Abiturprüfung 2003 Grundkurs **Mathematik** Aufgabe **A 1**

Haupttermin **Abendgymnasien und Kollegs**

Zu jedem $t > 0$ sind die Funktionen f_t und g_t gegeben durch

$$f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2 \quad , \quad g_t(x) = \frac{t}{6}x^2 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Das Schaubild von f_t sei K_t, das Schaubild von g_t sei C_t.

a) Untersuchen Sie K_t auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte.
Skizzieren Sie K_1. (8 VP)

b) In welchen Punkten besitzt K_1 die Steigung $-\frac{9}{2}$?
Zeigen Sie, dass die Gerade g mit $y = -\frac{9}{2}x + \frac{81}{2}$ Tangente an K_1 ist.
Die Gerade g bildet zusammen mit der Wendetangente von K_1 und der x-Achse ein Dreieck.
Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt. (7 VP)

c) Tragen Sie C_1 in die Skizze aus Teilaufgabe a) ein.
Das Schaubild K_t schließt im ersten Feld mit der x-Achse eine Fläche ein.
Das Schaubild C_t zerlegt diese Fläche in zwei Teilflächen.
Zeigen Sie, dass das Verhältnis der Teilflächen von t unabhängig ist. (7 VP)

d) Durch $f(x) = ax^3 + bx^2$; $x \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$ ist eine Funktion f gegeben.
Zeigen Sie: Ist x_N Nullstelle ($x_N \neq 0$), x_E Extremstelle ($x_E \neq 0$) und x_W Wendestelle von f, so ist x_E das arithmetische Mittel von x_N und x_W.
Welche Beziehung muss zwischen a und b bestehen, damit der Wendepunkt des Schaubildes von f auf der ersten Winkelhalbierenden liegt? (8 VP)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5 + \frac{16}{x^2}\ ; \qquad x \neq 0.$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Untersuchen Sie K auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K für $-5 \le x \le 5$.
(Ursprung des Koordinatensystems in Blattmitte) (8 VP)

b) Für $|x| \to \infty$ besitzt die Funktion f eine Näherungsfunktion mit dem Schaubild C.
Geben Sie eine Gleichung von C an und zeichnen Sie C für $-5 \le x \le 5$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.
K und C sowie die Geraden $x = 2$ und $x = t$ $(t > 2)$ begrenzen eine Fläche.
Für welche t wird der Inhalt dieser Fläche größer als 2 ? (7 VP)

c) Für $u > 0$ liegen die Punkte $P(u\,|\,v)$ und $Q(-u\,|\,v)$ auf K und bilden mit dem Punkt $S(0\,|\,-6)$ ein Dreieck.
Bestimmen Sie u so, dass der Inhalt dieses Dreiecks minimal wird. (8 VP)

d) Es gibt zwei Parabeln zweiter Ordnung, die K in jeweils zwei Schnittpunkten mit der x-Achse berühren.
Skizzieren Sie ohne Rechnung die beiden Parabeln.
Bestimmen Sie eine Gleichung einer der beiden Parabeln. (7 VP)

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = 5(1 + e^{-0,4x}) \quad \text{und} \quad g(x) = 5(1 - e^{-0,4x}) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Das Schaubild von f sei K_f. Das Schaubild von g sei K_g.

a) Untersuchen Sie K_f auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte und Asymptoten.
Zeichnen Sie K_f und die Asymptote für $0 \le x \le 6$ in ein Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass gilt: $g(x) = 10 - f(x)$.
Zeichnen Sie K_g in das vorhandene Koordinatensystem ein. (10 VP)

b) Die Tangente an K_g mit der Steigung $\frac{2}{e}$ schließt mit K_g und der y-Achse eine Fläche ein.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. (9 VP)

c) Zwei Wasserbehälter mit unterschiedlichen Temperaturen berühren sich. Dabei geht Energie vom wärmeren Behälter zum kälteren über. Die zeitlichen Verläufe der Temperaturen werden beschrieben durch

$$f^*(t) = 20(1 + e^{-bt}) \quad \text{und} \quad g^*(t) = 20(1 - e^{-bt}); \; t \ge 0, b > 0,$$

wobei t die Zeit in Minuten seit Beobachtungsbeginn und $f^*(t)$ und $g^*(t)$ die Temperaturen in °C angeben.
Welche Temperaturen können in den Behältern beobachtet werden?
5 Minuten nach Beobachtungsbeginn wird in einem Behälter die Temperatur 5 °C gemessen.
Bestimmen Sie b.
Nach welcher Zeit hat sich der anfängliche Temperaturunterschied halbiert? (11 VP)