Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Abschlussprüfung zum Realschulabschluss

Schuljahr 2005/2006

02.Juni 2006

Mathematik

Gymnasien

Aufgabensatz - ZWEITTERMIN

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines

2 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben

3 Hinweise zum Korrekturverfahren

4 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **insgesamt 135 Minuten**. Für den ersten Prüfungsteil (Aufgabe I, ohne Taschenrechner) stehen bis zu 45 Minuten zur Verfügung, für den zweiten Prüfungsteil (3 Aufgaben aus den Aufgaben II, III, IV, V) steht nach Abgabe des bearbeiteten ersten Prüfungsteils der verbleibende Rest der Arbeitszeit zur Verfügung.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner, Formelblatt, Rechtschreiblexikon.

2 Aufgabenauswahl

Die Prüfungsleitung

- erhält **fünf** Aufgaben (**I, II, III, IV, V).**
  Aufgabe I ist von allen Prüflingen verbindlich zu bearbeiten.
- wählt unter Beteiligung der ersten Fachprüferin bzw. des ersten Fachprüfers aus den Aufgaben **II bis V** weitere **drei** Aufgaben aus.

Der Prüfling

- erhält zunächst **Aufgabe I** zur Bearbeitung ohne Taschenrechnerunterstützung. Diese Aufgabe ist auf den Aufgabenblättern zu bearbeiten.
- erhält bei Abgabe der bearbeiteten Aufgabe I die **drei von der Prüfungsleitung ausgewählten Aufgaben** zur Bearbeitung sowie seinen Taschenrechner. Diese Aufgaben sind auf Extrablättern zu bearbeiten.
- ist verpflichtet, jeweils die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.).

3 Korrekturverfahren

Die **Erstkorrektur** erfolgt durch die Fachlehrkraft der jeweiligen Klasse /des jeweiligen Kurses entsprechend der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsarbeiten in den Hauptschul- und Realschulabschlussprüfungen“ sowie dem „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

- Die Erstkorrektur erfolgt in **roter** Farbe.
- Auf der Arbeit werden in Form von Randbemerkungen Korrekturzeichen angebracht. Kennzeichnungen und Anmerkungen, die die Vorzüge und Mängel der Aufgabenlösung verdeutlichen, zählen zu den Korrekturen.
- Bewertung und Benotung erfolgen auf einem gesonderten Blatt (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Noten werden kurs- bzw. klassenweise in Listen eingetragen.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Die **Zweitkorrektur** erfolgt durch eine Lehrkraft der gleichen Schule. Der Zweitkorrektor erhält die Prüfungsarbeiten mit den Randbemerkungen der Erstkorrektur sowie den zu den Aufgaben zugehörigen Lösungsvorschlägen, Erwartungshorizonten und Bewertungsschemata. Der Zweitkorrektor kennt lediglich die Korrekturen des Erstkorrektors, nicht jedoch dessen Bewertung und Benotung.

- Die Zweitkorrektur erfolgt in **grüner** Farbe.
- Auf der Arbeit werden in Form von Randbemerkungen Korrekturzeichen angebracht, soweit der Zweitkorrektor von der Erstkorrektur abweichende Korrekturen für nötig hält. Hält der Zweitkorrektor eine Erstkorrektur für unrichtig oder unangemessen, klammert er diese ein. Kennzeichnungen und Anmerkungen, die die Vorzüge und Mängel der Aufgabenlösung verdeutlichen, zählen zu den Korrekturen.
- Bewertung und Benotung erfolgen auf einem gesonderten Blatt (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Noten werden in kurs- bzw. klassenweise in Listen eingetragen.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

4 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

Bewertung:

Die erreichbare Prüfungsleistung beträgt 100 Bewertungseinheiten (BWE), 34 BWE aus der Pflichtaufgabe I sowie jeweils 22 BWE aus drei der Aufgaben II, III, IV, V. Es werden nur ganzzahlige BWE vergeben. Bei der Festlegung der Prüfungsnote gilt die folgende Tabelle.

Bewertungseinheiten	Note
≥ 95	1+
≥ 90	1
≥ 85	1–
≥ 80	2+
≥ 75	2
≥ 70	2–
≥ 65	3+
≥ 60	3

Bewertungseinheiten	Note
≥ 55	3–
≥ 50	4+
≥ 45	4
≥ 40	4–
≥ 33	5+
≥ 26	5
≥ 19	5–
< 19	6

Bewertungskriterien für die Noten „gut“ und „ausreichend“

Die Note 2 („gut“) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Die Note 4 („ausreichend“) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit ist die Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße um bis zu einer Note herabzusetzen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Realschulabschlussprüfung an Gymnasien 2006 **Erstkorrektor**

Fach: Mathematik

Aufgaben-nummer ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)					BWE pro Aufgabe ↓
I	Von 34 BWE wurden erreicht ➔					
II	a)	b)	c)	d)		
III	a)	b)	c)	d)		
IV	a)	b)	c)	d)		
V	a)	b)	c)	d)	e)	
					Summe der BWE ➔	

Bewertungstext

Note ➔

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

Realschulabschlussprüfung an Gymnasien 2006 **Zweitkorrektor**

Fach: Mathematik

Aufgaben-nummer ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)					BWE pro Aufgabe ↓
I	Von 34 BWE wurden erreicht ➔					
II	a)	b)	c)	d)		
III	a)	b)	c)	d)		
IV	a)	b)	c)	d)		
V	a)	b)	c)	d)	e)	
					Summe der BWE ➔	

Bewertungstext

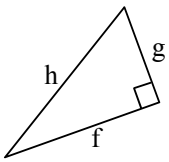
Note ➔

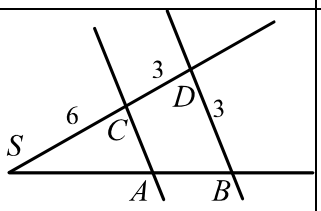
Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

Aufgabe I – verbindlich – ohne Taschenrechner zu bearbeiten

Name: _____ **Klasse:** _____

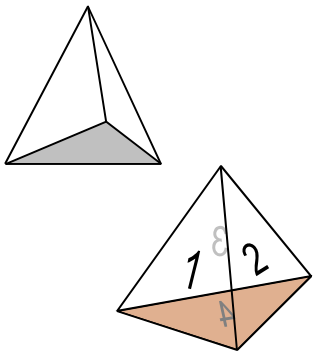
1. Notiere jeweils den Buchstaben der korrekten Lösung in der letzten Spalte: (15 Punkte)

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
a)	$0{,}0006 \cdot 500 =$	30	3	0,3	0,03	
b)	285 min =	2:85 h	4:45 h	4:75 h	5:25 h	
c)	$\frac{5}{8}$ m =	6,25 cm	62,5 cm	87,2 cm	125 cm	
d)	$\frac{3}{5} =$	6 %	16 %	40 %	60 %	
e)	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} =$	1,74	4	8	32	
f)	$(4x-5)\cdot(4+5x)$	$16 - 25x^2$	$16x^2 - 25$	$20x^2 - 41x - 20$	$20x^2 - 9x - 20$	
g)	Ein Sektor, der 40 % einer Kreisfläche einnimmt, ist gefärbt. Wie groß ist der Innenwinkel α der gefärbten Fläche?	40°	72°	144°	216°	
h)	Es sei $2^n = \frac{1}{32}$. Dann gilt:	$n = -5$	$n = -4$	$n = \frac{1}{5}$	$n = 5$	
i)	Um welchen Faktor ändert sich der Umfang eines Kreises, wenn man den Durchmesser verdreifacht?	2	3	6	9	
j)	 Welche Gleichung ist gültig?	$g^2 + h^2 = f^2$	$f = \sqrt{g^2 - h^2}$	$f^2 - g^2 = h^2$	$g = \sqrt{h^2 - f^2}$	

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
k)	„Bilde die Summe aus einer Zahl und deren Kehrwert, wobei du den Kehrwert zuvor mit 5 multiplizierst, und dividiere das Ergebnis durch 3.“ Zu welchem der angegebenen Terme passt obiger Text?	$\left(x+\frac{5}{x}\right):3$	$5\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right):3$	$x+5\cdot\frac{3}{x}$	$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot 5$	
l)	76,23 Milliarden km =	$7{,}623\cdot 10^{8}\,km$	$7{,}623\cdot 10^{10}\,km$	$7{,}623\cdot 10^{10}\,m$	$7{,}623\cdot 10^{13}\,km$	
m)	Ein MP3-Player kostet nach einer Preiserhöhung um 20 % 84 €. Was kostete er vorher?	67,20 €	70 €	74,20 €	64 €	
n)	Die fünf Jungen einer Basketball-Mannschaft wollen sich nebeneinander zum Foto aufstellen. Wie viele mögliche Anordnungen gibt es?	10	60	120	240	
o)	 Die Geraden AC und BD sind parallel, und $\lvert SC\rvert=6$, $\lvert CD\rvert=3$, $\lvert BD\rvert=3$. Welche Längenangabe für die Strecke $\overline{AC}$ ist richtig?	$\lvert AC\rvert = 0{,}3$	$\lvert AC\rvert = 6$	$\lvert AC\rvert = 3$	$\lvert AC\rvert = 2$	

2. Wahrscheinlichkeit (6 Punkte)

Auf den vier Flächen eines regelmäßigen Tetraeders werden die Zahlen 1 bis 4 notiert. Das Ergebnis eines Wurfes ist die Zahl auf der Seite, auf der das Tetraeder liegen bleibt (in der nebenstehenden Abbildung ist das die 4).



Ein Versuch besteht darin, das Tetraeder zweimal zu werfen. Das Ergebnis (1 | 3) zum Beispiel bedeutet also: „erster Wurf 1“, „zweiter Wurf 3“.

a) Berechne die Anzahl aller dabei möglichen Wurfergebnisse.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme der beiden Würfe 5 oder 6 beträgt.

3. Graphen zuordnen (6 Punkte)

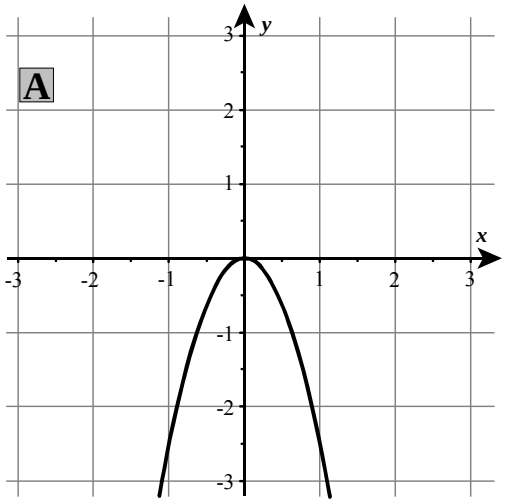
Wähle zu jedem auf der nachfolgenden Seite skizzierten Funktionsgraphen den zugehörigen Funktionsterm aus.

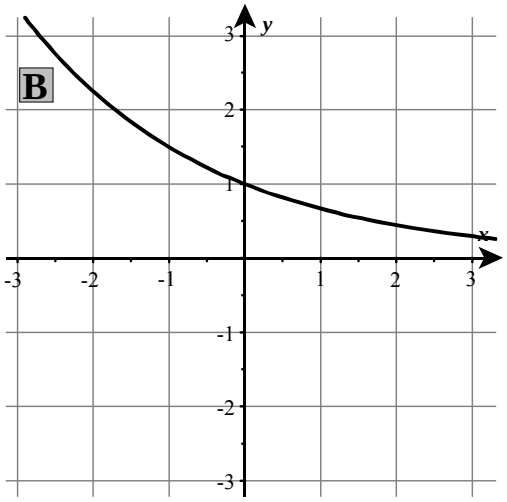
Trage dazu den Buchstaben des Graphen unter den zugehörigen Term in die Liste ein (es müssen also noch Felder frei bleiben).

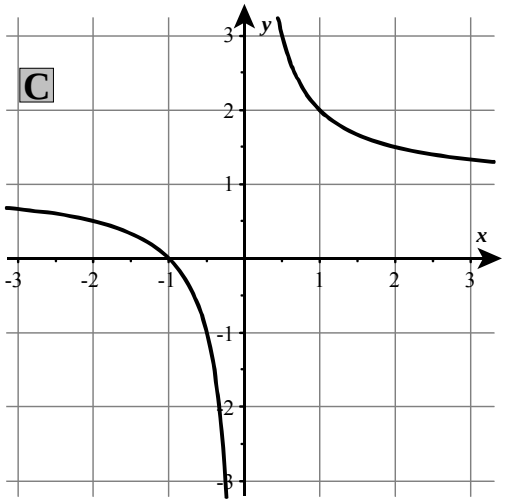
Funktionsterm	$\sin x$	$\sin 3x$	$-\frac{2}{5}x^2$	$-\frac{5}{2}x^2$	$-(x+1)^2$	$-x^2+2$
Zugeh. Graph						

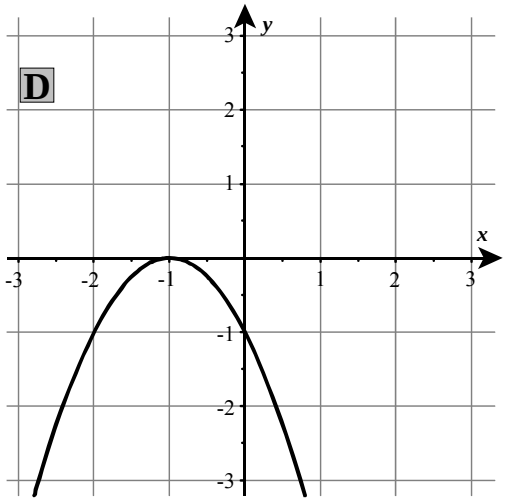
Funktionsterm	$-\frac{3}{2}\cdot x+1$	$-\frac{2}{3}\cdot x+1$	$\frac{1}{x}+1$	$-\frac{1}{x+2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^x$	$\left(\frac{3}{2}\right)^x$
Zugeh. Graph						

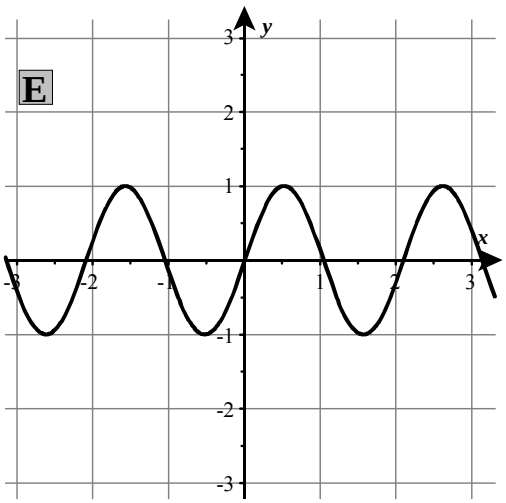
Zu Teilaufgabe 3 (Graphen zuordnen)

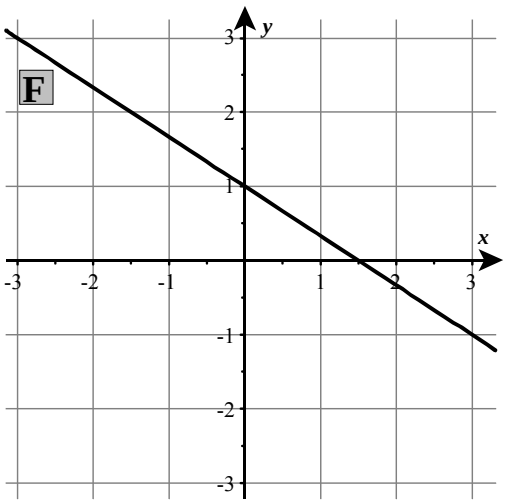












4. Gleichungen (4 Punkte)

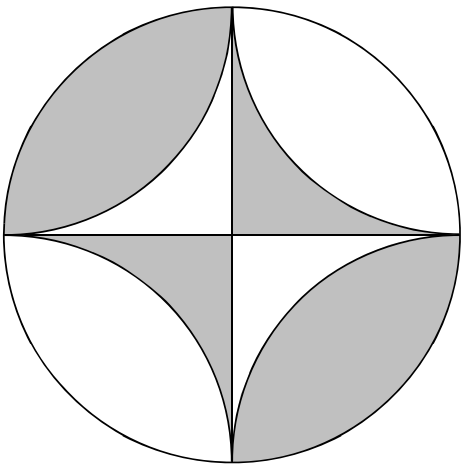
Bestimme die Lösungen (Lösungsmengen) folgender Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $24x \cdot (x+3) \cdot (3x-9) \cdot (x+1{,}72) = 0$

b) $x - 4 = \frac{12}{x}$

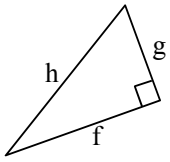
5. Flächen (3 Punkte)

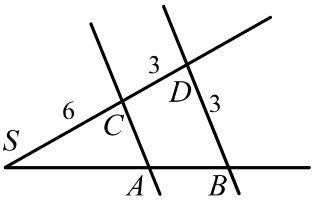
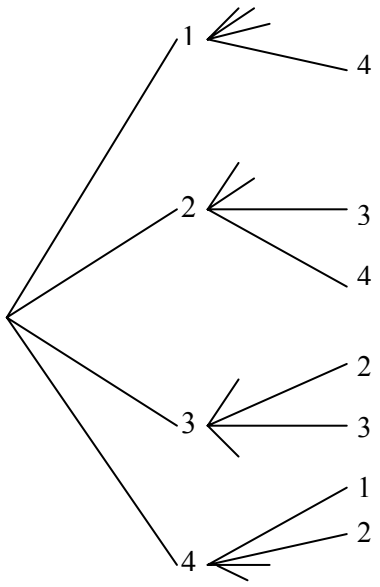
Der Kreis hat einen Radius von 3 cm und ist in vier gleichgroße Sektoren unterteilt. In jedem der Sektoren ist noch ein Viertel eines Kreisbogens (Kreisradius ebenfalls 3 cm) eingezeichnet.
Gib einen Term für den Gesamtflächeninhalt der grau unterlegten Flächen an.



Hinweis: Das Ergebnis kann mit minimalem Rechenaufwand bestimmt werden.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
			I	II	III
1.	a) $0{,}0006 \cdot 500 =$	**C**	1		
	b) 285 min =	**B**	1		
	c) $\frac{5}{8}$ m =	**B**	1		
	d) $\frac{3}{5} =$	**D**	1		
	e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} =$	**C**	1		
	f) $(4x-5)\cdot(4+5x)$	**D**		1	
	g) Ein Sektor, der 40 % einer Kreisfläche einnimmt, ist gefärbt. Wie groß ist der Innenwinkel α der gefärbten Fläche?	**C**		1	
	h) Es sei $2^n = \frac{1}{32}$. Dann gilt:	**A**	1		
	i) Um welchen Faktor ändert sich der Umfang eines Kreises, wenn man den Durchmesser verdreifacht?	**B**	1		
	j)  Welche Gleichung ist gültig?	**D**		1	
	k) „Bilde die Summe aus einer Zahl und deren Kehrwert, wobei du den Kehrwert zuvor mit 5 multiplizierst, und dividiere das Ergebnis durch 3.“ Zu welchem der angegebenen Terme passt obiger Text?	**A**		1	
	l) 76,23 Milliarden km =	**B**		1	
	m) Ein MP3-Player kostet nach einer Preiserhöhung um 20 % 84 €. Was kostete er vorher?	**B**	1		
	n) Die fünf Jungen einer Basketball-Mannschaft wollen sich nebeneinander zum Foto aufstellen. Wie viele mögliche Anordnungen gibt es?	**C**		1	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	o)  Die Geraden AC und BD sind parallel, und $\lvert SC\rvert=6$, $\lvert CD\rvert=3$, $\lvert BD\rvert=3$. Welche Längenangabe für die Strecke $\overline{AC}$ ist richtig? **D**		1	
2.	a) Es gibt $4 \cdot 4 = 16$ Möglichkeiten.		2	
	b) <u>1. Lösungsweg</u>: Es werden alle günstigen Ergebnisse aufgeschrieben. Summe 5: (1;4), (2;3), (3;2), (4;1) Summe 6: (2;4), (3;3), (4;2). Insgesamt sind also 7 von 16 günstig, die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt daher $\frac{7}{16}$. <u>2. Lösungsweg</u>: Es wird ein Baum gezeichnet: *Es sind nur die günstigen Wege dargestellt. An den Pfaden wurden keine Wahrscheinlichkeiten notiert, da sie stets $\frac{1}{4}$ betragen.* $P\left(Augenzahl\ "5"\ oder\ "6"\right) = 7 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$.  *Hinweis: Streng genommen müsste auf die Gleichverteilung der 16 genannten Ergebnisse hingewiesen werden, die aber den Schülerinnen und Schülern in diesem Zusammenhang als selbstverständlich erscheinen mag.*			4

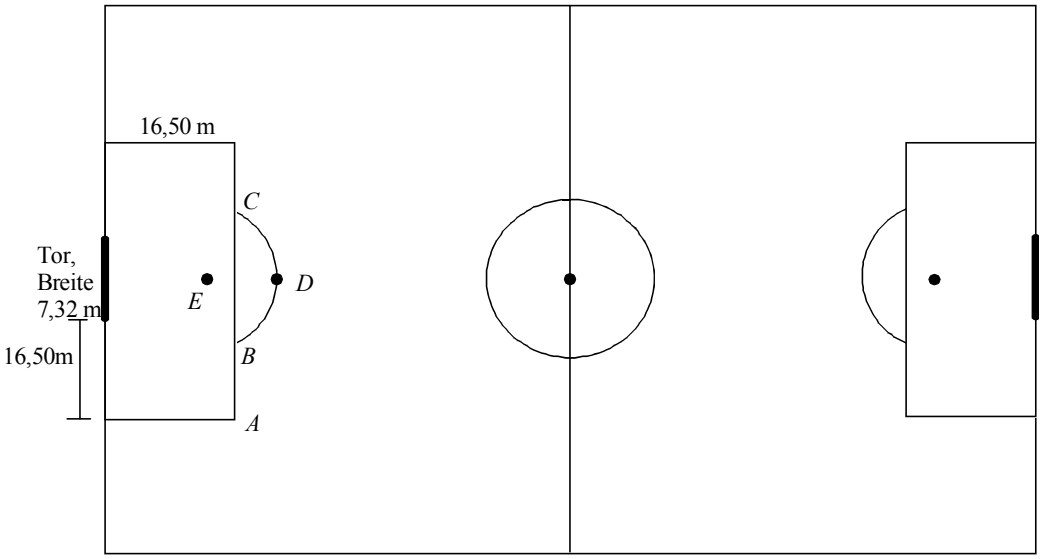
<table>
<tr><th></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.</td><td>
<table>
<tr><td>Term</td><td>$\sin x$</td><td>$\sin 3x$</td><td>$-\frac{2}{5}x^2$</td><td>$-\frac{5}{2}x^2$</td><td>$-(x+1)^2$</td><td>$-x^2+2$</td></tr>
<tr><td>Graph</td><td></td><td>E</td><td></td><td>A</td><td>D</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Term</td><td>$-\frac{3}{2}\cdot x+1$</td><td>$-\frac{2}{3}\cdot x+1$</td><td>$\frac{1}{x}+1$</td><td>$-\frac{1}{x+2}$</td><td>$\left(\frac{2}{3}\right)^x$</td><td>$\left(\frac{3}{2}\right)^x$</td></tr>
<tr><td>Graph</td><td></td><td>F</td><td>C</td><td></td><td>B</td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4.</td><td>a) $24x\cdot(x+3)\cdot(3x-9)\cdot(x+1{,}72)=0$.
Die Lösungen sind $x_1=0,\ x_2=-3,\ x_3=3$ und $x_4=-1{,}72$ oder
$L=\{0\,;-3\,;3\,;-1{,}72\}$.
(Ein Fehler: 1 Punkt, ab zwei Fehler: 0 Punkte)</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b) $x-4=\frac{12}{x}$
Für $x\neq 0$ ist die Gleichung äquivalent zu
$x^2-4x-12=0$
$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+12}$
$x_1=2+4=6$
$x_2=2-4=-2$
Die Lösungen sind $x_1=6$ und $x_2=-2$ oder $L=\{6\,,-2\}$.</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Die grauen Teilflächen ergänzen sich entweder
• zu zwei Viertelkreisen bzw.
• zu einem Halbkreis.
Die graue Fläche hat damit einen Flächeninhalt von 4,5 π cm^2 (etwa 14 cm^2).
In der Angabe des Flächeninhalts kann π stehen bleiben.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 34 BWE</td><td>11</td><td>17</td><td>6</td></tr>
</table>

Aufgabe II – Idee des Messens

Fußballfeld

a) Die Maße eines Fußballfeldes müssen nicht überall gleich sein. Die Regel besagt lediglich:
„Für internationale Spiele soll die Länge mindestens 100 m und höchstens 110 m betragen. Die Breite soll mindestens 64 m und höchstens 75 m betragen.“
Berechne, um wie viel Prozent die maximal mögliche Spielfeldfläche größer ist als die kleinstmögliche Fläche.

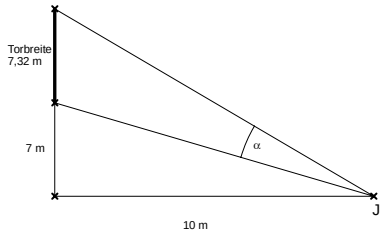
b) Die jeweiligen Abmessungen der Torbreite und des Strafraumes sind der Skizze zu entnehmen.
Eine weitere Regel besagt:
„In jedem Strafraum, 11 m vom Mittelpunkt der Torlinie zwischen den Pfosten und gleich weit von beiden Pfosten entfernt, ist der Elfmeterpunkt E. Von jedem Elfmeterpunkt aus ist ein Teilkreis mit 9,15 m Radius außerhalb des Strafraumes zu ziehen.“
Der Grund für diese Markierung besteht darin, dass beim Strafstoß (Elfmeter) alle Spieler (außer dem Schützen und dem Torwart) außerhalb des Strafraums und mindestens 9,15 m vom Ball entfernt sein müssen. (Diese Verhältnisse sind – nicht maßstabstreu – in der folgenden Skizze dargestellt.)



Zur Markierung des Teilkreises ist es für den Platzwart nützlich, die Länge der Strecke $\overline{AB}$ (von der Strafraumkante bis zum Schnittpunkt mit dem Kreis) zu kennen.
Bestimme dazu zuerst die Länge der Strecke $\overline{BC}$ (*zur Kontrolle* $|BC| = 14{,}62$ m).
Berechne anschließend die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

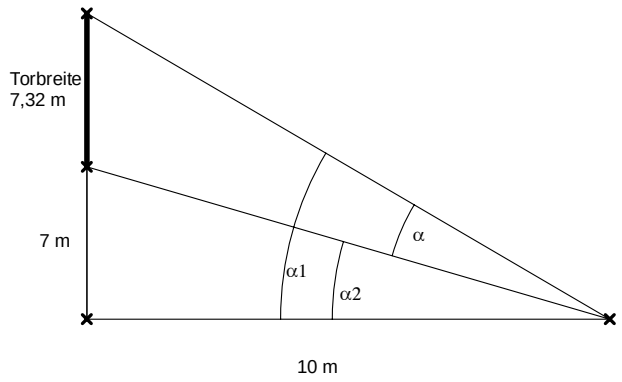
c) Für abprallende Bälle nach einem Strafstoß (Elfmeter) ist es für die übrigen Spieler wichtig, möglichst dicht am Tor zu stehen.
Entscheide, ob es vom Punkt *B* oder am Punkt *D*, dem Mittelpunkt des Kreisbogens (siehe Skizze), dichter zum Mittelpunkt der Torlinie ist.

d) Der Stürmer Jürgen befindet sich im Punkt *J* (siehe Skizze) und schießt auf das leere Tor. Trotzdem schießt er daneben. Zur Beurteilung der Situation soll im Nachhinein der Schusswinkel α – bezogen auf die Torbreite – berechnet werden. Bestimme den Schusswinkel α.



Erwartungshorizont

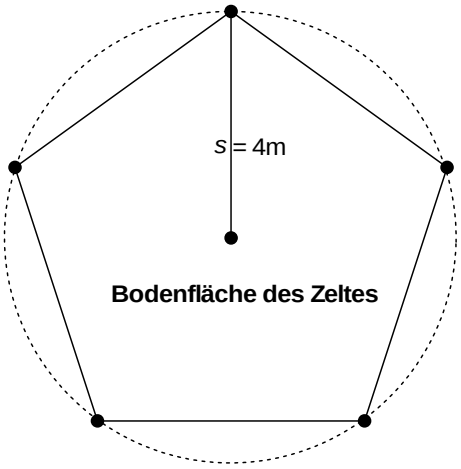
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Kleinstmögliche Fläche: $100 \cdot 64\,\text{m}^2 = 6\,400\,\text{m}^2$ Größtmögliche Fläche: $110 \cdot 75\,\text{m}^2 = 8\,250\,\text{m}^2$ $\frac{8250}{6400} = 1{,}2890625$. Die größtmögliche Fläche ist um ca. 29 % größer als die kleinstmögliche Fläche.	4		
b)	• Länge der Strecke $\overline{BC}$: Der Abstand des Elfmeterpunkts *E* zur zum Tor parallelen Strafraumgrenze beträgt: $16{,}50\text{ m} - 11\text{ m} = 5{,}50\text{ m}$. Der Elfmeterpunkt *E*, der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und der Punkt *B* (oder auch *C*) bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $\left(\frac{\lvert BC\rvert}{2}\right)^2 + 5{,}50^2 = 9{,}15^2$ $\lvert BC\rvert = 2 \cdot \sqrt{9{,}15^2 - 5{,}50^2}$ $\lvert BC\rvert = 14{,}6249...$ Die Länge der Teilstrecke $\overline{BC}$ beträgt ca. 14,62 m. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ist die Hälfte der Differenz aus Strafraumbreite und der berechneten Länge von $\overline{BC}$. Also gilt für die Länge der Strecke $\overline{AB}$: $\lvert AB\rvert = \frac{(2 \cdot 16{,}5 + 7{,}32) - 14{,}62}{2} = 12{,}85$. Die Länge von der Strafraumecke *A* zum Beginn des Kreissektors *B* beträgt ungefähr 12,9 m.	2	7	
c)	*M* sei der Mittelpunkt der Torlinie. Für die Strecke $\overline{MD}$ gilt: $\lvert MD\rvert = 11 + 9{,}15 = 20{,}15$. Die Strecke vom Mittelpunkt der Torlinie *M* zum Punkt *D* ist 20,15 m lang. Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die Länge der Strecke $\overline{MB}$: $\lvert MB\rvert^2 = \left(\frac{14{,}62}{2}\right)^2 + 16{,}5^2$. Also folgt: $\lvert MB\rvert = \sqrt{\left(\frac{14{,}62}{2}\right)^2 + 16{,}5^2} \approx 18{,}05$. Die Strecke $\overline{MB}$ ist kürzer als die Strecke $\overline{MD}$. Es ist deshalb günstiger, beim Strafstoß am Punkt *B* zu stehen.		5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hinweis: Hier ist auch eine Argumentation über Kreisbögen möglich. Der Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ (bezogen auf den Kreis mit dem Mittelpunkt M) ist flacher als der Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ (bezogen auf den Kreis mit dem Mittelpunkt E).			
d)	 Der Winkel α ergibt sich als Differenz der Winkel α_1 und α_2. Mit Hilfe der Umkehrung des Tangens erhält man $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ $= \arctan\left(\frac{7{,}32+7}{10}\right) - \arctan\left(\frac{7}{10}\right)$ $\approx 20{,}08°$ Der Schusswinkel beträgt etwa 20°.			4
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

Aufgabe III – Idee Raum und Form

Pfadfinderzelt

Eine einfache Art, ein Zelt zu konstruieren, besteht darin, gleichlange Stangen in den Eckpunkten eines Vielecks auf dem Boden aufzustellen und sie genau über der Mitte in einer Dachspitze zusammenzubinden. Anschließend wird das „Gerüst“ mit Zeltbahnen bespannt. Der Fußboden bleibt „Natur“.



Wir betrachten als Grundfläche ein <u>regelmäßiges Fünfeck</u>. Die 5 Stangen haben eine Länge von 6,20 m, werden aber 20 cm vor ihrem Ende zusammengebunden. Der Durchmesser der Stangen wird hier vernachlässigt.
Der Abstand s der Fußpunkte der Stangen zum Bodenmittelpunkt betrage 4 m.

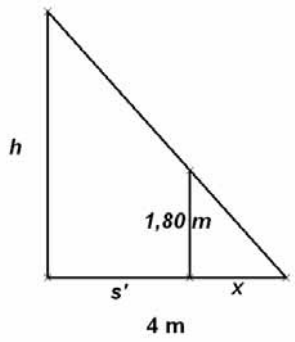
a) Berechne die Höhe des Zeltes.
(Abstand vom Boden bis zum Kreuzungspunkt der Stangen. Zur Kontrolle: $h \approx 4{,}47$ m).

b) Begründe, dass der Flächeninhalt des Zeltbodens in guter Näherung 38 m^2 beträgt. Begründe allgemein, dass man bei <u>variabler Länge s</u> den Flächeninhalt des Zeltbodens $A(s)$ mit folgender Formel berechnen kann: $A(s) = 5 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36° \cdot s^2$.
<u>Hinweis:</u> Der fünfeckige Zeltboden setzt sich aus fünf kongruenten Dreiecken zusammen.

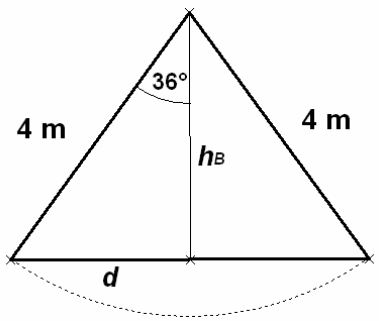
c) Bestimme den „umbauten Raum“, d.h. das Volumen des Zeltes.

d) Ein Punkt auf dem Zeltboden habe „Stehhöhe“, wenn der senkrechte Abstand zum Zeltdach mindestens 1,80 m beträgt. Bestimme den Flächeninhalt der Bodenfläche mit Stehhöhe.

Hinweis:
Vgl. die nebenstehende Skizze. Berechne x und s’.



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der 6 m lange Teil einer Zeltstange, die 4 m lange Strecke s vom Fußpunkt dieser Stange zum Zeltmittelpunkt und die Zelthöhe bilden ein rechtwinkliges Dreieck, auf das man den Satz des Pythagoras anwenden kann: $h(s) = \sqrt{36-16} = 4{,}472... \approx 4{,}47$. Die Höhe des Zeltes beträgt 4,47 m.	5		
b)	Der Zeltboden besteht aus 5 gleichschenkligen Dreiecken jeweils mit dem Winkel 72° $\left(=\frac{360°}{5}\right)$ an der Spitze. Für die halbe Basislänge d gilt: $\sin 36° = \frac{d}{4}$ und damit $d = 4 \cdot \sin 36°$. Für die Höhe h_B gilt: $\cos 36° = \frac{h_B}{4}$ und damit $h_B = 4 \cdot \cos 36°$. Für die Fläche eines solchen Dreiecks gilt also: $A_{\triangle} = 2 \cdot \frac{d \cdot h}{2} = d \cdot h = 4 \cdot \sin 36° \cdot 4 \cdot \cos 36°$.  Für die Bodenfläche gilt damit: $A = 5 \cdot 4 \cdot \sin 36° \cdot 4 \cdot \cos 36°$ $A = 38{,}042...$ Insgesamt hat die Bodenfläche also einen Flächeninhalt von etwa 38 m^2. Ersetzt man in obigen Rechnungen die 4 m durch die Variable s, erhält man die Formel für die Bodenfläche: $A(s) = 5 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36° \cdot s^2$.	2	6	
c)	Das Zelt ist – mathematisch gesehen – eine Pyramide (mit fünfeckiger Grundfläche). Für das Volumen einer Pyramide gilt die Formel: $Volumen = \frac{Grundfläche \cdot Höhe}{3}$. Mit den Ergebnissen aus a) und b) erhält man: $W = \frac{5 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36° \cdot 16 \cdot \sqrt{36-16}}{3} = 56{,}710... \approx 56{,}71$. Das Zelt hat ein Volumen von ca. 56,71 m^3.		4	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Die Stehhöhenfläche am Boden ist kongruent zu der Fläche, die entstehen würde, wenn man in 1,80 m Höhe ein „Dach“ einziehen würde. Die Stehhöhenfläche ist also auch ein regelmäßiges Fünfeck mit einem „Radius“ (Eckenabstand zum Mittelpunkt) *s*’, den man mit Hilfe eines Strahlensatzes berechnen kann (vgl. Skizze neben der Aufgabenstellung): $\frac{x}{4} = \frac{1{,}8}{h}$ $x = \frac{7{,}2}{h}$. Außerdem gilt: $s' = 4 - x = 4 - \frac{7{,}2}{h}$. h kennen wir aus a) *:* $h = \sqrt{36-16} = \sqrt{20}$ und damit $s' = 4 - \frac{7{,}2 \cdot \sqrt{20}}{20} = 4 - 0{,}36 \cdot \sqrt{20} = 2{,}39...$. Nach der allgemeinen Formel aus b) können wir nun den zur Strecke *s’* gehörende Flächeninhalt des Fünfecks ausrechnen: $A(s') = 5 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36° \cdot s'^2 = 13{,}5816... \approx 13{,}58$. Das Zelt hat ca. 13,58 m^2 Bodenfläche mit Stehhöhe.			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

Aufgabe IV – Idee des funktionalen Zusammenhangs

Lastkahn

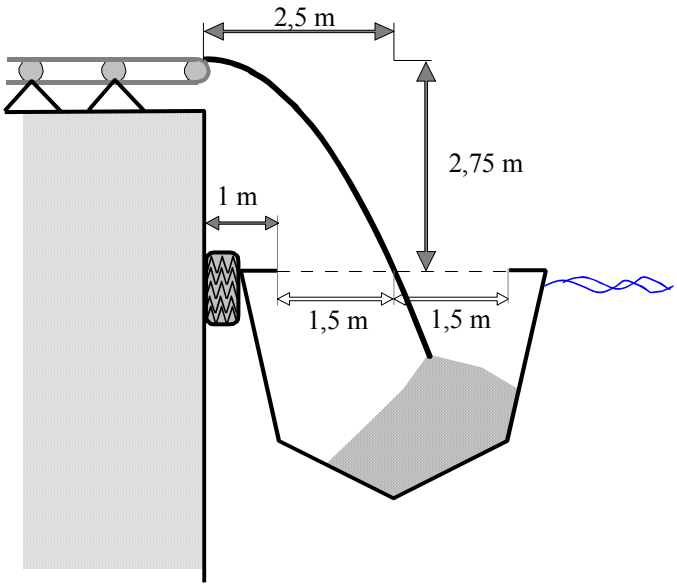
Über ein Förderband wird ein kleiner Lastkahn mit Kies beladen. Das Förderband ist so eingestellt, dass der Sandstrahl genau durch die Mitte der 3 m breiten Öffnung in den Laderaum fällt.

a) Der Kiesstrahl hat Parabelform.

Die Parabel soll in das Koordinatensystem der Anlage übertragen werden. Dabei liegt das Ende des Förderbandes (und damit der Scheitelpunkt der Parabel) im Ursprung, die Kaimauer endet an der y-Achse.
Zeichne zuerst zwei durch die Abbildung rechts gegebene Punkte der Parabel in das Koordinatensystem ein und gib die entsprechenden Punkte an.

Bestimme nun mithilfe der eben gezeichneten Punkte die Funktionsgleichung der Parabel.
Solltest du keine Funktionsgleichung finden, arbeite mit der folgenden (nicht mit der korrekten Funktionsgleichung übereinstimmenden) Gleichung weiter:
$f(x) = -0,47 \cdot x^2$.

Fülle die Wertetabelle auf dem anliegenden Arbeitsblatt aus und skizziere mit ihrer Hilfe die Parabel im Koordinatensystem.



b) Berechne den Abstand vom Ende des Förderbandes zum Mittelpunkt der Öffnung im Laderaum.

Bei der oben geschilderten Situation war Hochwasser. Einige Zeit später soll ein anderer Lastkahn mit gleichen Abmessungen beladen werden. Wegen extremen Niedrigwassers ist der Wasserspiegel um 4 m niedriger.

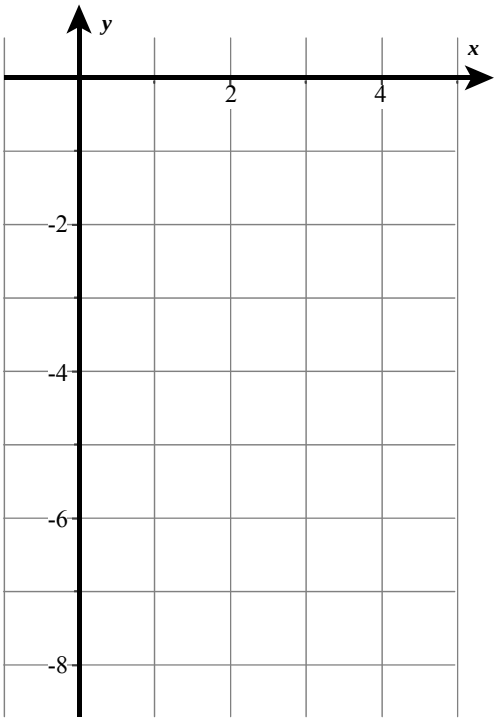
c) Begründe, dass der Kiesstrahl die Laderaumöffnung auch in dieser Tiefe trifft.

d) Bestimme, um wie viel Meter das Förderband verschoben werden müsste, damit der Kies wieder genau durch die Mitte der Laderaumöffnung fällt, und bestimme die Funktionsgleichung der entsprechend abgeänderten Parabel, die nun den Kiesstrahl beschreibt.

Interpretiere die Lösung innerhalb der durch obiges Bild dargestellten Gegebenheiten. Beachte dabei zusätzlich, dass das obere Transportband, auf dem der Kies transportiert wird, in 75 cm Abstand zum Boden verläuft. Das Förderband ist horizontal beweglich.

Anlage zur Aufgabe „Lastkahn“

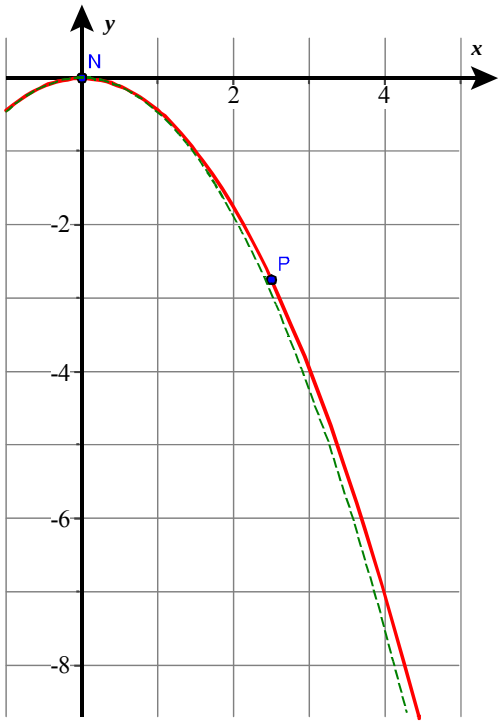
1 LE $\hat{=}$ 1 m



Wertetabelle

x	$f(x)$
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
3	
4	

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	 Einzutragende Punkte: $N(0\|0)$: Nullpunkt: Spitze des Förderbandes. $P(2{,}5\|-2{,}75)$: Mittelpunkt der Laderaumöffnung Funktionsgleichung: $f(x) = ax^2$, mit $f(2{,}5) = a \cdot 2{,}5^2 = -2{,}75$ $\Rightarrow a = -\frac{11}{25} = -0{,}44$ Also ergibt sich: $f(x) = -0{,}44 \cdot x^2$ Wertetabelle für *f*: (0,5|–0,11) (1|–0,44) (1,5|–0,99) (2|–1,76) (3|–3,96) (4|–7,04) Sei *g* die Ersatzfunktion mit $g(x) = -0{,}47 \cdot x^2$ (Graph gestrichelt) (0,5|–0,12) (1|–0,47) (1,5|–1,06) (2|–1,88) (3|–4,23) (4|–7,52)	5	4	
b)	Nach dem Satz des Pythagoras gilt für den Abstand *d:* $d = \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}75^2} = \sqrt{13{,}8125} \approx 3{,}72$ Der Abstand beträgt etwa 3,7 m.		2	
c)	Der Abstand der Oberkante des Lastkahns zum Förderband beträgt jetzt 2,75 m + 4 m = 6,75 m. Die Öffnung des Laderaums beginnt wegen des linken Abstandes von 1 m also bei der *x*-Koordinate 1 und endet bei 1 + 3 = 4. Lösungsweg 1: *x*-Koordinate des Strahls in 6,75m Tiefe: $-6{,}75 = -0{,}44\,x^2 \Rightarrow x^2 \approx 15{,}34$. Da *x* im betrachteten Ausschnitt ≥ 0 ist, folgt $x \approx 3{,}92$. Es klappt also eben noch. Mit der Ersatzfunktion ergibt sich analog $x \approx 3{,}79$. Hier ist der Strahl nicht ganz so nah am Rand. Lösungsweg 2: „Tiefe“ des Strahls bei $x = 4{,}0$ *(rechter Rand der Laderaumöffnung)*: $f(4{,}0) \approx -7.04 \Rightarrow$ Das Schiff könnte sogar noch etwas tiefer liegen $g(4{,}0) \approx -7{,}52 \Rightarrow$ Das Schiff könnte hier ebenso tiefer liegen.		6	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	<u>Verschiebung des Förderbandes und Ermittlung der zugehörigen Funktionsgleichung</u>: Wurde in c) Lösungsweg 1 verwendet, so ist die tatsächliche x-Koordinate des Kiesstrahls in 6,75 m Tiefe berechnet. Die Differenz zur gewünschten x-Koordinate 2,5 ist dann die Verschiebung: 3,9 – 2,5 = 1,4. Das Förderband muss also um etwa 1,4 m nach links verschoben werden, damit der Strahl wieder durch die Mitte der Laderaumöffnung hinein fällt. Die gesuchte, geänderte Parabelgleichung lautet: $h(x) = -0{,}44\,(x + 1{,}4)^2$ Wurde in c) ein andere Lösungsweg beschritten, kann man die Funktionsgleichung und damit die Verschiebung auch über den Ansatz $h(x) = -0{,}44\,(x + b)^2$ und $h(2{,}5) = -6{,}75$ bestimmen: $15{,}34 = (2{,}5 + b)^2 \Rightarrow 3{,}92 \approx 2{,}5 + b$ (da $b > 0$ sein muss). Es folgt $b \approx 1{,}4$. Mit der Ersatzfunktion ergibt sich analog $h_2(x) = -0{,}47\,(x + 1{,}3)^2$. <u>Interpretation:</u> Die Oberseite des Förderbandes verläuft in 75 cm Höhe über dem Boden. Der Boden hat also die y-Koordinate –0,75. Doch $h(0) \approx -0{,}86$, wenn man um 1,4 m verschiebt bzw. $h(0) \approx -0{,}88$, wenn man um den genaueren Wert von 1,417 m verschiebt . Das bedeutet, dass an der Kante der Ladestation der Kies auf den Boden fällt statt ins Schiff. Eine derartige Verschiebung ist also nicht sinnvoll. Zu diesem Schluss gelang man auch, wenn man denjenigen x-Wert berechnet, der einer Höhe von –0,75 m entspricht. Der Ansatz $-0{,}75 = -0{,}44 \cdot (x + 1{,}4)^2$ liefert den x-Wert –0,09, d.h. der Kies fällt auf den Boden. Mit $h_2(0) \approx -0{,}79$ kann ebenso argumentiert werden.			5
	Insgesamt 22 BWE	5	12	5

Aufgabe V – Idee der Wahrscheinlichkeit

Spielenachmittag

Björn und Eva verbringen den Nachmittag damit, miteinander zu „würfeln“. Sie verwenden einen normalen Spielwürfel (Laplace-Würfel) mit den Zahlen 1 bis 6.
Jeder darf einmal würfeln. Wer die höhere Augenzahl hat, gewinnt. Bei zwei gleichen Zahlen endet das Spiel unentschieden.
Zunächst wirft Björn als erster.

a)
- Björn hat eine „2“ gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er noch gewinnt.
- Björn hat eine „3“ gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nun Eva gewinnt.

b)
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel unentschieden ausgeht.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Eva eine „2“ würfelt und damit gewinnt.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Björn eine ungerade Zahl würfelt und damit gewinnt.

c) Eva möchte nun unbedingt als erste würfeln. Entscheide, ob ihr dies einen Vorteil bringen würde.

d) Die beiden beschließen eine Abwandlung des Spieles: Björn wirft wieder zuerst und dann Eva. Wenn zwei gleiche Zahlen gewürfelt werden, würfelt Eva solange weiter, bis sie eine andere Zahl als Björn hat.
Begründe sinnvoll (ohne Rechnung), dass das Spiel fair ist.

e) Beide setzen pro Spiel je 10 Cent, und der Gewinner bekommt jeweils den ganzen Einsatz. Nachdem die beiden 50 Runden gespielt haben, ist Eva im Plus: Sie hat einen Überschuss von 40 Cent. Björn beschwert sich: „Das kann doch gar nicht sein!“ Setze dich mit der Behauptung Björns auseinander!

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	• Björn gewinnt genau noch dann, wenn Eva eine "1" würfelt. Also ist $P(\text{"Björn gewinnt"}\mid\text{"Björn wirft eine 2"}) = \frac{1}{6} \approx 17\%$. • Eva gewinnt genau noch dann, wenn sie eine „4", eine „5" oder eine „6" würfelt. Also ist $P(\text{"Eva gewinnt"}\mid\text{"Björn wirft eine 3"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$. *<u>Bemerkung:</u> Diese beiden Punkte kann man – vom fortgeschrittenen Standpunkt aus – als Fragen nach <u>bedingten</u> Wahrscheinlichkeiten auffassen, dies wird der klaren Verständlichkeit wegen hier in der Lösung auch in der Notation zum Ausdruck gebracht. Dennoch ist Kenntnis und Umgang mit dem Begriff und dem Kalkül „bedingte Wahrscheinlichkeit" hier keine Voraussetzung. Durch die Bedingungen werden hier vielmehr die Situationen beschrieben, welche die Schülerinnen und Schüler mit einfachen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bearbeiten können.*	2	2	
b)	• Das Spiel geht genau dann unentschieden aus, wenn insgesamt ein „Pasch" geworfen wird: $P(\text{"Spiel geht unentschieden aus"}) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \approx 17\%$. • Hier muss Björn eine „1" werfen und Eva eine „2". Also P(„Eva würfelt eine „2" und gewinnt damit) $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2{,}8\%$. (Argumentation entweder mit der (stochastischen)Unabhängigkeit der beiden Würfe oder mithilfe eines zweistufigen Wahrscheinlichkeitsbaumes). • Hier verwendet man am besten einen zweistufigen Wahrscheinlichkeitsbaum: Björn hat nur eine Gewinnchance, wenn er eine „3" oder eine „5" würfelt. Damit er tatsächlich gewinnt, muss Eva im ersten Fall eine „1" oder eine „2" werfen und im zweiten Fall eine der vier Zahlen von „1" bis „4". Also gilt: P(„Björn würfelt eine ungerade Zahl und gewinnt damit") $= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2+4}{36} = \frac{1}{6} \approx 17\%$.	4	2	
c)	Die Gewinnregel vergleicht die jeweiligen Augenzahlen, die (stochastisch) <u>unabhängig</u> voneinander geworfen werden. Daher spielt es für die Wahrscheinlichkeiten der der drei möglichen Spielausgänge keine Rolle, wer jeweils beginnt: Björn kann Eva ruhig anfangen lassen.		4	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Da sich beliebig oft hintereinander die Situation „unentschieden“ ergeben könnte, liegt streng genommen ein Zufallsexperiment mit unendlich viele möglichen Ausgängen vor, das auf zwei Ausgänge reduziert werden muss. Durch folgende Argumentation kann man diesem Problem entgehen: Nachdem Björn geworfen hat, endet das Spiel, wenn Eva zum ersten Mal eine der <u>fünf</u> Zahlen wirft, die <u>verschieden</u> von der Zahl des Wurfes von Björn sind. Aus Symmetriegründen sind diese fünf Zahlen gleichberechtigt, treten also mit gleicher Wahrscheinlichkeit als entscheidende letzte Zahl auf. Es wird also der gleiche Effekt erzielt, als wenn im zweiten Zug aus einer Urne mit den fünf vom ersten Wurf verschiedenen Zahlen gezogen würde. Man kann nun entweder so weiter argumentieren, dass alle Wurfpaare mit verschiedenen Werten gleichwahrscheinlich sind, von denen jeweils genau die Hälfte zum Sieg von Björn bzw. Eva führen, oder man geht explizit auf das zugehörige Baumdiagramm ein und betrachtet z.B. alle Wege die zum Sieg von Björn führen: $P(\text{„Björn gewinnt“}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{0}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}=\frac{1}{6}\cdot\frac{15}{5}=\frac{1}{2}$ Das Spiel ist also fair. *<u>Bemerkung:</u> Eine Argumentation in der hier vorgeführten Schärfe wird nicht für die volle Punktzahl erwartet, aber eine halbwegs überzeugende Argumentation sollte schon sichtbar werden.*		2	2
e)	Aus (c) folgt, dass das Spiel jetzt fair ist. Das schließt jedoch nicht aus, dass die relative Häufigkeit - z.B. für einen Sieg von Eva - auch bei einer großen Anzahl von Spielen („Gesetz der großen Zahl“) von 0,5 deutlich abweicht. Eva hatte einfach eine „Glückssträhne“! (Dazu muss sie lediglich viermal mehr gewonnen haben als Björn.).		2	2
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4