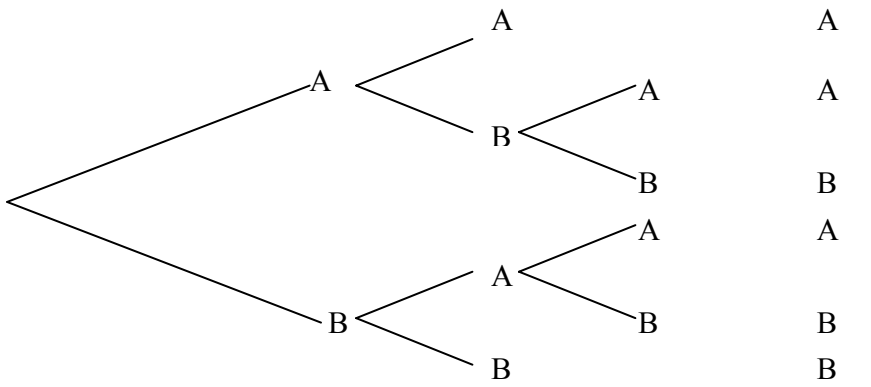
Funktionsterm	$-\frac{1}{2}x^2$	$-2x^2$	$(x+1)^2$	x^2+1	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	3^x
Zugehöriger Graph						

Funktionsterm	$\frac{1}{x^2}+1$	$\frac{1}{x}+2$	$\frac{1}{4}\cdot x+1{,}5$	$-\frac{1}{4}\cdot x+1{,}5$	x^3-1	x^4-1
Zugehöriger Graph						

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung I	II	III
1.	a) $0{,}0025 \cdot 40 =$	**B**	1		
	b) $3\frac{1}{4}\,\text{h} =$	**B**	1		
	c) $\frac{3}{5}\,\text{kg} =$	**C**	1		
	d) $\frac{7}{8} =$	**A**	1		
	e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} =$	**D**	1		
	f) $(3-2x)\cdot(2+3x) =$	**B**		1	
	g) Welcher prozentuale Anteil der Kreisfläche wird durch den Kreissektor beschrieben? 	**D**		1	
	h) Es gelte $3^n = \frac{1}{9}$. Welche Aussage ist danach richtig?	**C**	1		
	i) Um welchen Faktor ändert sich der Flächeninhalt eines Kreises, wenn man den Radius verdreifacht ?	**D**		1	
	j) Welche Gleichung gilt? 	**D**		1	
	k) 135,5 Millionen km =	**A**	1		
	l) „Multipliziere die Summe aus einer Zahl und deren Kehrwert mit 4 und subtrahiere das Doppelte der Zahl.“ Zu welchem der angegebenen Terme passt der Text?	**B**		1	
	m) Ein DVD-Player kostet 168 €. Sein Preis wurde um 20 % herabgesetzt. Was kostete er ursprünglich?	**C**		1	

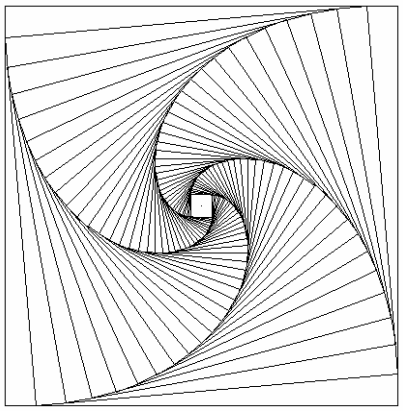
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	n)  Die Geraden AC und BD sind parallel. Welche Längenangabe für die Strecke $\overline{SA}$ ist richtig? **B**		1	
	o) Anke, Bert und Cecilia gehen ins Kino. Bert hat Karten für drei nebeneinander liegende Plätze gekauft, hält Anke und Cecilia die Karten verdeckt hin und lässt beide je eine der Karten ziehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Bert dabei einen Platz neben Anke? **D** *Bei 2 von den 6 Möglichkeiten sitzt Bert nicht neben Anke: ACB, BCA.*		1	
2.	a) $67x \cdot (x-4) \cdot (2x+6) \cdot (x-0{,}03) = 0$. Die Lösungen sind $x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = -3$ und $x_4 = 0{,}03$ oder $L = \{0\ ;\ 4\ ;\ -3\ ;\ 0{,}03\}$. *(Ein Fehler: 1 Punkt, ab zwei Fehler: 0 Punkte)*	2		
	b) $\frac{2x+8}{x} = x$ $x^2 - 2x - 8 = 0$ $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+9}$ $x_1 = 1 + 3 = 4$ $x_2 = 1 - 3 = -2$ Die Lösungen sind $x = 4$ und $x = -2$ oder $L = \{-2\ ,\ 4\}$. *(Ein Fehler: 1 Punkt, ab zwei Fehler: 0 Punkte)*	1	1	
3.	Die grauen Teilflächen ergänzen sich entweder • zu zwei Quadraten mit der Seitenlänge von 3 cm oder • zu einem Rechteck mit den Seitenlängen 6 cm bzw. 3 cm. Die graue Fläche hat damit einen Flächeninhalt von 18 cm^2.		3	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
4.	a) 		3	
	b) Wie aus a) zu erkennen ist, gibt es im Baumdiagramm für A drei Wege zum Sieg. Von oben nach unten haben die drei Wege (nach der Produktregel) folgende Wahrscheinlichkeiten. $p_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$, $p_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{125}$, $p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{125}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass A Sieger wird, ergibt sich als Summe dieser drei Wahrscheinlichkeiten: P(„A wird Sieger“) $= p_1 + p_2 + p_3 = \frac{81}{125} = 64{,}8\ \%$. *Diese Wahrscheinlichkeit ist also höher als die Wahrscheinlichkeit, ein einzelnes Spiel zu gewinnen (60 %)!*		3	
5.	Term: $-\frac{1}{2}x^2$, $-2x^2$, $(x+1)^2$, x^2+1, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, 3^x Graph: **C**, , **E**, , , **A** Term: $\frac{1}{x^2}+1$, $\frac{1}{x}+1$, $\frac{1}{4}x+1{,}5$, $-\frac{1}{4}x+1{,}5$, x^3-1, x^4-1 Graph: **D**, , , **F**, **B**,		4	2
	Insgesamt 34 BWE	10	22	2

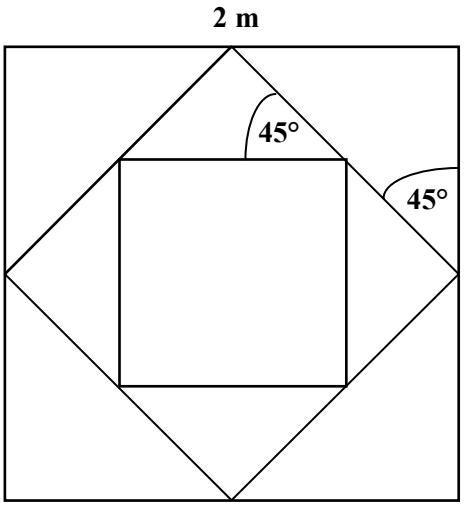
Aufgabe II – Idee des Messens

Computergrafik

Man kann mit einfachen (mathematischen) Mitteln faszinierende grafische Effekte erzielen.
In der nebenstehenden Figur wurde ein Quadrat 36-mal jeweils um einen festen Winkel α – hier 5° – weitergedreht, und die Seite wurde immer um denselben Faktor so verkürzt, dass das gedrehte Quadrat gerade in das vorherige hineinpasst.



a) Wenn $\alpha = 45°$, sind die Verhältnisse noch sehr übersichtlich: Das Anfangsquadrat habe die Seitenlänge $s = 2$ m.

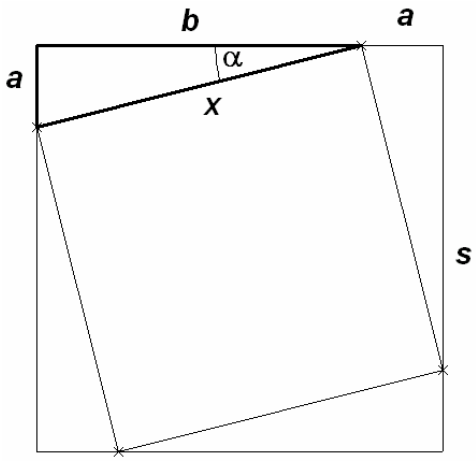


- Bestimme die Seitenlängen der Quadrate nach der ersten und nach der zweiten Drehung, also die Seitenlängen der beiden inneren Quadrate.

Es ist:
Neue Seitenlänge = Verkleinerungsfaktor f · vorherige Seitenlänge

- Begründe, dass der Verkleinerungsfaktor f bei beiden Drehungen den Wert $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hat.

Nun sei die Winkelgröße von α nicht mehr 45°, sondern beliebig. s sei die Seitenlänge des Ausgangsquadrates.



b) Gesucht ist die neue Seitenlänge x.
Man erkennt: $s = a + b$.

- Begründe damit folgenden Zusammenhang:
  $s = x \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha)$.
- Bestimme die nach x umgeformte Gleichung und gib den Verkleinerungsfaktor f an.

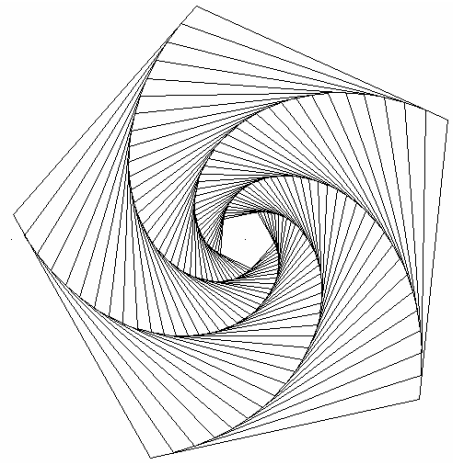
Sei α nun 5° wie in der ersten Grafik oben rechts.

- Bestimme den Verkleinerungsfaktor f für $\alpha = 5°$ und zeige, dass $f \approx 0{,}923$.

Die Ausgangsseite s habe wieder eine Länge von 2 m.

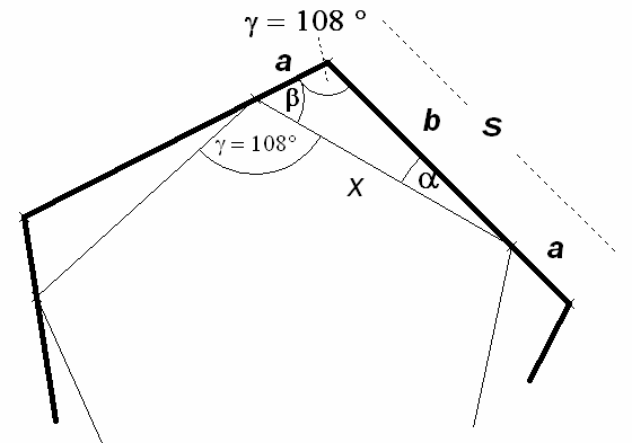
- Bestimme den Flächeninhalt des 36. gedrehten Quadrats (für $\alpha = 5°$).

Um noch interessantere Effekte zu erzielen, kann man statt eines Quadrates ein regelmäßiges Vieleck entsprechend drehen und verkleinern. Dies soll jetzt mit einem <u>regelmäßigen Fünfeck</u> geschehen.



c) Begründe zuerst, dass das Maß der Innenwinkel γ (Winkel zwischen zwei benachbarten Seiten) eines regelmäßigen Fünfecks jeweils 108° beträgt.

d) Man sieht hier Teile eines Ausgangsfünfecks (dick) und Teile des verkleinerten gedrehten Fünfecks (dünn).
α sei wieder der Drehwinkel.



- Es gilt wieder: $s = a + b$.
  Begründe damit und mit Hilfe des Sinussatzes, dass die folgende Beziehung gilt:
  $$x = \frac{\sin 108°}{\sin \alpha + \sin \beta} \cdot s$$

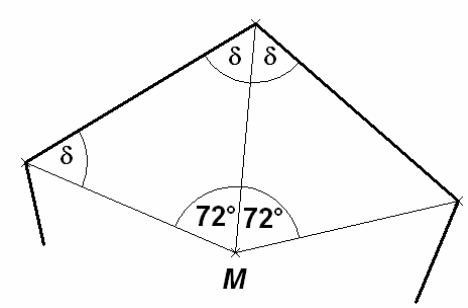
Es sei nun wieder $\alpha = 5°$.

- Begründe, dass der Verkleinerungsfaktor f für $\alpha = 5°$ etwa 0,9438 beträgt

- Bei <u>einer</u> Drehung verkleinert sich der Flächeninhalt um den Faktor $f^2 \approx 0{,}8908$.
  Bestimme die Anzahl der Drehungen, die nötig sind, damit der Flächeninhalt des letzten Fünfecks erstmals kleiner als 10 % des Flächeninhalts des Ausgangsfünfecks ist.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die jeweils außen übrig bleibenden (4 kongruenten) rechtwinkligen Dreiecke liefern mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die nötigen Informationen. $x_1^2 = 1 + 1 = 2$ $x_1 = \sqrt{2}$. Das erste gedrehte Quadrat hat eine Seitenlänge von $\sqrt{2}$ m $\approx 1{,}4142$ m. $x_2^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$ $x_2 = 1$. Das zweite gedrehte Quadrat hat eine Seitenlänge von 1 m. Danach gilt: $\frac{x_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. oder gleich allgemein: Die neue Seite x ist jeweils die Hypotenuse in einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck mit der Kathetenlänge $\frac{s}{2}$. Also gilt: $x^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{2}$ und damit $x = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot s = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s$ Für den Verkleinerungsfaktor f gilt somit: $f = \frac{\sqrt{2}}{2}$.	5		
b)	Es gilt: $\sin\alpha = \frac{a}{x}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{x}$ und damit $a = x \cdot \sin\alpha$ bzw. $b = x \cdot \cos\alpha$. Mit $s = a + b$ ergibt sich: $s = x \cdot \sin\alpha + x \cdot \cos\alpha = x \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha)$. Löst man diese Gleichung nach x auf, erhält man: $x = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha} \cdot s$. Für den Verkleinerungsfaktor f gilt also: $f = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.	2	2	

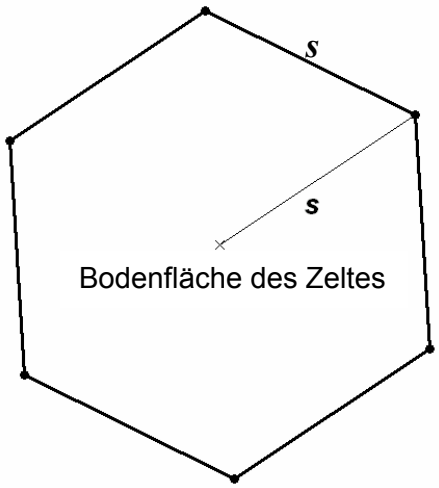
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Für $\alpha = 5°$ gilt: $f = \dfrac{1}{\sin 5° + \cos 5°} = 0{,}92306... \approx 92{,}3\,\%$. Wenn man 36-mal dreht, muss man auch 36-mal verkleinern, und zwar jedes Mal mit dem eben berechneten Faktor. Weil es ein Verkleinerungs<u>faktor</u> ist, bedeutet 36-faches Verkleinern Potenzieren des Faktors mit dem Exponenten 36, also: $0{,}92306^{36} \approx 0{,}05601$. Der Flächeninhalt des Ausgangsquadrates wird dann mit dem Faktor $0{,}05601^2 \approx 0{,}00314$ verkleinert. Ausgehend von einem Flächeninhalt von 4 m^2 hat das 36. Quadrat einen Flächeninhalt von ungefähr 0,01255 m^2, also ca. 125,5 cm^2.		4	
c)	Wir betrachten zwei „Tortenstücke“ des regelmäßigen Fünfecks: Es handelt sich um gleichschenklige Dreiecke, wobei der Winkel am Mittelpunkt der Basis gegenüberliegt und ein Winkelmaß von $\dfrac{360°}{5} = 72°$ hat. Die beiden gleichgroßen Basiswinkel δ haben jeweils ein Winkelmaß von 54° (Winkelsumme im Dreieck ist 180°).  Gleichzeitig erkennt man, dass der Winkel γ zwischen zwei benachbarten Seiten eines regelmäßigen Fünfecks sich jeweils aus zwei dieser Winkel additiv zusammensetzt. Das Winkelmaß von γ beträgt also 108°. *<u>Hinweis:</u> Wenn die Schülerinnen und Schüler den Term $(n-2)\cdot 180°$ für die Winkelsumme eines regelmäßigen n-Ecks kennen und korrekt anwenden, ist die Lösung auch mit voller Punktzahl zu bewerten.*		2	
d)	Wir betrachten eines der in der Skizze erkennbaren (kongruenten) Dreiecke und wenden den Sinussatz an: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{x}{\sin 108°}$ und ebenso $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{x}{\sin 108°}$. Also: $a = x \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin 108°}$ und ebenso $b = x \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin 108°}$. Somit gilt: $s = a + b = x \cdot \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin 108°}$. Diese Gleichung lösen wir nach x auf und erhalten das gewünschte Ergebnis: $x = \dfrac{\sin 108°}{\sin\alpha + \sin\beta} \cdot s$.		1	2

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Für $\alpha = 5°$ gilt: $\beta = 180° - 108° - 5° = 67°$ (Winkelsummensatz im Dreieck) Also $f = \frac{\sin 108°}{\sin 5° + \sin 67°} = 0{,}9438...$. Ab jetzt haben wir den gleichen mathematischen Hintergrund wie im zweiten Teil von b). Wir müssen also die Ungleichung $\left(f^2\right)^n < 0{,}1$ nach *n* auflösen: $f^{2n} < 0{,}1$ $2n \cdot \lg f < -1$ $n > \frac{-1}{2 \cdot \lg f}$ $n > 19{,}91...$ Es sind also 20 Drehungen mit entsprechenden Verkleinerungen nötig, damit der Flächeninhalt des letzten Fünfecks erstmals kleiner als 10 % des Flächeninhalts des Ausgangsfünfecks ist. *<u>Bemerkung:</u> Wenn die Lösung „empirisch“ durch Ausprobieren verschiedener Werte von n gefunden wird, ist dieser Weg mit voller Punktzahl zu bewerten.*		1 1	2
	Insgesamt 22 BWE	7	11	4

Aufgabe III – Idee von Raum und Form

Pfadfinderzelt

Eine einfache Art, ein Zelt zu konstruieren, besteht darin, gleichlange Stangen in den Eckpunkten eines Vielecks auf dem Boden aufzustellen und sie in einer Dachspitze zusammenzubinden. Anschließend wird das „Gerüst“ mit Zeltbahnen bespannt.
Der Fußboden bleibt „Natur“.



Wir betrachten als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck.
Die 6 Stangen haben eine Länge von jeweils 8 m, werden aber einen Meter vor ihrem Ende zusammengebunden.
Der Durchmesser der Stangen wird hier vernachlässigt.

Der Abstand s der Fußpunkte der Stangen zum Bodenmittelpunkt <u>betrage zunächst 5 m.</u>

a) Berechne die Höhe des Zeltes
(Abstand vom Boden bis zum Kreuzungspunkt der Stangen).
[zur Kontrolle: $h \approx 4{,}9$ m]

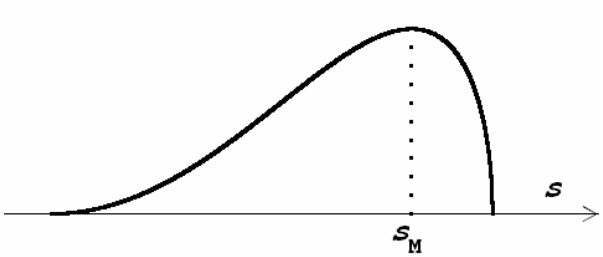
b) Bestimme den Flächeninhalt des Zeltbodens.
[zur Kontrolle: $A \approx 65$ m^2]

c) Bestimme, wie viel Quadratmeter Zelttuch benötigt werden.

d) Bestimme den „umbauten Raum“ W, d.h. das Volumen des Zeltes.

Nun soll s variiert werden, und der „umbaute Raum“ W soll als Funktion von s betrachtet werden: $W = W(s)$.

e) Rechts siehst du den Graphen von W.
Die y-Achse fehlt, und die s-Achse ist nicht skaliert.



- Bestimme die beiden Nullstellen, d.h. jene Werte von s, für die das Volumen $W(s)$ den Wert Null annimmt, und beschreibe die anschauliche Bedeutung.

- Bestimme den Funktionsterm $W(s)$.
[zur Kontrolle:
$W(s) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot (49 - s^2)} \cdot s^2$]

- Begründe sinnvoll, dass die Maximalstelle s_m zwischen 5 und 6 liegt.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der 7 m lange Teil einer Zeltstange, die Strecke vom Fußpunkt dieser Stange zum Zeltmittelpunkt und die Zelthöhe bilden ein rechtwinkliges Dreieck, auf das man den Satz des Pythagoras anwenden kann: $h = \sqrt{49 - s^2}$. Mit $s = 5$ ergibt sich: $h = 2 \cdot \sqrt{6} \approx 4{,}9$. Die Höhe des Zeltes beträgt ca. 4,9 m.	4		
b)	Der Zeltboden besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken jeweils mit der Seitenlänge $s = 5$ m. Für die Höhe dieser Dreiecke gilt nach dem Satz von Pythagoras: $h_\Delta^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2$ $h_\Delta^2 = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}}$ $h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$. Insgesamt ergibt sich für die Bodenfläche folgender Flächeninhalt: $A(s) = 6 \cdot \frac{s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot s^2$. Mit $s = 5$ ergibt sich: $A = \frac{3\sqrt{3} \cdot 25}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 64{,}951\ldots$. Der Flächeninhalt des Zeltbodens beträgt ca. 65 m^2.	2	3	
c)	Die Zeltplanen zur Bespannung setzen sich zusammen aus 6 gleichschenkligen Dreiecken mit jeweils der Basislänge $s = 5$ m und den Schenkeln der Länge 7 m. Wieder mit dem Pythagoras erhält man für jedes dieser Dreiecke als Basishöhe $h_B = \sqrt{49 - 6{,}25} = \sqrt{42{,}75}$. Für die Gesamtfläche der Bespannung ergibt sich $A_B = 6 \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{42{,}75}}{2} = 15 \cdot \sqrt{42{,}75} = 98{,}075\ldots$. Es werden ca. 98 m^2 Zelttuch benötigt.		5	
d)	Das Zelt ist – mathematisch gesehen – eine Pyramide (mit sechseckiger Grundfläche). Für das Volumen einer Pyramide gilt die Formel: $V = \frac{\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}}{3}$. Für den umbauten Raum W erhält man mit den Ergebnissen aus a) und b):			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$W = \dfrac{\left(\dfrac{75\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{6}\right)}{3} = 75\cdot\sqrt{2} = 106{,}066...$. Das Zelt hat ein Volumen von ca. 106 m^3.		3	
e)	Das Volumen des Zeltes wird Null, wenn entweder $s = 0$ (die Zeltstangen stehen lotrecht in der Mitte – das ist praktisch unmöglich) oder $h = 0$, d.h. $s = 7$ (die Zeltstangen liegen flach auf dem Boden und kreuzen sich im Mittelpunkt – praktisch gesehen ist auch das kein Zelt mehr). Die Nullstellen der Funktion W sind also bei 0 und 7. *Zur Bestimmung des Funktionsterms von W wurde in a), b) und d) schon Vorarbeit geleistet. Wenn aber dort nur mit dem konkreten Wert s = 5 gerechnet wurde, müssen hier die allgemeinen Terme noch dargestellt werden.*			2
	$W(s) = \dfrac{A(s)\cdot h(s)}{3} = \dfrac{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot s^2\cdot\sqrt{49-s^2}}{3} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3\cdot(49-s^2)}\cdot s^2$.			2
	Man kann die Nullstellen auch an diesem Term ablesen. Aus der Zeichnung kann man nun schätzen, dass der Maximalwert von W an einer Stelle s_m zwischen $s = 5$ und $s = 6$ angenommen wird. Deshalb berechnen wir (mit dem TR) die Werte $W(5)$, $W(6)$ und einen Zwischenwert, z.B. $W(5{,}5)$, und erhalten: $W(5) \approx 106$ (vgl. d) $W(5{,}5) \approx 113$ und $W(6) \approx 112$. Da der Wert in der Mitte größer als beide Randwerte ist, muss die Maximalstelle in dem betrachteten Intervall [5 ; 6] liegen. Beim Aufbau des Zeltes erhält man also das größte Volumen (von mehr als 113 m^3), wenn man für s den (hier nicht genau berechneten) Wert s_m zwischen 5 m und 6 m wählt. *Andere sinnvolle Vorgehensweisen sind ebenso zulässig.*			1
	Insgesamt 22 BWE	6	11	5

Aufgabe IV – Idee des funktionalen Zusammenhangs

Medikamente

Antibiotika sind Medikamente gegen Infektionserkrankungen.
Wird ein bestimmtes Antibiotikum in Form einer Tablette eingenommen, kann man (idealisiert) annehmen, dass die Konzentration dieses Antibiotikums im Blut sofort nach der Einnahme einen Wert von 4 mg pro Liter Blut aufweist. Pro Stunde sinkt die Konzentration um 5 %.

a) Sei x die Zeit gemessen in Stunden nach Einnahme des Medikamentes, $f(x)$ die Konzentration des Antibiotikums im Blut gemessen in mg pro Liter.
Begründe, dass die zugehörige Funktionsgleichung $f(x) = 4 \cdot 0{,}95^x$ lautet.

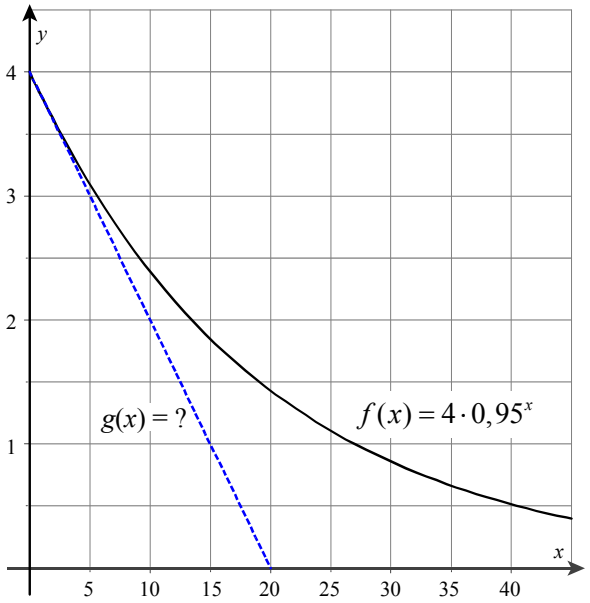
Berechne, wie hoch die Antibiotikumskonzentration eine, vier und zwölf Stunden nach Einnahme einer Tablette ist.

b) Um die Therapie genau zu überwachen, wird einem Patienten bereits zwanzig Minuten nach Einnahme der ersten Tablette Blut abgenommen und die Antibiotikumskonzentration bestimmt. Berechne die zu erwartende Konzentration.

c) Ein Patient muss die Therapie wegen Unverträglichkeit bereits nach der Einnahme der ersten Tablette abbrechen. Bestimme, wann die Unverträglichkeitsgrenze von 0,2 mg pro Liter unterschritten wird, der Patient also keine negativen Reaktionen durch die Einnahme des Medikaments mehr spüren sollte.

d) Es gibt Substanzen, deren Konzentration im Blut linear abnimmt.
Eine bestimmte derartige Substanz führt sofort nach Einnahme zu einer Konzentration im Blut von 4 mg pro Liter, die innerhalb einer Stunde jeweils um 0,2 mg pro Liter sinkt (siehe Abbildung).

- Bestimme den zugehörigen Funktionsterm $g(x)$.
- Beschreibe je zwei Eigenschaften von exponentiellem negativem Wachstum und linearem negativem Wachstum bezogen auf den Kontext der Aufgabe.

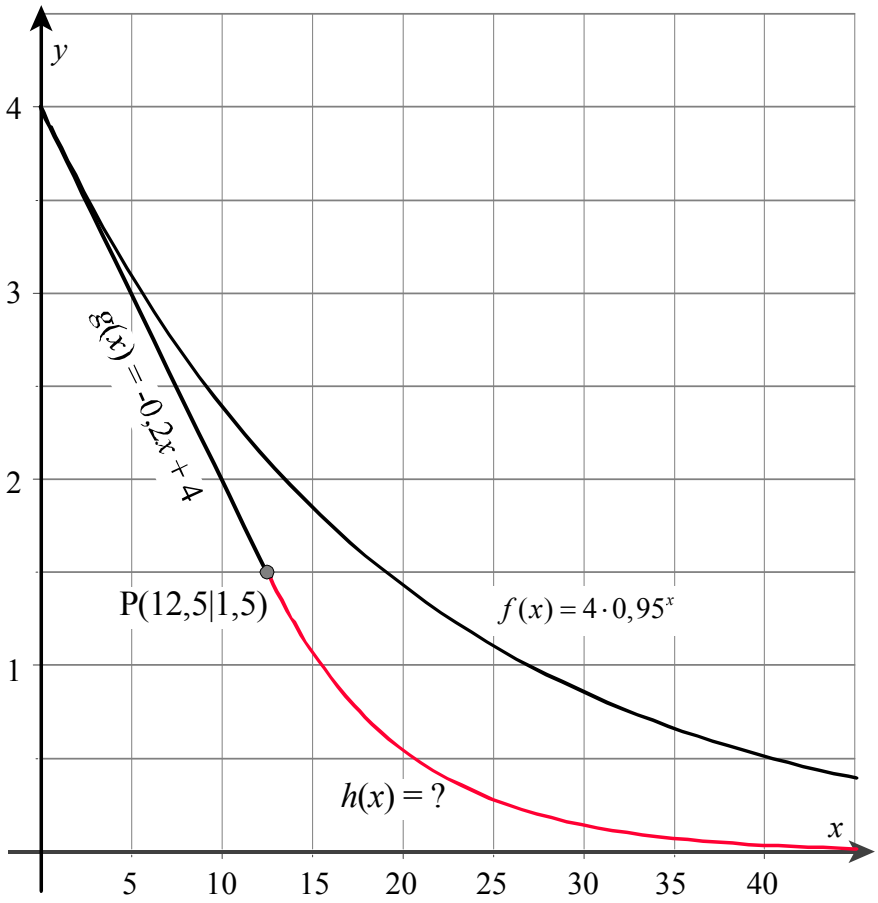


e) Bei manchen Substanzen kann man den Abbau im Blut so beschreiben, dass relativ große Konzentrationen zunächst linear abgebaut werden, dann exponentiell.
So soll der Abbau einer Substanz bis zum Punkt $P(12{,}5|1{,}5)$ durch die Funktion g beschrieben werden. Danach verlaufe der weitere Abbau exponentiell mit der Funktionsgleichung $h(x) = a \cdot b^{x-12{,}5}$ $a, b \in \mathbb{R}$. Neben $h(12{,}5) = 1{,}5$ sei auch $h(32) = 0{,}11$ bekannt.

Bestimme die Parameter a und b und interpretiere diese im Kontext der Aufgabe.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Gleichung erfüllt $f(0) = 4$. Die Konzentration soll pro Stunde um 5 % sinken, es bleiben also 95 % noch vorhanden, also $f(x) = 4 \cdot 0{,}95^x$ mit x für die Zeit in Stunden und $f(x)$ für die Konzentration im mg pro Liter Blut. Nach 1 Stunde: $f(1) = 4 \cdot 0{,}95^1 = 3{,}8$. Nach 4 Stunden: $f(4) = 4 \cdot 0{,}95^4 \approx 3{,}26$. Nach 12 Stunden: $f(12) = 4 \cdot 0{,}95^{12} \approx 2{,}16$. Die Konzentration beträgt nach einer Stunde noch 3,8 mg, nach 4 Stunden etwa 3,26 mg und nach zwölf Stunden etwa 2,16 mg pro Liter.	3	3	
b)	Konzentration nach 20 Minuten: 20 Minuten sind genau $\frac{1}{3}$ Stunde, daher ist $f(\frac{1}{3}) = 4 \cdot 0{,}95^{\frac{1}{3}} \approx 3{,}93$. Nach zwanzig Minuten müsste die Konzentration 3,93 mg pro Liter betragen.		2	
c)	Zu lösen ist folgende Ungleichung: $4 \cdot 0{,}95^x < 0{,}2$ $0{,}95^x < 0{,}05$ $x \cdot \lg 0{,}95 < \lg 0{,}05$ $x > \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}95}$ $x > 58{,}4039...$ Nach etwa 58 Stunden und 24 Minuten ist die Unverträglichkeitsgrenze unterschritten.		4	
d)	<u>Funktionsgleichung für linearen Abbau:</u> Der Term wird gebildet aus *Bestand – Abnahmerate mal Zeit*: $g(x) = 4 - 0{,}2x$. <u>Exponentielles negatives Wachstum:</u> Die Abnahme (pro Stunde) geschieht proportional zum Bestand: Je kleiner die Konzentration im Blut, desto weniger verringern sich die Werte in mg/l. Theoretisch wird die Substanz nie ganz abgebaut, weil die Exponentialfunktion f niemals Null werden kann. <u>Lineares negatives Wachstum:</u> Die Abnahme geschieht immer um den gleichen Betrag pro Stunde. Das hat auch zur Folge, dass in diesem Modell die Substanz vollständig abgebaut wird, im Beispiel ist dieser Zustand nach 20 Stunden erreicht.	2	2 2	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	<u>Funktionsgleichung für exponentiellen Abbau nach *P*:</u> $h(12{,}5) = a = 1{,}5$, also steht a schon fest. $h(32) = 1{,}5 \cdot b^{32-12{,}5} = 0{,}11$. Damit ergibt sich für b: $b^{19{,}5} = \frac{0{,}11}{1{,}5}$ $b = \left(\frac{0{,}11}{1{,}5}\right)^{\frac{1}{19{,}5}}$ $b = 0{,}8746... \approx 0{,}875$. Damit ist $h(x) = 1{,}5 \cdot 0{,}875^{x-12{,}5}$.			3
	<u>Interpretation der berechneten Parameter:</u> $a = 1{,}5$ ist der Bestand zum Zeitpunkt 12,5, der pro Stunde um ca. 12,5 % ($b \approx 1 - 0{,}125$) abgebaut wird.			1
	Zeichnung wird nicht erwartet. Hier ist g ab P ersetzt durch h.  			
	Insgesamt 22 BWE	5	13	4

Aufgabe V – Idee der Wahrscheinlichkeit

Lotterie

Eine Klasse möchte auf dem Schulfest eine Lotterie durchführen. Dafür verwenden sie fünf Holzplättchen, auf denen je eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 steht (siehe Abbildung).
Diese fünf Plättchen werden nacheinander ohne Zurücklegen aus einer Lostrommel gezogen und in der gezogenen Reihenfolge hintereinander gelegt. Sie bilden dann eine fünfstellige Zahl.

a) Bestimme die Anzahl der möglichen Zahlen, die gezogen werden können.
(Zur Kontrolle: 120).

Die Schülerinnen und Schüler stellen dazu nun 1200 Lose her, auf denen je eine der 120 möglichen Zahlen als Losnummer gedruckt wird. Sie machen das so, dass insgesamt jede Losnummer genau 10-mal vorkommt.

Im Laufe des Schulfestes sollen die Lose verkauft werden. Zu einem geeigneten Zeitpunkt findet danach die „Ziehung“ statt, wobei mit den 5 Plättchen – wie beschrieben – die Gewinnzahl gezogen wird.
Die Klasse überlegt sich einen „Gewinnplan“, der als Plakat überall ausgehängt werden soll (siehe Anlage).

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den Käufer eines einzigen Loses, dass er einen Gutschein für ein Buch gewinnt.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den Käufer eines einzigen Loses, dass er einen Gutschein für eine „Riesenwurst mit Beilage“ gewinnt (zur Kontrolle: $p = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$).

Die Schüler planen, ein einzelnes Los für 0,50 € zu verkaufen.
Material und Druckkosten betragen insgesamt 12 €.
Die Kugelschreiber sind als Werbegeschenk von einem Elternvertreter gestiftet worden.
Eine „Riesenwurst mit Beilage“ kalkulieren die Schüler mit 2 € und ein Buch mit 30 €.

d) Berechne, wie viel Geld die Schüler bei ihrer Kalkulation übrig behalten werden, wenn sie alle 1200 Lose verkaufen.
Bei der staatlichen Lotterie müssen mindestens 50 % der Einnahmen für Gewinne ausgegeben werden. Entscheide, ob das bei der hier betrachteten Lotterie der Fall ist.

e) Bestimme, wie viel Geld die Schüler bei ihrer Kalkulation mindestens übrig behalten werden und wie viel höchstens, wenn sie nur 1 000 Lose verkaufen werden.
Hinweis: Gutscheine für nicht vergebene Preise brauchen auch nicht bezahlt zu werden.

f) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den Käufer eines einzigen Loses, dass er überhaupt etwas gewinnt.

Gewinnplan

für das große Zahlengewinnspiel

Heute 17 Uhr Ziehung der Glückszahl

Vergleicht die Glückszahl mit Eurer Losnummer!

- Die letzte Ziffer ist richtig:

  Gewinn: ***Ein Super-Kugelschreiber***

- Die letzten beiden Ziffern sind richtig,
  aber nicht die ganze Zahl:

  Gewinn: ***Gutschein für eine Riesenwurst mit Beilage***

- Die Glückszahl stimmt mit der Losnummer überein:

  Gewinn: ***Gutschein für ein wertvolles Buch***

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Für die erste Ziffer (das erste Plättchen) gibt es 5 Möglichkeiten, für jede dieser 5 Möglichkeiten gibt es 4 Möglichkeiten für die nächste Ziffer u.s.w. Insgesamt gibt es also $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ verschiedene mögliche fünfstellige Zahlen, die gezogen werden können.	3		
b)	Von den 120 bei der Ziehung gleichwahrscheinlichen möglichen Gewinnzahlen ist für den Käufer (eines einzigen Loses) genau eine günstig. Also $p_1 = \frac{1}{120} = 0{,}00833... \approx 0{,}83\,\%$.	3		
c)	Wenn nur die letzten beiden Ziffern übereinstimmen sollen, können die drei ersten Ziffern bei der Ziehung für den Losbesitzer beliebig sein. Dafür gibt es dann $3! = 6$ Varianten. Insgesamt gibt es von den 120 bei der Ziehung gleichwahrscheinlichen möglichen Zahlen also 6, bei denen die letzten beiden Ziffern mit denen des Losbesitzers übereinstimmen. Eine von diesen 6 Gewinnzahlen würde dem Losbesitzer aber einen Hauptgewinn bringen, so dass genau die verbleibenden 5 Gewinnzahlen zur „Riesenwurst mit Beilage“ führen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $p_2 = \frac{5}{120} = \frac{1}{24} = 0{,}04166... \approx 4{,}2\,\%$.		4	
d)	Die Veranstalter haben 600 € ($= 1200 \cdot 0{,}5$ €) Einnahmen und 12 € Materialkosten. Nachdem die Gewinnzahl gezogen worden ist, gibt es 10 Lose, die zu einem Hauptgewinn gehören. Entsprechend der Argumentation von c) gibt es 50 Lose, die zur „Riesenwurst mit Beilage“ gehören. Also müssen die Veranstalter noch 100 € für Würstchen und 300 € für Buchpreise einkalkulieren. Dann bleiben also 188 € ($= 600$ € $- 12$ € $- 100$ € $- 300$ €) als „Gewinn“ für die Veranstalter übrig. Ausgeschüttet werden 400 €, das sind als 50 % der Einnahmen von 600 €.	2	3	
e)	Wenn nur 1 000 Lose verkauft werden, dann haben die Schüler nur noch Einnahmen in Höhe von 500 €. Im für sie ungünstigsten Fall haben sie dabei alle auch alle 60 Lose verkauft, die durch die Ziehung zu „Ausschüttungskosten“ führen. Dann bleiben als Gewinn gegenüber d) 100 € weniger, also 88 €. Im für die Schüler finanziell günstigsten Fall haben sie keines der 60 Lose verkauft, die durch die Ziehung zu „Ausschüttungskosten“ führen. Dann bleiben als Gewinn 488 €. *<u>Bemerkung:</u>* *Dieser Fall wäre natürlich für die Veranstalter peinlich und würde sie Betrugsvorwürfen aussetzen, glücklicherweise sind die beiden genannten Extremfälle – vor allem der zweite – sehr unwahrscheinlich:* $\approx 10^{-5}$ *bzw.* $5 \cdot 10^{-51}$!		3	2

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Genau dann, wenn bei der Ziehung als letzte Ziffer gerade die letzte Ziffer der Losnummer des Losbesitzers gezogen wird, bekommt dieser überhaupt einen Gewinn. Man könnte diese Wahrscheinlichkeit über ein Abzählargument (vgl. c)) oder mit Hilfe eines Baumdiagramms bestimmen. Die einfachste Argumentation besteht aber darin, dass ja alle Plättchen gleichberechtigt sind (Symmetrieargument), also auch in Bezug auf den letzten Zug. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $p_2 = \frac{1}{5} = 20\ \%$.			2
	Insgesamt 22 BWE	8	10	4