Abiturprüfung Grundkurs 1999/2000

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern
Sachsen
Sachsen-Anhalt
Thüringen

PAETEC

paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH Berlin

Autoren für die einzelnen Bundesländer:

Margit Liskow (Mecklenburg-Vorpommern)
Dr. Rainer Heinrich (Sachsen)
Birgit Maier (Sachsen-Anhalt)
Siegbert Hülle (Thüringen)

1. Auflage

Internet: www.paetec.de

Redaktion: Dr. Hubert Bossek
Layout: Tilo Grimm, Tino Mai, Dr. Ulf Rothkirch
Umschlaggestaltung: Birgit Kintzel
Druck: Saale-Druck Naumburg GmbH

ISBN 3-89517-276-6

Inhalt

Vorwort

Das vorliegende Heft enthält die Aufgaben, die in den zentralen Abiturprüfungen des Schuljahrs 1999/2000 für Mathematik-Grundkurse in den Bundesländern Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen gestellt wurden.

Die Erwartungsbilder skizzieren in der Regel einen möglichen Lösungsweg, wobei stets auch wesentliche Zwischenschritte Aufnahme fanden, um den Nachvollzug des Gedankengangs zu erleichtern und für den Lernenden die Möglichkeiten zur Selbstkontrolle zu erhöhen. Die angegebenen Bewertungsvorschläge haben empfehlenden Charakter. Einigen Arbeiten vorangestellte *Hinweise* informieren über länderspezifische Modalitäten der Prüfungsdurchführung.

Hinsichtlich der Symbolik und Zeichensetzung wie auch der Beachtung der reformierten Rechtschreibung folgen die Aufgabentexte den Originalfassungen, woraus teilweise Unterschiede zwischen den Vorgehensweisen in den einzelnen Arbeiten resultieren. Aus Platzgründen war es erforderlich, mitunter „fortlaufende“ Gleichungen oder „Schlussketten“ zu verwenden. Das Zeichen „$\Rightarrow$“ wird dabei als Abkürzung für „daraus folgt“, „daraus ergibt sich“ u. Ä. genutzt, also nicht allein zur Kennzeichnung einer Implikation im strengen Sinne.

Der PAETEC Verlag für Bildungsmedien hofft, auch mit dieser Aufgabensammlung den Lehrkräften Anregungen für die Gestaltung eigener Klausur- und Prüfungsarbeiten sowie den Schülerinnen und Schülern Hilfe bei der Vorbereitung auf das Abitur zu geben. Darüber hinaus erlaubt die geschlossene Veröffentlichung der Prüfungsaufgaben aus einem Schuljahr gewiss interessante Vergleiche bezüglich Schwerpunktsetzung, Anforderungsniveau, Aufgabengestaltung usw. in den verschiedenen Bundesländern, woraus wiederum Ansätze für eigenes Nachdenken erwachsen können.

Die Redaktion

Berlin, Oktober 2000

Abiturprüfung
Grundkurs

1999 / 2000

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern

Hinweis:
Die Schüler erhielten zwei Arbeiten, bestehend aus dem übereinstimmenden Pflichtteil P und den Wahlteilen A und B, von denen einer auszuwählen war. Der Pflichtteil war vollständig, von den Wahlaufgaben waren zwei aus dem Teil A oder zwei aus dem Teil B zu bearbeiten.

Aufgabe P1: Analysis

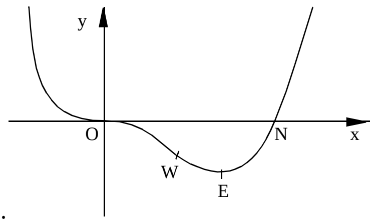
Gegeben sind eine Funktion f und ihre ersten drei Ableitungen durch

$f(x) = \frac{1}{12}x^3(x-4),\ x \in \mathbb{R},$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^2(x-3),$

$f''(x) = x(x-2),$

$f'''(x) = 2(x-1).$



Der zu f gehörige Graph ist G (siehe Skizze).

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f, die Koordinaten des lokalen Minimumpunktes E und die des Wendepunktes W an.
Welche besonderen Eigenschaften hat hier der Koordinatenursprung bezüglich des Graphen G?

1.2 Der Graph G und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie den Inhalt A dieser Fläche.

1.3 Der Flächeninhalt F des Vierecks OWEN ist ein Näherungswert für A.
Um wieviel Prozent weicht F von A ab?

1.4 Weisen Sie nach, dass die Gerade g mit der Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ nicht Tangente an G ist.

Aufgabe P2: Geometrie

Die Punkte A(8| 0| 0), B(0| 6| 0), C(– 4| 3| 4) und D(0| 0| 4) sind Eckpunkte eines Vierecks V.

2.1 Stellen Sie das Viereck V und seine Diagonalen in einem räumlichen Koordinatensystem dar.

2.2 Zeigen Sie: Das Viereck V ist ein Trapez.

2.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Diagonalen des Vierecks V.

2.4 M und N seien die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierecks V. Zeigen Sie, dass gilt: $2|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{CD}|$.

Aufgabe P3: Stochastik

Bei einer Polizeikontrolle wurden durch die Beamten bisher 250 Autos mit jugendlichen Fahrern (bis 27 Jahre) und 750 Autos mit Fahrern, die älter als 27 Jahre waren, untersucht. Bei 50 Fahrzeugen mit jugendlichen Fahrern und bei 80 Fahrzeugen mit älteren Fahrern wurden Mängel festgestellt.

3.1 Erstellen Sie aus diesen Angaben ein Baumdiagramm.

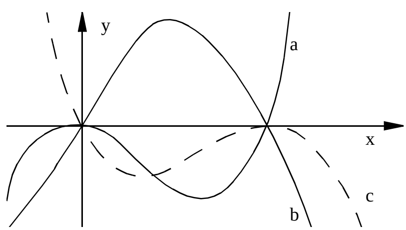
3.2 Zeigen Sie, dass bei dieser Kontrolle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein kontrolliertes Auto Mängel aufweist, 0,13 beträgt.

3.3 Wie viele mangelhafte Autos können die Beamten bei der Kontrolle weiterer 200 Autos erwarten?

3.4 Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden die Beamten schon unter den nächsten 10 Autos mindestens ein mangelhaftes?

Aufgabe A4: Analysis

Durch $f_1(x) = -x^3 + 4x$, $x \in \mathbb{R}$,
$f_2(x) = -x(x-2)^2$, $x \in \mathbb{R}$,
und $f_3(x) = x^2(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$,
sind drei Funktionen gegeben.
Die Abbildung zeigt ihre Graphen.



4.1 Ordnen Sie jedem Graphen a), b) und c) eine der Funktionen f_1, f_2 und f_3 zu. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.

4.2 Es sei nun $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$. Der zu f gehörige Graph sei G.
Bestimmen Sie die Nullstellen von f und die Koordinaten der Extrempunkte von G.
Skizzieren Sie G mindestens im Intervall $-1 \le x \le 2{,}5$.

4.3 Begründen Sie, weshalb man den Graphen G als Bild des Graphen von f_3 bei einer Spiegelung an der x-Achse gewinnen kann.

4.4 Gegeben sei eine Menge von Funktionen h durch $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
Weisen Sie nach, dass jeder zu einer Funktion h gehörige Graph H genau einen Wendepunkt hat.

Aufgabe A5: Analysis

Eine Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 8\ln x(\ln x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. G ist der zu f gehörige Graph.

5.1 Bestimmen Sie die Nullstellen x_1 und x_2 von f und die Koordinaten des lokalen Extrempunktes von G.
Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{8}{x}(2\ln x - 1)$

5.2 Skizzieren Sie G im Intervall $0{,}8 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

5.3 In $P_1(x_1|\,0)$ und $P_2(x_2|\,0)$ werden die Tangenten t_1 bzw. t_2 an G gelegt.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem sich die Tangenten t_1 und t_2 in einem kartesischen Koordinatensystem schneiden.

5.4 Geben Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von g mit $g(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, an.

Aufgabe A6: Geometrie

Gegeben sind die Punkte $P_n(2|\,0|\,n)$ und $Q_n(n|\,4|\,0)$, $n \in \mathbb{N}$.

6.1 Stellen Sie die Strecken $\overline{P_nQ_n}$ für $0 \le n \le 4$ in einem räumlichen Koordinatensystem dar.

6.2 Für welchen Wert von n gilt: $R(3|\,2|\,2) \in \overline{P_nQ_n}$?

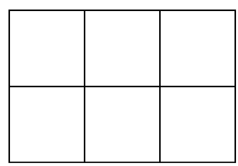
6.3 Für welchen Wert von n gilt: $|\overrightarrow{P_nQ_n}| = \sqrt{50}$?
Für einen Wert n im Intervall $0 \le n \le 4$ ist $|\overrightarrow{P_nQ_n}|$ am kleinsten.
Geben Sie diesen Wert für n an.

6.4 Die Strecke $\overline{P_4Q_4}$ liegt auf einer Geraden g_4.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S, in dem g_4 die y-z-Ebene durchstößt.

6.5 Eine Gerade h sei gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte M_n der Strecken $\overline{P_nQ_n}$ alle auf h liegen.

Aufgabe B4: Analysis

Ein Tierpark plant eine rechteckige Fläche als Gehege mit 6 kleineren rechteckigen Bereichen anzulegen (siehe Skizze). Für den Außenzaun ist mit 20 DM je Meter, für den Innenzaun mit 10 DM je Meter Zaunlänge zu rechnen. (Zugänge und Durchgänge bleiben in der Kalkulation unberücksichtigt.)



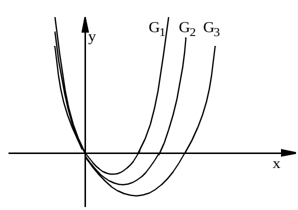
4.1 Berechnen Sie die Gesamtkosten für alle Zäune zunächst unter der Annahme, dass die Gesamtfläche quadratisch ist und einen Inhalt von $3000\ m^2$ hat.

4.2 Bestimmen Sie die äußeren Abmessungen für ein $3000\ m^2$ großes Gehege so, dass die Gesamtkosten für alle benötigten Zäune minimal werden.

4.3 Für den Kauf der Zäune stehen eigentlich nur 5000 DM zur Verfügung. (Flächeneinteilung siehe Skizze)
Berechnen Sie den maximalen Inhalt der Fläche, die dann eingezäunt werden könnte.

Aufgabe B5: Analysis

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_n durch $f_n(x) = \frac{1}{n}x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.
Die zugehörigen Graphen im kartesischen Koordinatensystem seien G_n (siehe Abbildung).



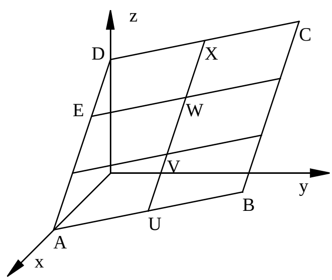
5.1 Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Graph G_3 die x-Achse in ihrem positviven Teil schneidet.
Zeigen Sie, dass alle Graphen G_n den positiven Teil der x-Achse unter Winkeln gleicher Größe schneiden.

5.2 Zeigen Sie, dass die lokalen Extrempunkte der Graphen G_n alle auf einer Geraden mit der Gleichung $y = -x$ liegen.

5.3 Jeder Graph G_n schließt mit der x-Achse eine Fläche des Inhalts A_n ein.
Bestimmen Sie n so, dass A_n 12 Flächeneinheiten beträgt.
Durch $a_n = A_{n+1} - A_n$ ist eine Zahlenfolge (a_n) gegeben.
Zeigen Sie, dass (a_n) eine arithmetische Folge ist.

Aufgabe B6: Geometrie

Gegeben sind die Punkte A(6| 0| 0), B(4| 4| 1) und D(0| 0| 3).
Das Viereck ABCD sei ein Parallelogramm.
Dieses Viereck wird in 6 paarweise kongruente Teilflächen eingeteilt (siehe Abbildung).



6.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C und die des Schnittpunktes S der Diagonalen des Paralleogramms ABCD.

6.2 Welcher der Gitterpunkte U, V, W, X ist der Schwerpunkt des Dreiecks CDU? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

6.3 Es gibt mehrere Möglichkeiten, entlang der dargestellten Linien auf kürzestem Weg von B nach D zu gelangen.
Berechnen Sie die Länge eines solchen Streckenzuges.

6.4 Das Parallelogramm liegt in der Ebene ε.
Eine Gleichung für ε sei gegeben mit $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD}$.
Untersuchen Sie, ob der Punkt Q(2,5| 3| 1,75) in der Ebene ε liegt.
Geben Sie Bedingungen für r und s an, so dass P im Inneren des Parallelogramms EWXD liegt.

Erwartungsbild zu Aufgabe P1: Analysis

1.1 Nullstellen von f:

$f(x) = \frac{1}{12}x^3(x-4)$; $0 = \frac{1}{12}x^3(x-4) \Rightarrow x_{N1} = 0$; $x_{N2} = 4$

Koordinaten des lokalen Minimumpunktes E:

$f'(x) = \frac{1}{3}x^2(x-3)$; $0 = \frac{1}{3}x^2(x-3) \Rightarrow x_{E1} = 0$; $x_{E2} = 3$

$f''(x) = x(x-2) \Rightarrow f''(0) = 0$; $f''(3) = 3(3-2) = 3 > 0$

$f(3) = \frac{1}{12} \cdot 3^2 \cdot (3-4) = -2{,}25 \Rightarrow E_{min}(3|\,-2{,}25)$

Koordinaten des Wendepunktes W:

$f''(x) = x(x-2) = 0 \Rightarrow x_{W1} = 0$; $x_{W2} = 2$

$f'''(x) = 2(x-1) \Rightarrow f'''(0) = -2 \neq 0$; $f'''(2) = 2 \neq 0$

$f(0) = 0 \Rightarrow W_1(0|\,0)$; $f(2) = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot (2-4) = -\frac{4}{3} \Rightarrow W_2(2|-\frac{4}{3})$

Der Koordinatenursprung ist Wendepunkt(Sattelpunkt) des Graphen.

1.2 Flächeninhalt:

$$-\int_0^4 \frac{1}{12} \cdot x^3(x-4)\,dx = \int_4^0 \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right)dx = \frac{1}{12}\int_4^0 (x^4 - 4x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{4}x^4\right]_4^0 = 0 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{5} \cdot 1024 - 256\right) = 4{,}2\overline{6}$$

Flächeninhalt: $A = 4{,}2\overline{6}$ FE

1.3. Prozentuale Abweichung des Flächeninhalts F von A

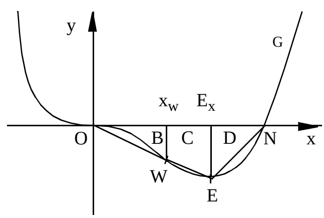
$F = B + C + D$

$B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3}$ FE $= \frac{4}{3}$ FE,

$C = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{9}{4}\right)(3-2)$ FE $= \left(\frac{2}{3} + \frac{9}{8}\right)$ FE

$= \frac{43}{24}$ FE

$D = \frac{1}{2}(4-3) \cdot \frac{9}{4}$ FE $= \frac{9}{8}$ FE



$F = \left(\frac{4}{3} + \frac{43}{24} + \frac{9}{8}\right)$ FE $= \frac{102}{24}$ FE $= 4{,}25$ FE

Prozentuale Abweichung : $A = 4{,}2\overline{6}$ FE $\triangleq$ 100 %, $F = 4{,}25$ FE $\triangleq$ x %

$x = \frac{4{,}25}{4{,}2\overline{6}} \approx 99{,}60937$ %; F ist 0,4 % kleiner als A.

1.4 Zu zeigen ist: g ist nicht Tangente an G.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \Rightarrow m_g = 5$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^2(x-3)$; $f'(4) = \frac{1}{3} \cdot 16(4-3) \Rightarrow m = \frac{16}{3}$

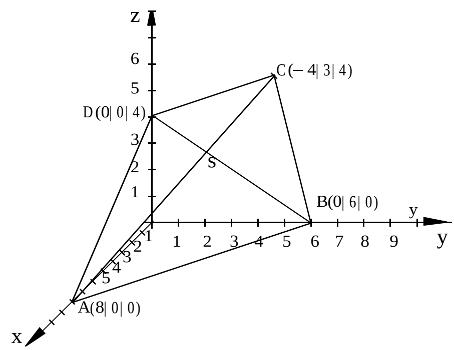
Aus $m_g \neq f'(4)$ und $P(4|\,0) \in G$ folgt: g ist nicht Tangente an G.

Bewertungsvorschlag:

1.1	Nullstellen	1 BE
	Extrempunkt	2 BE
	Wendepunkt	2 BE
1.2	Flächeninhalt	3 BE
1.3	Flächeninhalt F	2 BE
	Prozentuale Abweichung	2 BE
1.4	Nachweis	3 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P2: Geometrie

2.1 Darstellung des Vierecks V



2.2 Zu zeigen ist: V ist ein Trapez.

V ist ein Trapez, wenn a) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ und b) $D \notin g_{AB}$ oder $C \notin g_{AB}$.

zu a): $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aus $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DC}$ folgt $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

zu b): $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = 8 - 8t \\ 0 = 6t \\ 4 = 0 \end{array}$

Widerspruch $\Rightarrow D \notin g_{AB}$. Damit ist gezeigt: V ist ein Trapez.

2.3 Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes S:

$$g_{AC}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_{BD}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s\,\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 8 - 12r = 0 & \Rightarrow r = \frac{2}{3} \\ \text{II} & 3r = 6 - 6s & \\ \text{III} & 4r = 4s & \Rightarrow s = r \end{array}$$

Aus II: $3 \cdot \frac{2}{3} = 6 - 6 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow 2 = 2$ w. A.

$\Rightarrow$ Es existiert ein Diagonalenschnittpunkt S.

Die Koordinaten des Punktes S ergeben sich aus:

$$g_{AC}\colon \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \text{ oder } g_{BD}\colon \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(0|\,2|\,\frac{8}{3})$

2.4 Zu zeigen ist: $2|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{CD}|$

Koordinaten von M:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M(2|\,1{,}5|\,2)$$

Koordinaten von N:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow N(0|\,3|\,2)$$

Ermitteln der Beträge:

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(0-2)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + (2-2)^2} = 2{,}5$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10;\ |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

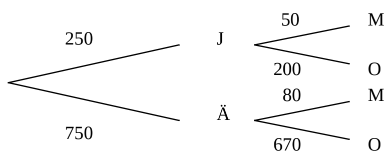
$$\Rightarrow 2|\overrightarrow{MN}| = 5,\ |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{CD}| = 10 - 5 = 5 \Rightarrow 2|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{CD}|$$

Bewertungsvorschlag:

2.1 Darstellung	2 BE
2.2 Nachweis	2 BE
2.3 Geradengleichungen	2 BE
Koordinaten von S	2 BE
2.4 Koordinaten von M und N	1 BE
Nachweis	2 BE
	11 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P3: Stochastik

3.1 Baumdiagramm



3.2 Kontrollierte Fahrzeuge: $250 + 750 = 1000$
Dabei Autos mit Mängeln: $50 + 80 = 130$
Ereignis A: „Auto weist Mängel auf.“ $P(A) = \frac{130}{1000} = 0{,}13$

3.3 Auf 100 Autos kommen 13 mit Mängeln, d.h. auf 200 Autos kommen $2 \cdot 13 = 26$ mit Mängeln.

3.4 P(mindestens ein mangelh.) = 1 – P(kein mangelh.) = $1 - 0{,}87^{10} \approx 0{,}7516$

Bewertungsvorschlag:

3.1 Baumdiagramm	2 BE
3.2 P(Auto mit Mängeln)	1 BE
3.3 Mängel auf 200 Autos	1 BE
3.4 P(mind. ein mangelhaftes Auto)	2 BE
	6 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4: Analysis

4.1 Zuordnung der Funktionen zu den Graphen

f_1 und der Graph b gehören zueinander, denn f_1 hat folgende Nullstellen:
$0 = -x^3 + 4x = -x(x^2 - 4) \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$
x_1 und x_2 sind auch in der Darstellung erkennbar.

f_1 hat folgende Extremstellen: $f'_1(x) = -3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$
$\Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ $f''_1(x) = -6x \Rightarrow f''_1(\sqrt{\frac{4}{3}}) = -6\sqrt{\frac{4}{3}} < 0$,
$f''_1(-\sqrt{\frac{4}{3}}) = 6\sqrt{\frac{4}{3}} > 0$, d.h. x_1 ist lokale Maximumstelle (s. Graph b),
x_2 ist lokale Minimumstelle (wird in der Darstellung angedeutet).

f_2 und Graph c gehören zusammen, denn f_2 hat zwei Nullstellen:
$f_2(x) = -x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2,3} = 2.$
Graph c schneidet die x-Achse an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

f_2 hat zwei Extremstellen:
$f'_2(x) = (-x^3 + 4x^2 - 4x)' = -3x^2 + 8x - 4$
$0 \quad = -3x^2 + 8x - 4$
$0 \quad = x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{12}{9}} \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = \frac{2}{3}$
$f''_2(x) = -6x + 8 \Rightarrow f''_2(2) = -4 < 0; f_2(2) = 0 \Rightarrow E_{max}\,(2|\,0)$ (s. Graph c).
$f''_2(\frac{2}{3}) = 4 > 0; f_2(\frac{2}{3}) = \frac{8}{9} \Rightarrow E_{min}(\frac{2}{3}\,|\,\frac{8}{9})$ (s. Graph c).

Grenzwert der Funktion f_2 für $x \longrightarrow \pm\infty$:
$\lim\limits_{x\to\infty}[-x(x-2)^2] = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[-x(x-2)^2] = +\infty$ (s. Graph a)

f_3 und Graph a gehören zusammen, f_3 hat folgende Nullstellen:
$f_3(x) = x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$ (s. Graph a)

f_3 hat folgende Extremstellen:
$f'_3(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4) = 0 \Rightarrow x_{E1} = 0; x_{E2} = \frac{4}{3}$
$f''_3(x) = 6x - 4 \Rightarrow f''_3(0) = -4 < 0; f_3(0) = 0 \Rightarrow E_{max}\,(0|\,0)$
$f''_3(\frac{4}{3}) = 4 > 0; f_3(\frac{4}{3}) = -\frac{32}{27} \Rightarrow E_{min}\,(\frac{4}{3}\,|-\frac{32}{27})$ (s. Graph a)

Grenzwert der Funktion f_3 für $x \longrightarrow \pm\infty$:
$\lim\limits_{x\to\infty} x^2(x-2) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(x-2) = -\infty$ (s. Graph a)

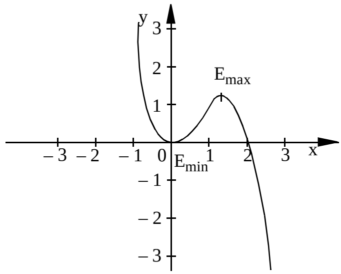
4.2 $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = -x^3 + 4x - x(x-2)^2 + x^2(x-2)$
$= -x^3 + 4x - x^3 + 4x^2 - 4x + x^3 - 2x^2 = -x^3 + 2x^2$

Nullstellen von f:
$0 = -x^3 + 2x^2 = -x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

Koordinaten der Extrempunkte von G:
$f'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{3}$
$f''(x) = -6x + 4;\ f''(0) = 4 > 0,\ f(0) = 0 \Rightarrow E_{min}(0|\ 0)$
$f''(\frac{4}{3}) = -6 \cdot \frac{4}{3} + 4 = -4 < 0;\ f(\frac{4}{3}) = -\frac{64}{27} + \frac{32}{9} = \frac{32}{27} \Rightarrow E_{max}(\frac{4}{3} \mid \frac{32}{27})$

Skizze des Graphen G

x	–1	0	1	$\frac{4}{3}$	2	2,5
f(x)	3	0	1	≈1,2	0	≈–3,1



4.3 Begründung:

$f(x) = -x^3 + 2x^2$
$f_3(x) = x^2(x-2) = x^3 - 2x^2 = -f(x)$
d.h. der Graph von f_3, an der x-Achse gespiegelt, ergibt den Graphen von f.

4.4 Behauptung: H hat genau einen Wendepunkt.

$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx;\ h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c;\ h''(x) = 6ax + 2b;$
$h''(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -\frac{b}{3a}$.
$h'''(x) = 6a \Rightarrow h'''(-\frac{b}{3a}) = 6a \neq 0$, da $a \neq 0$ nach Voraussetzung.

Folgerungen: – Die zweite Ableitung von h hat genau eine Nullstelle x_W
– Die dritte Ableitung von h ist an der Stelle x_W von null verschieden.

Damit sind die Kriterien für das Vorhandensein genau eines Wendepunktes erfüllt.

Bewertungsvorschlag:

4.1 Zuordnung mit Begründung	3 BE
4.2 Gleichung für f(x)	1 BE
Nullstellen	1 BE
Extrempunkte	3 BE
Skizze	1 BE
4.3 Begründung	2 BE
4.4 Nachweis	3 BE
	14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A5: Analysis

5.1 Nullstellen der Funktion f:

$0 = 8\ln x\,(\ln x - 1) \Rightarrow 8\ln x = 0$ oder $\ln x - 1 = 0$, also $x_1 = 1$; $x_2 = e$

Koordinaten des lokalen Extrempunktes von G:

$f'(x) = 8\,\frac{1}{x}\,(\ln x - 1) + 8\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{8}{x}\,(2\ln x - 1) = 0 \Rightarrow 2\ln x - 1 = 0$

Wegen $\frac{8}{x} \neq 0$ folgt $2\ln x - 1 = 0$, also $\ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$

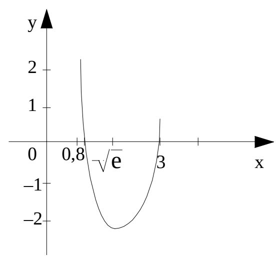
$f''(x) = -\frac{8}{x^2}\,(2\ln x - 1) + \frac{8}{x} \cdot \frac{2}{x} = \frac{8}{x^2}\,(3 - 2\ln x)$,

$f''(\sqrt{e}) = \frac{8}{e}\,(3 - 2 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{16}{e} > 0$

$f(\sqrt{e}) = 8 \cdot \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2} - 1) = -2 \Rightarrow E_{min}(\sqrt{e}\,|-2)$

5.2 Skizze des Graphen G

x	0,8	1	$\sqrt{e}$	2	2,5	e	3
f(x)	2,18	0	–2	– 1,70	– 0,61	0	0,86



5.3 Größe des Winkels $\sphericalangle\,(t_1, t_2)$:

Anstieg der Tangente t_1 in $P_1(1|\,0)$: $f'(1) = \frac{8}{1}\,(2\ln 1 - 1) = -8 \Rightarrow m_1 = -8$

Anstieg der Tangente t_2 in $P_2(e|\,0)$: $f'(1) = \frac{8}{e}\,(2\ln e - 1) = \frac{8}{e} \Rightarrow m_1 = \frac{8}{e}$

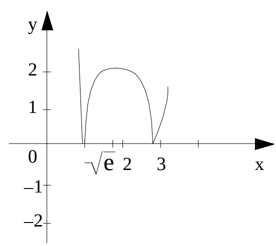
$\sphericalangle\,(t_1, t_2)$ ergibt sich aus der Formel: $\tan\,\alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$

$\tan \sphericalangle\,(t_1, t_2) = \left|\frac{\frac{8}{e} + 8}{1 - \frac{64}{e}}\right| = \left|\frac{8 + 8e}{e - 64}\right| \approx \frac{29,75}{61,28} \approx 0{,}4855 \Rightarrow \sphericalangle\,(t_1, t_2) \approx 25{,}9°$

5.4 Lokale Extrempunkte von $g(x) = |f(x)|$:

$g(x) = |8 \cdot \ln x \cdot (\ln x - 1)|$

$E_1(1|\,0)$
$E_2(\sqrt{e}\,|\,2)$
$E_3(e|\,0)$



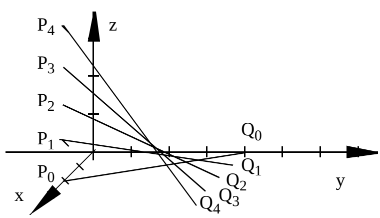
Bewertungsvorschlag:

5.1	Nullstellen	2 BE
	Extrempunkt	4 BE
5.2	Skizze	2 BE
5.3	Anstiege m_1 und m_2	2 BE
	Winkel $\sphericalangle(t_1, t_2)$	2 BE
5.4	Extrempunkte	2 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A6: Geometrie

6.1 Darstellung der Strecken P_nQ_n

	$P_n(2\|\ 0\|\ n)$	$Q_n(n\|\ 4\|\ 0);\ n \in \mathbb{N}$
$n = 0$	$P_0(2\|\ 0\|\ 0)$	$Q_0(0\|\ 4\|\ 0)$
$n = 1$	$P_1(2\|\ 0\|\ 1)$	$Q_1(1\|\ 4\|\ 0)$
$n = 2$	$P_2(2\|\ 0\|\ 2)$	$Q_2(2\|\ 4\|\ 0)$
$n = 3$	$P_3(2\|\ 0\|\ 3)$	$Q_3(3\|\ 4\|\ 0)$
$n = 4$	$P_4(2\|\ 0\|\ 4)$	$Q_4(4\|\ 4\|\ 0)$



6.2 Ermitteln des Wertes n, für den gilt: $R(3|\ 2|\ 2) \in \overline{P_nQ_n}$

Strecke P_nQ_n : $\vec{x} = \overrightarrow{OP_n} + r\,\overrightarrow{P_nQ_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} n-2 \\ 4 \\ -n \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R},\ 0 \le r \le 1$

$3 = 2 + r(n - 2)$

$2 = \quad 4r \qquad \Rightarrow r = \frac{1}{2} \ \Rightarrow n = 4$

$2 = n - rn$

Für $n = 4$ gilt: $R(3|\ 2|\ 2) \in \overline{P_4Q_4}$. R ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_4Q_4}$.

6.3 Ermitteln des Wertes n, für den gilt: $|\overrightarrow{P_nQ_n}| = \sqrt{50}$

$$|\overrightarrow{P_nQ_n}| = \sqrt{(n-2)^2 + 4^2 + (-n)^2} = \sqrt{2n^2 - 4n + 20} = \sqrt{50}$$

$$2n^2 - 4n + 20 = 50$$
$$n^2 - 2n + 10 = 25$$
$$n^2 - 2n - 15 = 0 \qquad \Rightarrow n_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 15}$$
$$n_1 = 5 \; (n_2 = -3 \text{ entfällt, da } n \in \mathbb{N})$$

Probe: $\sqrt{(5-2)^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$

Für n = 5 gilt: $|\overrightarrow{P_5Q_5}| = \sqrt{50}$

Ermitteln des Wertes n mit $0 \le n \le 4$, für den $|\overrightarrow{P_nQ_n}|$ am kleinsten ist:

$|\overrightarrow{P_nQ_n}| = \sqrt{2n^2 - 4n + 20}$

$f(n) = 2n^2 - 4n + 20$; $f'(n) = 4n - 4$; $f'(n) = 0 \Rightarrow n = 1$

$f''(n) = 4$; $f''(1) = 4 > 0 \Rightarrow |\overrightarrow{P_nQ_n}|$ ist für n = 1 am kleinsten.

6.4 Koordinaten des Punktes $S = g_4 \cap E_{yz}$

$$g_4\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP_4} + r\,\overrightarrow{P_4Q_4} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$$

$0 = 2 + 2r \quad \Rightarrow r = -1$

$y = 4r \quad \Rightarrow y = -4$

$z = 4 - 4r \quad \Rightarrow z = 8$ Durchstoßpunkt: $S(0|-4|8)$

6.5 Zu zeigen ist: $M_n \in h$ für $n \in \mathbb{N}$

M_n Mittelpunkte der Strecken $\overline{P_nQ_n}$

$$\overrightarrow{OM_n} = \overrightarrow{OP_n} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_nQ_n} = \begin{pmatrix}2\\0\\n\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}n-2\\4\\-n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\frac{n}{2}\\2\\\frac{n}{2}\end{pmatrix}$$

$$h\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$M_n \in h$, $n \in \mathbb{N}$, falls es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $r \in \mathbb{R}$ gibt mit:

I $\quad 1 + \frac{n}{2} = 2 + r$

II $\quad 2 = 2$

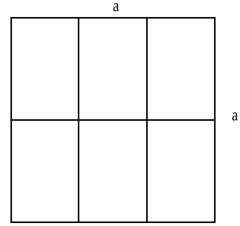
III $\quad \frac{n}{2} = 1 + r.$

Für $r(n) = \frac{n}{2} - 1$ sind die Bedingungen I, II und III erfüllt.
Damit gilt: Die Mittelpunkte M_n der Strecken $\overline{P_nQ_n}$ liegen demnach alle auf h.

Bewertungsvorschlag:

6.1 Darstellung	2 BE
6.2 Strecke $\overline{P_nQ_n}$	1 BE
Wert für n	2 BE
6.3 Ansatz $\lvert\overrightarrow{P_nQ_n}\rvert$	1 BE
Wert für n	1 BE
Wert für n	1 BE
6.4 Gerade g_4	1 BE
Durchstoßpunkt	2 BE
6.5 Koordinaten M_n	1 BE
Nachweis	2 BE
	14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B4: Analysis



4.1 Gesamtkosten

$A = a^2 = 3000\ m^2 \Rightarrow a = \sqrt{3000}\ \ m$

$K_G = 4\sqrt{3000} \cdot 20 + 3\sqrt{3000} \cdot 10$

$\quad = 110\sqrt{3000} \approx 6024{,}95$

Die Gesamtkosten betragen rund 6025 DM.

4.2 Äußere Abmessungen des Geheges

Zielfunktion: $K_G = 2(a + b) \cdot 20 + 10(2a + b)$

Nebenbedingung: $a \cdot b = 3000;\ b = \frac{1}{a} \cdot 3000$

$K_G(a) = 60a + 50 \cdot \frac{1}{a} \cdot 3000 = 60\,a + \frac{1}{a} \cdot 150000$

Untersuchung der Zielfunktion auf das lokale Minimum:

$K'_G(a) = 60 - \frac{1}{a^2} \cdot 150000 = 0 \Rightarrow a^2 = 2500$, also $a = 50;\ b = 60$

Nachweis: $K''_G(a) = \frac{30000}{a^3} \Rightarrow K''_G(50) = \frac{30000}{125000} = \frac{6}{25} > 0$

Für a = 50 m und b = 60 m werden die Gesamtkosten minimal.

4.3 Maximaler Flächeninhalt

Zielfunktion: $A = a \cdot b$

Nebenbedingung: $60a + 50b = 5000$; $b = 100 - \frac{6}{5}a$

$A(a) = a(100 - \frac{6}{5}a) = 100a - \frac{6}{5}a^2$

$A'(a) = 100 - \frac{12}{5}a$

$100 - \frac{12}{5}a = 0 \Rightarrow a = \frac{500}{12} \approx 41,\overline{6}$ und $b = 100 - \frac{6}{5} \cdot \frac{500}{12} = 50$

Nachweis: $A''(a) = -\frac{12}{5} \Rightarrow A''(\frac{500}{12}) = -\frac{12}{5} < 0$

$A = \frac{500}{12} \cdot 50$ FE $= 2083,\overline{3}$ FE

Die maximale Fläche, die bei 5000 DM eingezäunt werden kann, beträgt $2083,\overline{3}$ FE.

Bewertungsvorschlag:

4.1 Gesamtkosten	3 BE
4.2 Äußere Abmessungen	6 BE
4.3 Maximaler Flächeninhalt	5 BE
	14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B5: Analysis

5.1 Größe des Winkels

$f_3(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$

Schnittstellen von G_3 mit der x-Achse:

$0 = \frac{1}{3}x^2 - 2x = x(\frac{1}{3}x - 2) \Rightarrow x_1 = 0$ (entfällt nach Voraussetzung) und $x_2 = 6$

Winkelgröße:

$f'_3(x) = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow f'_3(6) = \frac{2}{3} \cdot 6 - 2 = 2 \Rightarrow \tan\alpha = 2$, also $\alpha = 63,4°$

Beh: Alle Graphen G_n, $n \in \mathbb{N}$ schneiden den positiven Teil der x-Achse unter $\alpha = 63,4°$.

Schnittstellen von G_n mit der x-Achse:

$0 = \frac{1}{n}x^2 - 2x = x(\frac{1}{n}x - 2) \Rightarrow x_1 = 0$ (entfällt nach Voraussetzung) und $x_2 = 2n$

Winkelgröße:

$f'_n(x) = \frac{2}{n}x - 2$; $f'_n(2n) = \frac{2}{n} \cdot 2n - 2 = 2 \Rightarrow \tan\alpha = 2$, also $\alpha = 63,4°$

5.2 Zu zeigen ist: Die lokalen Extrempunkte der Graphen G_n, $n \in \mathbb{N}$ liegen alle auf der Geraden $y = -x$.

Extrempunkte von G_n:

$f'_n(x) = \frac{2}{n}x - 2 = 0 \Rightarrow x = n$

$f''_n(x) = \frac{2}{n} \Rightarrow f''_n(n) = \frac{2}{n} > 0$ da $n > 0$ nach Voraussetzung.

$f_n(n) = \frac{1}{n}n^2 - 2n = -n \Rightarrow$ Extrempunkte $P_{min}(n|-n)$. Diese liegen auf der Geraden $y = -x$.

5.3 Bestimmen von n, wobei $A_n = 12$ FE

Integrationsgrenzen sind die Nullstellen von f_n: $x_1 = 0$ und $x_2 = 2n$.
A_n liegt unterhalb der x - Achse, damit ergibt sich:

$$12 = \int_{2n}^{0} \left(\frac{1}{n}x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{1}{3n}x^3 - x^2\right]_{2n}^{0} = 0 - \frac{8n^3}{3n} + 4n^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right)n^2$$

$\Rightarrow n^2 = 9$, also $n = 3$ ($n = -3$ entfällt nach Voraussetzung), d.h. $A_3 = 12$ FE

Beh: Die Folge (a_n) mit $a_n = A_{n+1} - A_n$ ist eine arithmetische Folge.

Beweis:

$A_n = 4n^2 - \frac{8}{3}n^2 = \frac{4}{3}n^2$

$A_{n+1} = \frac{4}{3}(n+1)^2 = \frac{4}{3}n^2 + \frac{8}{3}n + \frac{4}{3}$

$A_{n+1} - A_n = \frac{4}{3}n^2 + \frac{8}{3}n + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}n^2 = \frac{8}{3}n + \frac{4}{3} = a_n$

(a_n) ist eine arithmetische Folge mit $d = \frac{8}{3}$.

Bewertungsvorschlag:

5.1 Größe des Winkels	2 BE
Nachweis	2 BE
5.2 Nachweis	3 BE
5.3 Wert für n	4 BE
Nachweis	3 BE
	14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B6: Geometrie

6.1 Koordinaten des Punktes C

ABCD ist ein Parallelogramm, daraus folgt u.a. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ d.h., } C(-2|\,4|\,4)$$

Oder $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, d.h., $C(-2|\,4|\,4)$

Koordinaten des Punktes S:

$$g_{AC}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

$$g_{BC}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 6 - 8r &= 4 - 4s \\ \text{II} & 4r &= 4 - 4s \\ \text{III} & 4r &= 1 + 2s \end{array}$$

I – II: $6 - 12r = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$;

aus III folgt dann: $4 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 2s \Rightarrow s = \frac{1}{2}$

Die Koordinaten des Punktes S ergeben sich aus:

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S(2|\,2|\,2)$$

6.2 Schwerpunkt des Dreiecks CDU

Der Schwerpunkt des Dreiecks CDU ist W.
Begründung: Der Schwerpunkt eines Dreiecks ergibt sich als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und teilt jede der Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2.

a) Strecke $\overline{UX}$ ist Seitenhalbierende des Dreiecks CDU.
b) W teilt die Strecke im Verhältnis 1 : 2. Es gilt: $\overline{XW} : \overline{WU} = 1 : 2$
Aus a) und b) folgt, dass W der Schwerpunkt des Dreiecks CDU ist.

6.3 Länge des Streckenzuges

$$l = |\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{AD}|$$
$$= \sqrt{(6-4)^2 + (0-4)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(0-6)^2 + (0-0)^2 + (3-0)^2}$$
$$= \sqrt{4+16+1} + \sqrt{36+9} = \sqrt{21} + \sqrt{45} \approx 11{,}29 \text{ LE} \approx 11{,}3 \text{ LE}$$

6.4 Untersuchung, ob $Q \in \varepsilon$

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \ r, s \in \mathbb{R}; \ Q(2{,}5|\ 3|\ 1{,}75)$$

I	$2{,}5 = 6 - 2r - 6s$	
II	$3 = 4r$	$\Rightarrow r = \frac{3}{4}$
III	$1{,}75 = r + 3s$	

I' $\quad 2{,}5 = 6 - 1{,}5 - 6s \Rightarrow 6s = 2 \qquad \Rightarrow s = \frac{1}{3}$

III' $1{,}75 = \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}75$ w. A.

Damit gilt: $Q \in \varepsilon$

Bedingungen für r und s, so dass P im Inneren des Parallelogramms EWXD liegt: $0 < r < \frac{1}{2}$; $r \in \mathbb{R}$

$\frac{2}{3} < s < 1$; $s \in \mathbb{R}$

Bewertungsvorschlag:

6.1 Koordinaten des Punktes C	2 BE
Koordinaten des Schnittpunktes S	2 BE
6.2 W ist Schwerpunkt, Begründung	2 BE
6.3 Länge des Streckenzuges	3 BE
6.4 Untersuchung	3 BE
Bedingungen für r und s	2 BE
	14 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1999 / 2000

Gymnasium

Sachsen

Aufgaben

(Ersttermin und Nachtermin)

Aufgabe A 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = (x^2 - 2)e^{-x} \quad (x \in D_f)$.

a) Geben Sie für die Funktion f den größtmöglichen Definitionsbereich, die Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte, die Art der Extrema und die Koordinaten der Wendepunkte an.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f nicht symmetrisch zur y-Achse ist.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Graph der Funktion f die y-Achse schneidet.
Zeigen Sie, dass für alle x ($x \in \mathbb{R}$) gilt: $f(x) = 2e^{-x} - f''(x) - 2f'(x)$
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 10)

b) Beschreiben Sie ein rechnerisches Verfahren zur Ermittlung einer Gleichung der Tangente an den Graphen einer differenzierbaren Funktion in einem Punkt des Graphen.
Ermitteln Sie mit dem von Ihnen beschriebenen Verfahren eine Gleichung der Tangente t_1 an den Graphen der Funktion f im Punkt $S_1(-1; f(-1))$ und geben Sie eine Gleichung der Tangente t_2 an den Graph der Funktion f im Punkt $S_2(0; -2)$ an.
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Tangenten t_1 und t_2 an.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

c) Die Tangente t_2 (Aufgabenteil b), die x-Achse und der Graph der Funktion f begrenzen im IV. Quadranten eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

d) Für jedes x_p mit $\sqrt{2} < x_p < 5$ wird durch den Koordinatenursprung, den Punkt $P_p(x_p; f(x_p))$ und den Punkt $Q_p(x_p; 0)$ ein Dreieck bestimmt.
Ermitteln Sie den Wert x_p, für den der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird, und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

e) Eine Funktion g, deren Graph die x-Achse im Punkt P(1; 0) berührt, ist durch die Gleichung $y = g(x) = (x^2 + px + q)e^{-x}$ $(p, q \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$ gegeben.
Bestimmen Sie die Werte p und q.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe A 2: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ $x \in D_f$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f, die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte sowie die Art der Extrema an.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion keine Wendepunkte besitzt.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion im Unendlichen.
Berechnen Sie die Stellen x, an denen die Funktion den Anstieg – 3 hat.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 13)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f durch die Gleichung
$y = f(x) = x - 3 + \frac{4}{x + 1}$ $(x \in D_f)$ beschrieben werden kann.
Begründen Sie, dass sich für große Werte x der Graph der Funktion f an den Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = x - 3$ annähert.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Stammfunktion der Funktion f.
Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 10$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

c) Gegeben ist die lineare Funktion h durch $y = h(x) = \frac{8}{9}x - \frac{5}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Es existiert eine Stelle x $(x > 0)$, für die die Differenz $d(x) = f(x) - h(x)$ minimal wird.
Geben Sie diese Stelle x und die minimale Differenz an.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

d) Für jedes n $(n \in \mathbb{R})$ existiert eine Gerade g_n mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x + n$.
Ermitteln Sie die Werte n, für die die Gerade g_n Tangente an den Graphen der Funktion ist.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe A 3: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Gegeben sind die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2 \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 1)$ und

Funktionen F_a durch $y = F_a(x) = -\frac{1}{x-1} + ax \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 1, a \in \mathbb{R})$.

a) Die Gerade mit der Gleichung $y = -2x + 7$ ist Tangente an den Graphen der Funktion f.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Berührungspunktes von Tangente und Graph.
Die Gerade s verläuft senkrecht zur Tangenten t und schneidet diese im Punkt P.
Die Tangente t, die Gerade s und die x-Achse begrenzen eine Dreiecksfläche.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Für genau einen Wert a ist die Funktion F_a eine Stammfunktion der Funktion f.
Bestimmen Sie diesen Wert a.
Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = 1{,}5$ und $x = 5$ schließen eine Fläche vollständig ein.
Ermitteln Sie den Wert b $(b \in \mathbb{R})$ auf eine Dezimalstelle genau, für den die Gerade mit der Gleichung $x = b$ diese Fläche halbiert.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

c) Der Graph der Funktion f, die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = k$ und $x = k + 1$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A_k vollständig. Die Flächeninhalte $A_2, A_3, \ldots, A_n$ bilden Glieder einer Zahlenfolge.
Ermitteln Sie die Folgenglieder A_2 und A_3.
Bestimmen Sie eine Bildungsvorschrift dieser Zahlenfolge.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe A 4: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Für jedes a $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$ ist eine Funktion f_a durch

$$y = f_a(x) = \frac{4x^2}{3a^2 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ gegeben.}$$

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_1 auf Symmetrie.
Geben Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes der Funktion f_1 und die Art des Extremums an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f_1 höchstens zwei Wendepunkte besitzen kann.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

b) Für jedes a $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$ existiert auf dem Graphen der Funktion f_a genau ein Punkt $P_a(a; f_a(a))$ und genau ein Punkt $Q_a(-a; f_a(-a))$. Die Tangente an den Graph der Funktion f_a im Punkt P_a, die Tangente an den Graphen der Funktion f_a im Punkt Q_a und die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ begrenzen ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

Aufgabe B 1 : Analytische Geometrie / Lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(3; 3; –2), B(5; 7; 2), C(1; 9; 6), D(–1; 5; 2) und $P_a(-4; 2a; a)$ mit $(a \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene E.
Ermitteln Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in parameterfreier Form.
Für genau einen Wert a liegt der zugehörige Punkt P_a in der Ebene E.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

b) Es existiert mindestens ein Punkt F, so dass die Punkte A, B, C und F Eckpunkte eines Trapezes mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) sind:
(1) $\overline{AB} \parallel \overline{FC}$,
(2) eine der beiden parallelen Seiten ist doppelt so lang wie die andere parallele Seite.

Berechnen Sie die Koordinaten eines solchen Punktes F.
Geben Sie an, wie viele Trapeze mit den Eigenschaften (1) und (2) existieren und begründen Sie Ihre Feststellung.
Beschreiben Sie, wie Sie die Koordinaten eines von Ihrem berechneten Punkt F verschiedenen Punktes ermitteln können, der ebenfalls die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

c) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
Das Viereck ABCD ist Grundfläche von Pyramiden mit einer Höhe von $\sqrt{65}$.
Berechnen Sie das Volumen einer solchen Pyramide.
Es gibt genau zwei solche Pyramiden, deren Höhen parallel zur Geraden g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ verlaufen und die den Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche als Höhenfußpunkt haben.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller Punkte, die Spitzen dieser Pyramiden sein können.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 7)

Aufgabe B 2: Analytische Geometrie / Lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M(–2; 3) und dem Radius r = 5 sowie die Punkte A(6; 2), B(–3; 5) und C(–5; y_c) mit $y_c > 0$ gegeben.

a) Durch die Punkte A und B ist eine Gerade g bestimmt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g.
Untersuchen Sie rechnerisch die Lage der Geraden g zum Kreis k und geben Sie die Koordinaten aller gemeinsamen Punkte an.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

b) Die Gerade t ist Tangente an den Kreis k im Punkt C. Die Tangente t, die Gerade g und die y-Achse begrenzen ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Dreieck nicht rechtwinklig ist.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

c) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten eines Punktes D, so dass das Viereck AOBD ein Drachenviereck ist.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(6; 2; 0), B(–3; 5; 0) und $P_z(1; 1; z)$ mit $z \in \mathbb{R}$ gegeben.

d) Ermitteln Sie alle Werte z, für die das Dreieck ABP_z ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ ist.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Aufgabe B 3: Analytische Geometrie / Lineare Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind ein Dreieck ABC durch die Punkte A(–1; 4; 3), B(–4; 2; 1), C(6; –2; 7) sowie die Geraden g_a durch

$$g_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R})$$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt C auf keiner der Geraden g_a liegt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B.

b) Ermitteln Sie den Wert a, für den sich die Geraden g_a und h in genau einem Punkt schneiden.
Begründen Sie, dass die Geraden h und g_2 zueinander windschief sind.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

c) Durch den Punkt P(1; 0; 4) verläuft die zur Geraden h parallele Gerade k. Die Gerade k teilt das Dreieck ABC in eine Dreiecksfläche mit dem Flächeninhalt A_1 und eine Trapezfläche mit dem Flächeninhalt A_2
Bestimmen Sie das Verhältnis $A_1 : A_2$.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe B 4: Analytische Geometrie / Lineare Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1; 0; 0), B(6; 1; 0), C(6; 5; 0) und $D\left(-\frac{7}{13};\ \frac{48}{13};\ 0\right)$ gegeben.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Sehnenvierecks sind.
Auf dem Umkreis k_1 dieses Sehnenvierecks existiert ein vom Punkt D verschiedener Punkt F so, dass das Viereck ABCF ebenfalls ein Trapez ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes F.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

c) Der Punkt B ist Mittelpunkt eines in der x-y-Koordinatenebene liegenden Kreises, der durch den Koordinatenursprung verläuft. Für jedes z $(z \in \mathbb{R},\ z \neq 0)$ ist der Punkt $S_z(x;\ y;\ z)$ Spitze eines Kreiskegels mit dem Grundkreis k_2.
Ermitteln Sie alle Werte z, für die das Volumen dieses Kreiskegels 111π beträgt.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe C 1: Stochastik

Ein Autoproduzent, der Kleinwagen, Mittelklassewagen und Luxusliner herstellt, untersucht das Kaufverhalten seiner Kunden. Dabei wird ermittelt, dass 70 % der Kunden einen Kleinwagen, 20 % einen Mittelklassewagen und 10 % einen Luxusliner kaufen. Beim Kleinwagen entschieden sich $\frac{1}{5}$ der Kunden, beim Mittelklassewagen $\frac{1}{3}$ und beim Luxusliner $\frac{11}{20}$ für eine Klimaanlage.
Das Kaufverhalten der Kunden ist voneinander unabhängig.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Ein zufällig ausgewählter Kunde fährt ein Fahrzeug mit Klimaanlage,
Ereignis B: Ein zufällig ausgewählter Kunde fährt einen Mittelklassewagen ohne Klimaanlage,
Ereignis C: Ein zufällig ausgewählter Kunde fährt einen Luxusliner oder ein Fahrzeug mit Klimaanlage.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen unter 5 zufällig ausgewählten Kunden des Herstellers, die einen Kleinwagen fahren. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert der Zufallsgröße X an.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Zur Eröffnung eines neuen Autohauses des Herstellers werden 29 Gäste gezählt, von denen genau fünf schon einen Wagen dieses Herstellers fahren. In einer Tombola werden unter den 29 Gästen 7 Gewinner ermittelt, wobei jeder Gast nur genau einmal gewinnen kann. Das Ereignis D sei das Ereignis, dass sich unter den 7 Gewinnern genau zwei befinden, die bereits einen Wagen dieses Herstellers fahren.
Beschreiben Sie, wie man mithilfe einer Simulation (z.B. mit einem Urnenexperiment) einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D ermitteln kann.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe C 2: Stochastik

Susanne, Henriette und Franziska bereiten eine Veranstaltung der Arbeitsgemeinschaft Mathematik ihrer Schule zum Thema Glücksspiele vor. Sie einigen sich darauf, dass sich jede ein Zufallsexperiment ausdenkt und bezüglich dieses Experiments Aufgaben formuliert.

a) Susanne verwendet eine Urne, in der sich vier weiße, fünf schwarze und drei gelbe Kugeln befinden. Nacheinander sollen aus der Urne zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden. Susanne vermutet, dass von den folgenden Ereignissen das Ereignis B am wahrscheinlichsten ist.
Ereignis A: Die erste Kugel ist gelb und die zweite ist schwarz.
Ereignis B: Beide Kugeln haben die gleiche Farbe.
Ereignis C: Keine der gezogenen Kugeln ist schwarz.
Überprüfen Sie rechnerisch, ob Susannes Vermutung stimmt.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Henriette verwendet einen idealen Tetraeder, dessen Seiten mit „1“, „2“, „3“ bzw. „4“ beschriftet sind. Das Tetraeder soll durch einen Spieler dreimal geworfen werden, wobei nach jedem Wurf die unten liegende Augenzahl notiert wird. Erreicht der Spieler beim dreimaligen Wurf eine Augensumme größer als acht, erhält er 20 Pfennige ausgezahlt. Ist die Augensumme kleiner oder gleich acht, muss er 25 Pfennige bezahlen. Die Zufallsgröße X beschreibt den Gewinn des

Spielers beim dreimaligen Wurf des Tetraeders.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X an.
Berechnen Sie den bei 10 Spielen vom Spieler zu erwartenden Gewinn.
Ermitteln Sie den vom Spieler einzuzahlenden Betrag (auf ganze Pfennige gerundet), wenn ein Auszahlungsbetrag von 20 Pfennigen für einen Gewinn beibehalten wird und das Spiel gerecht sein soll, d.h., der Erwartungswert der Zufallsgröße X Null Pfennige betragen soll.

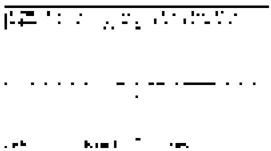
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

c) Franziska benutzt sieben Skatkarten. Auf vier Karten sind Buben, auf den anderen Karten Damen abgebildet. Aus dem Stapel dieser sieben Karten wird durch einen Spieler dreimal eine Karte gezogen, wobei nach jeder Ziehung diese Karte zurückgelegt und die Karten gemischt werden.
Betrachtet werden die Ereignisse:
Ereignis D: Es werden zweimal Dame und einmal Bube gezogen,
Ereignis E: Es werden entweder drei Damen oder drei Buben gezogen.
Wenn bei diesen Ziehungen eines der Ereignisse D oder E eintritt, kann der Spieler einen Preis gewinnen. Dafür muss er sich aber vor dem Spiel für eines dieser beiden Ereignisse entscheiden und nur wenn dieses eintritt, gewinnt er.
Geben Sie an und begründen Sie, für welches der beiden Ereignisse Sie sich entscheiden würden, um den Preis zu gewinnen.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Erwartungsbild zu Aufgabe A1: Analysis

a) Größtmöglicher Definitionsbereich: $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$
Einen ersten Eindruck vom Verlauf des Graphen vermittelt der GTR.



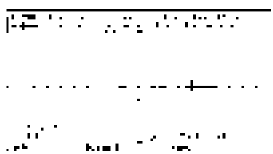
Nullstellen:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_{N_1} = -\sqrt{2}\,; x_{N_2} = \sqrt{2}$$

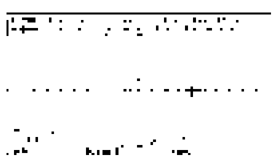
Die Ermittlung der Nullstellen ist auch mit dem ROOT-Befehl des GTR möglich.

Lokale Extrempunkte (Ermittlung mit FMAX- bzw. FMIN-Befehl des GTR):
$P_{MIN}(-0{,}73; -3{,}04)$ lokales Minimum
$P_{MAX}(2{,}73; 0{,}36)$ lokales Maximum

Wendepunkte:
Lösungsvariante 1: Ermittlung mit Inflection-Befehl des GTR



Lösungsvariante 2:
Darstellung des Graphen der ersten Ableitung und Untersuchung auf lokale Extrema:



Wendepunkte: $P_{W1}(0; -2)$; $P_{W2}(4; 0{,}26)$

Prüfung auf Achsensymmetrie: Es müsste gelten: $f(-x) = f(x)$

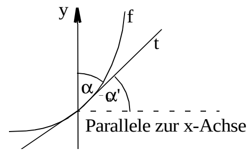
$$((-x^2) - 2)e^{-(-x)} = (x^2 - 2)e^x \neq f(x)$$

Der Graph der Funktion f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.
Zur Berechnung des Winkels wird die erste Ableitung an der Stelle 0 benötigt.

$u = x^2 - 2\,;\; u' = 2x\,;\; v = e^{-x}\,;\; v' = -e^{-x}$

$f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2 - 2)(-e^{-x}) = e^{-x}(-x^2 + 2x + 2)$

$f'(0) = 2$



$\tan\alpha' = 2 \Rightarrow \alpha' = 63,4°$

Der Schnittwinkel mit der y-Achse beträgt
$90° - 63,4° = 26,6°$.

Für den Nachweis der Richtigkeit der Aussage wird zunächst die 2. Ableitung gebildet:

$u = e^{-x}\,;\; u' = -e^{-x}\,;\; v = 2x - x^2 + 2\,;\; v' = 2 - 2x$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x}(2x - x^2 + 2) + e^{-x}(2 - 2x) \\ &= e^{-x}(-2x + x^2 - 2 + 2 - 2x) \\ &= e^{-x}(x^2 - 4x) \end{aligned}$$

Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} f(x) &= 2e^{-x} - f''(x) - 2f'(x) \\ &= 2e^{-x} - e^{-x}(x^2 - 4x) - 2e^{-x}(2x - x^2 + 2) \\ &= e^{-x}(2 - x^2 + 4x - 4x + 2x^2 - 4) \\ &= e^{-x}(x^2 - 2) = f(x) \qquad \text{w.z.b.w} \end{aligned}$$

b) Beschreibung:

Die Gleichung der Tangente hat die Form $y = mx + n$. Der Anstieg m entspricht der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x. Es wird zunächst die erste Ableitung der Funktion gebildet und danach diese für die Stelle x berechnet. Den errechneten Wert für m setzt man mit den Koordinaten x und y des Punktes des Graphen in die Gleichung $y = mx + n$ ein. Diese Gleichung wird nach n gelöst. Durch Einsetzen der errechneten Werte für m und n erhält man eine Gleichung der Tangente.

Tangente t_1:

Koordinaten von $S_1(-1; -e)$

Erste Ableitung an der Stelle –1: $f'(-1) = e(-2 - 1 + 2) = -e$

Einsetzen der ersten Ableitung und der Koordinaten von S_1 in die Gleichung $y = mx + n$ ergibt: $-e = -e(-1) + n$ und damit $n = -2e$

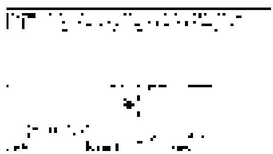
Gleichung der Tangente t_1: $y = -ex - 2e$

Tangente t_2:

S(0; – 2), f'(0) = 2; $-2 = 2 \cdot 0 + n \quad \Rightarrow n = -2$

Gleichung der Tangente t_2: $y = 2x - 2$

Koordinaten des Schnittpunktes:
S(–0,728; –3,457)
(Ermittlung mit GTR und Intersection-Befehl)



c) Grafische Veranschaulichung der Fläche mit GTR:
Ermittlung des Flächeninhaltes zwischen x-Achse und Graph der Funktion f:

$A_1 = 1,173871$

Ermittlung des Flächeninhaltes zwischen x-Achse und Tangente:

$A_2 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

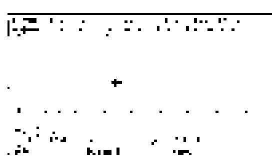
Gesamtfläche: $A = A_1 - A_2 = 1,173871 - 1 \approx 0,17$

d) Flächeninhalt:

$$A(x_p) = \frac{x_p f(x_p)}{2} = \frac{1}{2}x_p(x_p^2 - 2)e^{-x_p} = \frac{1}{2}e^{-x_p}(x_p^3 - 2x_p)$$

Lösungsvariante 1:
Die Zielfunktion $A(x_p)$ wird mit dem GTR auf das Maximum im vorgeschriebenen Intervall untersucht.

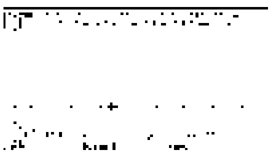
Der Wert x_p, für den der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird, liegt bei 3,41.
Der maximale Flächeninhalt beträgt 0,542.



Das lokale Maximum ist im betrachteten Intervall auch globales Maximum, da es einziges Extremum der stetigen Funktion im Intervall ist.

Lösungsvariante 2:
Bilden der ersten Ableitung der Zielfunktion und untersuchen auf Nullstellen:

$$A'(x_p) = \frac{1}{2}e^{-x}(-x^3 + 3x^2 + 2x - 2) \quad (\sqrt{2} < x_p < 5)$$



Die Nullstelle der ersten Ableitung ist die Extremstelle. Die Art des Extremums muss mithilfe des Monotonieverhaltens der ersten Ableitung oder mithilfe der zweiten Ableitung überprüft werden.

e) Erste Bedingung:
An der Stelle $x = 1$ hat die Funktion eine Nullstelle. Es gilt:

$$0 = (1 + p + q)e^{-1}$$

$$0 = 1 + p + q \;; \quad p + q = -1 \qquad \Rightarrow p = -1 - q$$

Zweite Bedingung:
An der Stelle $x = 1$ hat die Funktion ein lokales Extremum, d.h., die erste Ableitung ist 0.

$$u = e^{-x} ;\; u' = -e^{-x} ;\; v = x^2 + px + q ;\; v' = 2x + p$$

$$g'(x) = -e^{-x}(x^2 + px + q) + e^{-x}(2x + p) = e^{-x}(-x^2 - px - q + 2x + p)$$

$$0 = g'(1) = e^{-1}(-1 - p - q + 2 + p)$$

$$0 = 1 - q \qquad \Rightarrow q = 1 \;; \text{mit } p = -1 - q \text{ folgt } p = -2$$

Bewertungsvorschlag:

a) Definitionsbereich; Nullstellen; Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte; Koordinaten der Wendepunkte; Nachweis, dass keine Achsensymmetrie vorliegt; 1. Ableitung; Ansatz für Größe des Winkels; Größe des Winkels; Ableitung; Nachweis 10 BE

b) Aussage zum Anstieg; Aussage zur Ermittlung des Wertes n in der Gleichung der Tangente; Ansatz für Gleichung der Tangente t_1; Gleichung der Tangente t_1; Gleichung der Tangente t_2; Koordinaten des Schnittpunktes beider Tangenten 6 BE

c) Flächeninhalt des Dreiecks; Ansatz für Fächeninhalt; Flächeninhalt 3 BE

d) Zielfunktion; Stelle x_p; maximaler Flächeninhalt 3 BE

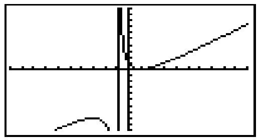
e) eine Gleichung des Gleichungssystems; 1. Ableitung; Werte p und q 3 BE

25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A2: Analysis

a) Einen ersten Überblick über den Verlauf des Graphen der Funktion

$y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ gibt der GTR:

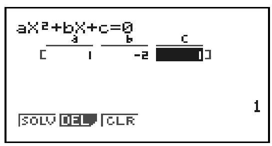


Größtmöglicher Definitionsbereich: $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$

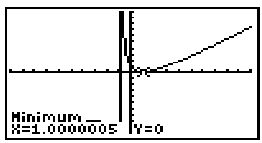
Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse: $x = 0 \quad \Rightarrow S_y(0; 1)$

Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse: $y = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

Lösen der Gleichung mit GTR-Routine oder mit ROOT-Befehl liefert: $S_x(1; 0)$



Koordinaten der lokalen Extrempunkte:
$P_{MAX}(-3; -8)$ (lokales Maximum)
$P_{MIN}(1; 0)$ (lokales Minimum)



Nachweis, dass der Graph der Funktion keine Wendepunkte besitzt:

1. Ableitung: $u = x^2 - 2x + 1$; $u' = 2x - 2$; $v = x + 1$; $v' = 1$

$$f'(x) = \frac{(2x - 2) \cdot (x + 1) - (x^2 - 2x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$$

2. Ableitung: $u = x^2 + 2x - 3$; $u' = 2x + 2$; $v = (x + 1)^2$; $v' = 2(x + 1)$

$$f''(x) = \frac{(2x + 2) \cdot (x + 1)^2 - (x^2 + 2x - 3) \cdot 2(x + 1)}{(x + 1)^4} = \frac{8}{(x + 1)^3}$$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$f''(x_w) = 0:$ $\quad 0 \neq 8 \quad \Rightarrow$ Der Graph der Funktion f hat keine Wendepunkte.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} x \cdot 1 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} x \cdot 1 = -\infty$$

Berechnung der Stellen:

$$-3 = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$-3(x+1)^2 = x^2 + 2x - 3$$

$$-4x^2 - 8x = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = -2\,;\; x_2 = 0$$

b) Der Nachweis wird durch Umformen der Ausgangsgleichung mithilfe von Polynomdivision geführt:

$$\begin{array}{l} \underline{(x^2 - 2x + 1)} : (x + 1) = x - 3 + \frac{4}{x+1} \\ \underline{-(x^2 + x)} \\ \quad\; - 3x + 1 \\ \quad\; \underline{-(- 3x - 3)} \\ \qquad\qquad 4 \end{array}$$

w.z.b.w.

Begründung:

Da $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{x+1} = 0$, nähert sich der Graph der Funktion f für große Werte x der Geraden mit der Gleichung $y = x - 3$ immer mehr an.

Ermittlung einer Gleichung einer Stammfunktion der Funktion f:

Für die Funktion f wird die Gleichung $y = f(x) = x - 3 + \frac{4}{x+1}$; $x \in \mathbb{R}, x \neq -1$

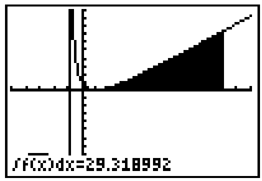
verwendet. Dann folgt für eine Stammfunktion F:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\ln|x+1| \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq -1)$$

Flächeninhalt:

Die linke Integrationsgrenze ist die Nullstelle der Funktion f, $x = 1$, die rechte Integrationsgrenze ist x = 10.

Lösungsvariante 1:
Nutzung des GTR



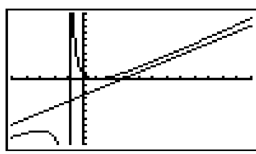
Lösungsvariante 2:

$$A = \int f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\ln|x+1|\right]_1^{10}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 100 - 30 + 4\ln 11 - \frac{1}{2} + 3 - 4\ln 2 = 4\ln\left(\frac{11}{2}\right) + 22{,}5 \approx 29{,}3$$

c) $d(x) = f(x) - h(x)$

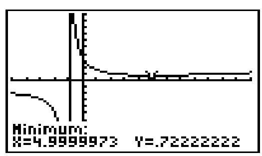
Die Abbildung zeigt den Sachverhalt:



Untersuchung der Funktion d mit GTR liefert:

$$d(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} - \frac{8}{9}x + \frac{5}{2}$$

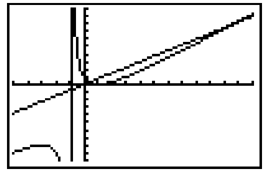
Die Differenz wird minimal für x = 5.
Die minimale Differenz beträgt ca. 0,72.



d) Veranschaulichung anhand des Falles $n = 0$:

Gleichsetzen der Gleichungen liefert: $\frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} = \frac{3}{4}x + n$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} - \frac{3}{4}x = n$$



$$4x^2 - 8x + 4 - 3x^2 - 3x = n(4x + 4)$$

$$x^2 - 11x + 4 = 4nx + 4n$$

$$x^2 - 11x - 4nx + 4 - 4n = 0$$

$$x^2 - (11 + 4n)x + (4 - 4n) = 0 \Rightarrow x_{1;2} = \frac{11 + 4n}{2} \pm \sqrt{\frac{(11 + 4n)^2}{4} - (4 - 4n)}$$

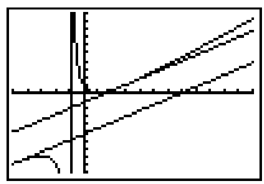
Untersuchung der Diskriminante:

$$\frac{(11 + 4n)^2}{4} - (4 - 4n) = \frac{(11 + 4n)^2 - 16 + 16n}{4}$$

$$= \frac{121 + 88n + 16n^2 - 16 + 16n}{4} = \frac{16n^2 + 104n + 105}{4} \geq 0$$

$$16n^2 + 104n + 105 = 0 \Rightarrow n_1 = -5,25\ ;\ n_2 = -1,25$$

Für $n = -1,25$ und $n = -5,25$ existiert je genau ein gemeinsamer Punkt der Gerade g_n mit dem Graphen der Funktion f; in diesen Fällen ist die Gerade g_n Tangente.



Bewertungsvorschlag:

a) größtmöglicher Definitionsbereich; Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse; Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse; Koordinaten und Art des lokalen Minimumpunktes; Koordinaten und Art des lokalen Maximumpunktes; Ansatz für 1. Ableitung; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Ansatz für Nachweis; Nachweis, dass der Graph keine Wendepunkte besitzt; Verhalten im Unendlichen; Ansatz für Stellen; Stellen — 13 BE

b) Nachweis der Schreibweise der Funktionsgleichung; Begründung; ganzrationaler Anteil der Stammfunktion; Gleichung der Stammfunktion; Ansatz für Flächeninhalt; Flächeninhalt — 6 BE

c) Zielfunktion; Extremstelle; minimale Differenz — 3 BE

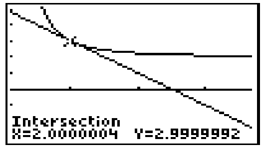
d) Ansatz; allgemeine Form der quadratischen Gleichung; Werte n — 3 BE

25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A 3 : Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

a) *Lösungsvariante 1:*

Darstellen der Tangente $y = -2x + 7$ und des Graphen der Funktion f und Ermittlung des Berührungspunktes mit „Intersection" ergibt: $P(2;3)$.



Lösungsvariante 2:

Gleichsetzen

$$\frac{1}{(x-1)^2} + 2 = -2x + 7$$

$$1 + 2(x-1)^2 = -2x + 7(x-1)^2$$

$$1 + 2x^2 - 4x + 2 = -2x + 7x^2 - 14x + 7$$

$$2x^2 - 4x + 3 = 7x^2 - 16x + 7$$

$$-5x^2 + 12x - 4 = 0$$

Lösung mit GTR liefert: $x_1 = 0,4$ (entfällt nach GTR-Bild); $x_2 = 2$

Berührungspunkt: $y = -2 \cdot 2 + 7 = 3 \Rightarrow P(2;3)$

Gleichung der Geraden s:

Mit $m = \frac{1}{2}$ und P(2; 3) folgt: $3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + n \Rightarrow n = 2$, also $y = \frac{1}{2}x + 2$

Zur Berechnung der Grundlinie des Dreiecks werden die Abszissen der Schnittpunkte beider Geraden mit der x-Achse ermittelt.

Tangente t: $0 = -2x + 7 \Rightarrow x = 3{,}5$

Gerade s: $0 = \frac{1}{2}x + 2 \quad \Rightarrow x = -4$

Das Ergebnis sollte mit dem GTR überprüft werden.

Die Länge der Grundseite des Dreiecks beträgt $3,5 + |-4| = 7,5$, die Höhe des Dreiecks entspricht der y-Koordinate des Punktes P, also 3.

Flächeninhalt: $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{7,5 \cdot 3}{2} = 11,25$

b) Bildung der ersten Ableitung der Funktionen F_a:

$$F_a(x) = -(x-1)^{-1} + ax\,;\; F'_a(x) = (x-1)^{-2} + a = \frac{1}{(x-1)^2} + a$$

Durch Vergleich mit der Gleichung der Funktion f folgt $a = 2$.

Flächeninhalt: $A = \int_{1,5}^{5} f(x)dx = 8,75$

Ermittlung mit GTR:

Lösungsvariante:

$$A = \int_{1,5}^{5} f(x)dx = \left[-\frac{1}{x-1} + 2x\right]_{1,5}^{5} = \left(-\frac{1}{4} + 10\right) - (-2+3) = 8,75\,(\text{FE})$$

Die Hälfte des Flächeninhaltes beträgt somit 4,375 bzw. $\frac{35}{8}$ FE.

$$4,375 = \left[-\frac{1}{x-1} + 2x\right]_{1,5}^{b} = -\frac{1}{b-1} + 2b - 1$$

$$5,375 = -\frac{1}{b-1} + 2b$$

$$5,375(b-1) = -1 + 2b(b-1)$$

$$5,375b - 5,375 = -1 + 2b^2 - 2b$$

$$0 = 2b^2 - 7,375b + 4,375$$

Lösen der Gleichung mit GTR: $\Rightarrow b_1 = 0,743$ (entfällt); $b_2 = 2,945$

$\Rightarrow b \approx 2,9$

Die Ermittlung des Wertes b ist auch durch gezieltes Probieren mit dem GTR mit dem Integrationsbefehl im Grafik-Fenster oder in einem Programm zur Integration möglich. Als Startwert bietet sich 2,5 bzw. 3 an.

Die exakte Lösung beträgt $b_2 = \frac{59 + \sqrt{1241}}{32}$. Die Angabe war aber nicht gefordert.

c) Ermittlung der Folgenglieder mit GTR:

$$A_2 = \int_2^3 f(x)dx = 2,5$$

$$A_3 = \int_3^4 f(x)dx = 2,1\overline{6}$$

Bildungsvorschrift der Folge (A_n):

$$A_n = \left[-\frac{1}{x-1} + 2x\right]_n^{n+1} = \left(-\frac{1}{n} + 2n + 2\right) - \left(-\frac{1}{n-1} + 2n\right)$$

$$= -\frac{1}{n} + 2n + 2 + \frac{1}{n-1} - 2n$$

$$A_n = 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \text{ bzw. } A_n = \frac{2n^2 - 2n + 1}{n(n-1)}$$

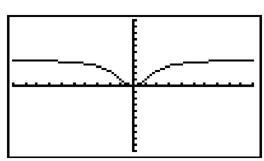
Bewertungsvorschlag:

a) Koordinaten des Berührungspunktes; Ansatz für Flächeninhalt; Flächeninhalt	3 BE
b) Wert a; Flächeninhalt der Gesamtfläche; Ansatz für Wert b; Wert b	4 BE
c) ein Folgenglied, beide Folgenglieder; Bildungsvorschrift	3 BE
	10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A 4 : Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

a) $f_1 : y = f_1(x) = \dfrac{4x^2}{3 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

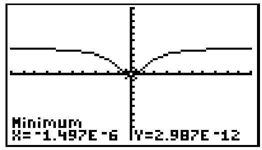
Symmetrie:
Die Abbildung mit dem GTR lässt Achsensymmetrie zur y-Achse vermuten.



Nachweis:

$$f_1(-x) = \frac{4(-x)^2}{3+(-x)^2} = \frac{4x^2}{3+x^2} = f_1(x) \Rightarrow \text{Achsensymmetrie zur y-Achse}$$

Lokaler Extrempunkt:
Mit GTR folgt: $P_{MIN}(0; 0)$ (lokales Minimum)



Nachweis für die Existenz von höchstens zwei Wendepunkten:
1. Ableitung:

$$u = 4x^2;\ u' = 8x;\ v = 3 + x^2;\ v' = 2x$$

$$f'_1(x) = \frac{8x(3+x^2) - 4x^2 \cdot 2x}{(3+x^2)^2} = \frac{24x + 8x^3 - 8x^3}{(3+x^2)^2} = \frac{24x}{(3+x^2)^2}$$

2. Ableitung:

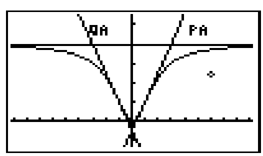
$$u = 24x;\ u' = 24;\ v = (3+x^2)^2;\ \ v' = 4x(3+x^2)$$

$$f''_1(x) = \frac{24(2+x^2)^2 - 24x \cdot 4x(3+x^2)}{(3+x^2)^4} = \frac{72 - 72x^2}{(3+x^2)^3}$$

Für die Existenz von Wendestellen müsste der Zähler der zweiten Ableitung 0 werden. Die entsprechende Gleichung ist quadratisch. Deshalb kann sie höchstens zwei Lösungen haben, also kann der Graph höchstens zwei Wendepunkte haben.
Die Wendestellen liegen bei $x_w = \pm 1$.

(Die Angabe der Wendestellen war im Aufgabentext nicht gefordert.)

b) Zur Veranschaulichung sind die Daten für die Funktion f_1 mit dem GTR dargestellt.



Gleichung der Tangente im Punkt P_a:
1. Ableitung:

$$u = 4x^2;\ u' = 8x;\ v = 3a^2 + x^2;\ v' = 2x$$

$$f_a'(x) = = \frac{8x(3a^2+x^2) - 4x^2 \cdot 2x}{(3a^2+x^2)^2} = \frac{24a^2x}{(3a^2+x^2)^2}$$

$f_a'(a) == \frac{24a^3}{16a^4} = \frac{3}{2a}$; im Punkt Q_a : $f'_a(-a) = \frac{24(-a)^3}{16(-a)^4} = -\frac{3}{2a}$

Gleichung der Tangente im Punkt P_a :

$y = \frac{3}{2a} \cdot x + n$ (*)

Der Punkt P_a hat die Koordinaten $P_a\left(a;\frac{4a^2}{3a^2+a^2}\right) = P_a(a;1)$

Durch Einsetzen dieser Koordinaten in die Gleichung (*) erhält man:

$1 = \frac{3}{2a} \cdot a + n = \frac{3}{2} + n \Rightarrow n = -0{,}5$

Gleichung der Tangente im Punkt P_a : $y = \frac{3}{2a}x - 0{,}5$

Schnitt dieser Tangente mit der Gerade $y = 4$:

$4 = \frac{3}{2a}x - 0{,}5 \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{3}{2a}x \Rightarrow 3a = x$

Wegen der Symmetrie entspricht die Strecke 3a der halben Grundlinie des Dreiecks. Die Grundlinie hat also die Länge 6a.
Die Höhe des Dreiecks ist auf der y-Achse ablesbar: $h = 4 + |-0{,}5| = 4{,}5$.

Flächeninhalt des Dreiecks:

$A(a) = \frac{g(a) \cdot h}{2} = \frac{6a \cdot 4{,}5}{2} = 13{,}5a$ (FE)

Bewertungsvorschlag:

a) Untersuchung auf Symmetrie und Schlussfolgerung; Koordinaten und Art des lokalen Extremums; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Nachweis der Existenz von höchstens zwei Wendepunkten 5 BE

b) 1. Ableitung; Gleichung der Tangente; Abszisse des Schnittpunktes der Tangente mit der Geraden y = 4 ; Ansatz für Flächeninhalt; Flächeninhalt 5 BE

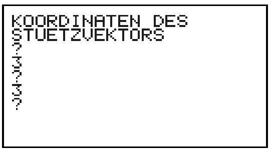
10 BE

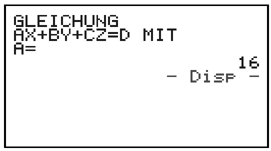
Erwartungsbild zu Aufgabe B1: Geometrie /Algebra

a) Gleichung der Ebene E in Parameterform z.B.:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

Umformen in die allgemeine Form der Ebenengleichung mit GTR-Programm „Ebene“ liefert:





$16x - 48y + 40z = -176$; Vereinfacht: $2x - 6y + 5z = -22$

Ermittlung des Wertes a:

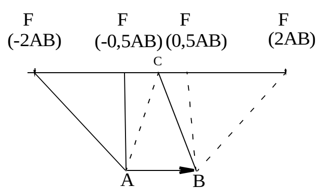
$2(-4) - 6 \cdot 2a + 5a = -8 - 7a = -22$

$-14 = -7a$; $\quad a = 2 \qquad \Rightarrow P_2(-4; 4; 2)$

b) Die Koordinaten des zu einem Punkt F gehörenden Ortsvektors $\overrightarrow{OF}$ erhält man, indem man zum Ortsvektor $\overrightarrow{OC}$ zweimal den Vektor $\overrightarrow{AB}$ addiert.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow F(5; 17; 14)$$

Es gibt genau vier derartige Trapeze.
Begründung:
Alle vier Punkte liegen auf einer zur Geraden durch A und B parallelen Geraden durch den Punkt C. Vom Punkt C aus kann in beide Richtungssinne dieser Geraden jeweils das Doppelte bzw. die Hälfte der Strecke angetragen werden.



Beschreibung:
Der gesuchte Punkt sei G. Die Koordinaten des Punktes G können ermittelt werden, indem man z.B. an den Ortsvektor $\overrightarrow{OC}$ die Hälfte des Vektors $\overrightarrow{AB}$ addiert.

Man erhält den zum Punkt G gehörigen Ortsvektor $\overrightarrow{OG}$. Dessen Koordinaten entsprechen den Koordinaten des Punktes G.
Oder:
Alle vier Punkte mit den geforderten Eigenschaften liegen auf der zur Strecke $\overline{AB}$ parallelen Geraden h durch den Punkt C.

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Durch Einsetzen der Werte – 2; – 0,5 ; 0,5; 2 für den Parameter t kann man die Koordinaten aller vier Punkte berechnen. Für Punkt G darf man aber nicht 2 verwenden, da der Punkt G vom Punkt F verschieden sein soll.

Zum Vergleich:
Koordinaten aller vier Punkte:(2; 11; 8), (0; 7; 4), (5; 17; 14), (–3; 1; –2)

c) $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.

Es ist auch möglich, den Mittelpunkt M der Diagonalen durch die Punkte A und C (M(2; 6; 2)) zu berechnen und mit dem Mittelpunkt der Diagonalen durch die Punkte B und D zu vergleichen. Da beide übereinstimmen, halbieren sich die Diagonalen und das Viereck ist ein Parallelogramm.

Flächeninhalt:
Lösungsvariante 1:

Die Grundseite des Parallelogramms ist $|\overline{AB}| = 6$ (Programm „Abstand“).
Die Höhe ist der Abstand des Punktes C von der Geraden durch A und B.
Eine zur Geraden $g(AB)$ senkrechte Ebene durch den Punkt C hat die Gleichung $2x + 4y + 4z = d$.
Mit Koordinaten des Punktes C erhält man $2x + 4y + 4z = 62$.

Schnitt der Ebene mit der Geraden $g(AB)$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

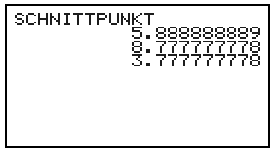
$$2(3 + 2t) + 4(3 + 4t) + 4(-2 + 4t) = 6 + 4t + 12 + 16t - 8 + 16t = 62$$

$$10 + 36t = 62$$

$$36t = 52$$

$$-\frac{13}{9} = t \Rightarrow \text{Lotfußpunkt } L(5{,}\overline{8};\ 8{,}\overline{7};\ 3{,}\overline{7})$$

Schneller kann der Lotfußpunkt mithilfe des Programms „SGE“ (Schnitt-Gerade-Ebene) ermittelt werden.



Der Abstand des Lotfußpunktes vom Punkt C beträgt 5,37 LE (Programm „Abstand“).

Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt damit

$$A = gh = 6 \cdot 5{,}37 \approx 32{,}2$$

Lösungsvariante 2:

Mithilfe des Programms „Flaeche“ kann der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks im Raum bei Eingabe der Koordinaten der Eckpunkte ermittelt werden:

$$A(ABD) = 16{,}124;\ A(DBC) = 16{,}124$$

Gesamtflächeninhalt: $A \approx 32{,}2$ FE

Lösungsvariante 3:

$$A = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \sin\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$$

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \left| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{36}} \right| = \frac{4}{9} \Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 63{,}61°$$

$$A = \sqrt{36} \cdot \sqrt{36} \cdot \sin 63{,}61° \approx 32{,}2 \text{ FE}$$

Volumen:

$$V = \frac{1}{3}A_G h\,;\; V = \frac{1}{3} \cdot 32,3 \cdot \sqrt{65} \approx 86,7 \text{ (VE)}$$

Die Spitzen dieser Pyramiden liegen auf einer zur Geraden g parallelen Geraden l durch den Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche.
Da sich die Diagonalen im Parallelogramm halbieren, ist das der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$, $M_{\overline{AC}}(2; 6; 2)$.

$$t\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Koordinaten der Spitzen: $S_i(2 + 2t; 6 - 6t; 2 + 5t)$

Mit Beachtung der Höhe $\sqrt{65}$ folgt:

$$d(M_{\overline{AC}}S_i) = \sqrt{(2 + 2t - 2)^2 + (6 - 6t - 6)^2 + (2 + 5t - 2)^2}$$

$$= \sqrt{4t^2 + 36t^2 + 25t^2} = \sqrt{65t^2} = \sqrt{65}$$

$$65t^2 = 65 \Rightarrow t = \pm 1$$

Einsetzen von t in die Gleichung der Geraden l ergibt: $S_1(4; 0; 7)$; $S_2(0; 12; -3)$

Bewertungsvorschlag:

a) Gleichung der Ebene in Parameterform; Gleichung der Ebene in parameterfreier Form; Wert das Parameters a; Koordinaten des speziellen Punktes P — 4 BE

b) Ansatz für Koordinaten eines Punktes F; Koordinaten eines Punktes F; Anzahl und Begründung; Beschreibung — 4 BE

c) Ansatz für Nachweis; Nachweis des Parallelogramms; Flächeninhalt des Parallelogramms; Volumen; Gleichung der Geraden durch die Pyramidenspitzen; Werte des Parameters; Koordinaten der Punkte — 7 BE

15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B2: Geometrie /Algebra

a) Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$

Explizite Form der Geradengleichung: $m = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + n$

Mit Punkt B folgt: $5 = -\frac{1}{3} \cdot (-3) + n \Rightarrow n = 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 4$

Schnitt Gerade g mit Kreis k:

Kreisgleichung: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

$25 = (x+2)^2 + \left(-\frac{1}{3}x + 4 - 3\right)^2 = x^2 + 4x + 4 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = \frac{10}{9}x^2 + \frac{10}{3}x + 5$

$0 = \frac{10}{9}x^2 + \frac{10}{3}x - 20$

$x_1 = 3\,;\ x_2 = -6$ (Lösung mit GTR) $\Rightarrow P_1(3; 3); P_2(-6; 6)$

Da Gerade und Kreis zwei gemeinsame Punkte besitzen, ist die Gerade Sekante des Kreises.

b) Koordinaten des Punktes C: $C(-5; y_c)$

$(-5+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

$9 + y^2 - 6y + 9 = 25$

$y^2 - 6y - 7 = 0 \Rightarrow y_1 = 7\,;\ y_2 = -1$ entfällt (Lösung mit GTR)

$\Rightarrow C(-5; 7)$

Einen Eindruck von der Lage des Kreises k, der Tangente t und der Geraden g vermittelt die Darstellung mit dem GTR:

Tangente t:

$(x+2)(-3) + (y-3) \cdot 4 = 25$

$-3x - 6 + 4y - 12 = 25$

$\Rightarrow \qquad -3x + 4y = 43\,;\ y = \frac{3}{4}x + \frac{43}{4}$ oder $y = 0,75x + 10,75$

Schnittpunkt der Geraden g und t:

$$\frac{3}{4}x + \frac{43}{4} = -\frac{1}{3}x + 4$$

$$9x + 129 = -4x + 48$$

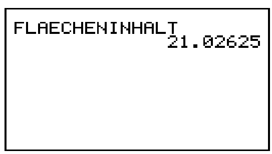
$$13x = -81 \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{81}{13} \approx -6,23\,;$$

$$y = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{81}{13}\right) + 4 = \frac{79}{13} \approx 6,08\,;\ \text{Schnittpunkt } S(-6{,}23;\ 6{,}08)$$

Flächeninhalt des Dreiecks:
Lösungsvariante 1:
Grundlinie: $10,75 - 4 = 6,75$ Höhe: 6,23

$$A = \frac{6,23 \cdot 6,75}{2} \approx 21,03 \ \text{FE}$$

Lösungsvariante 2:
Nutzung eines GTR-Programms, welches den Flächeninhalt eines durch drei-Punkte gegebenen Dreiecks ermittelt:

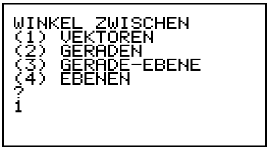


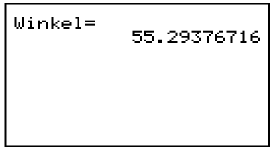
Nachweis, dass das Dreieck nicht rechtwinklig ist:
Die Schnittwinkel der Geraden g und t mit der y-Achse können nicht rechte Winkel sein, weil dann der Anstieg dieser Geraden 0 sein müsste, was er aber nach den Geradengleichungen nicht ist.
Es genügt, den Winkel am Schnittpunkt S zu untersuchen.

Lösungsvariante 1:
Bezeichnet man die Schnittpunkte der Geraden g und t mit der y-Achse mit P_1 und P_2 so ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{SP_1}$ und $\overrightarrow{SP_2}$ zu bestimmen.

$$\overrightarrow{SP_1} = \begin{pmatrix} 6,23 \\ 4,68 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{SP_2} = \begin{pmatrix} 6,23 \\ -2,07 \end{pmatrix} \quad \sphericalangle(\overrightarrow{SP_1};\overrightarrow{SP_2}) = 55,3^\circ$$

Ermittlung des Winkels mithilfe eines GTR-Programms zur Bestimmung des Winkels zwischen Vektoren:





Da auch dieser Schnittwinkel kein rechter Winkel ist, ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

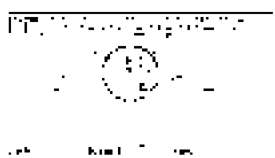
Lösungsvariante 2:
Bestimmung des Schnittwinkels von Geraden

$$\tan(\sphericalangle(t;g)) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{13}{9}$$

$$\tan(\sphericalangle(t;g)) = \frac{13}{9} \Rightarrow \sphericalangle(t;g) = 55{,}30°$$

Da auch dieser Schnittwinkel kein rechter Winkel ist, ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

c) Die GTR-Abbildung veranschaulicht die Lösungsidee.



Gleichung der Senkrechten vom Koordinatenursprung O zur Geraden g:
s: $y = 3x$
Schnitt der Senkrechten s mit der Geraden g:

$$3x = -\frac{1}{3}x + 4$$

$$\frac{10}{3}x = 4 \Rightarrow x = 1{,}2\,;\ y = 3{,}6$$ und Lotfußpunkt L(1,2; 3,6)

Koordinaten des Punktes D: $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 7{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow D(2{,}4; 7{,}2)$

d) Es muss gelten: $\overrightarrow{P_zB} \cdot \overrightarrow{P_zA} = 0$ Mit $\overrightarrow{P_zB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_zA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -z \end{pmatrix}$ folgt

$-4 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + z^2 = 0$

$-20 + 4 + z^2 = 0$

$z^2 = 16 \Rightarrow z_{1;2} = \pm 4$ und $P_{-4}(1; 1; -4)$, $P_4(1; 1; 4)$

Es bietet sich an, zur Kontrolle ein GTR-Programm zur Bestimmung der Winkel zwischen Vektoren zu nutzen.

Bewertungsvorschlag:

a)	Gleichung der Geraden g; Gleichung des Kreises k; Ansatz für gegenseitige Lage von Gerade und Kreis; Schlussfolgerung; Koordinaten der gemeinsamen Punkte	5 BE
b)	y-Koordinate des Punktes C; Gleichung der Tangente t; Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g und t; Flächeninhalt; Nachweis, dass das Dreieck nicht rechtwinklig ist	5 BE
c)	Gleichung der Senkrechten zur Geraden g; Ansatz für Koordinaten des Punktes D; Koordinaten des Punktes D	3 BE
d)	Ansatz für Werte z; Werte z	2 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B 3: Geometrie /Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

a)

$6 = 11 - 3t \Rightarrow t = \frac{5}{3}$

$-2 = 4 + 4t \Rightarrow t = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ Widerspruch,
der Punkt C liegt auf keiner der Geraden g_a.

b)

Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$

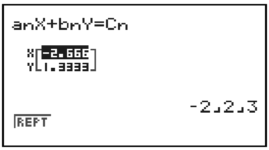
Gleichsetzen der Gleichungen der Geraden h und g_a liefert:

(I) $\quad -1-3r = 11-3t \Rightarrow -3r+3t = 12$

(II) $\quad 4-2r = 4+4t \Rightarrow -2r-4t = 0$

(III) $\quad 3-2r = a+6t$

Das Gleichungssystem aus den Gleichungen (I) und (II) wird mithilfe des GTR gelöst:



$r = -\frac{8}{3}$; $t = \frac{4}{3}$

Einsetzen in Gleichung (III) liefert:

$-2r-6t = -3+a$

$\frac{16}{3} - \frac{24}{3} = -3+a$

$-\frac{8}{3} = -3+a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

Begründung:

Es gibt, wie eben gezeigt, genau einen Wert a, für den die Geraden g_a und h in genau einem Punkt einander schneiden. Dieser Fall trifft für a = 2 nicht zu.

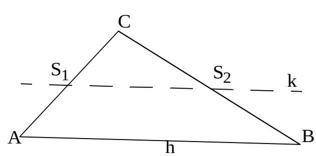
Ein Vergleich der Richtungsvektoren der Geraden g_2 und h zeigt sofort, dass diese nicht linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ und } \lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

Die Geraden h und g_2 sind weder parallel noch identisch.

Die Geraden h und g_2 sind also windschief.

c) *Lösungsvariante 1:*
Man berechnet die Koordinaten des Schnittpunktes S_1 der Geraden k und der Geraden durch die Punkte A und C.



$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R}) \; ; \; g_{\overline{AC}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (v \in \mathbb{R})$$

Durch Gleichsetzen berechnet man die Parameter u und v und erhält durch Einsetzen in eine Gleichung einer Geraden die Koordinaten des Schnittpunktes. Elegant ist die Lösung mithilfe eines GTR-Programms, welches die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden berechnet:

```
Gerade - Gerade
Gerade 1
x1?
1
y1?
0
```

```
Schnittpunkt:
   2⌟1⌟2
S= 1
   5
Winkel= 65.77°
```

$S_1(2{,}5;\ 1;\ 5)$

Da die Geraden k und h parallel sind, sind die Dreiecke ABC und CS_1S_2 zueinander ähnlich.

Mit dem Programm „Abstand“ ermittelt man die Längen der Strecken.

Da beide eine Länge von 5,025 haben, ist S_1 Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Der Ähnlichkeitsfaktor für die Dreiecke CS_1S_2 und ABC ist 2. Die Flächeninhalte verhalten sich also wie 1 zu $2^2 = 4$

Das Verhältnis des Flächeninhaltes des Dreiecks CS_1S_2 zum Flächeninhalt des Trapezes ist deshalb: 1:3.

Lösungsvariante 2:

Man berechnet auch die Koordinaten des Schnittpunktes S_2 der Geraden k mit der Geraden durch B und C. Dieser Punkt entspricht dem Punkt P(1; 0; 4).

Man ermittelt den Winkel $ACB = 17{,}76°$.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \sin 17{,}76° \approx \frac{1}{2} \cdot 10{,}05 \cdot 12{,}33 \cdot 0{,}3050 = 18{,}9$$

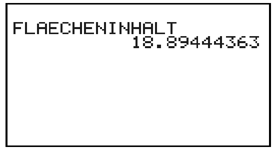
$$A_{CS_1S_2} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CS_1}| \cdot |\overrightarrow{CS_2}| \cdot \sin 17{,}76° \approx \frac{1}{2} \cdot 5{,}025 \cdot 6{,}164 \cdot 0{,}3050 = 4{,}724$$

$$\frac{A_{CS_1S_2}}{A_{ABC}} = \frac{4{,}7724}{18{,}9} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

Da sich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke wie 1: 4 verhalten, ist das gesuchte Verhältnis von Dreiecks- zu Trapezfläche 1:3.

Lösungsvariante 3:

Man berechnet die Koordinaten der Schnittpunkte S_1 und S_2 wie in Lösungsvariante 2. Danach nutzt man das Programm „Flaeche“, welches den Flächeninhalt eines Dreiecks aus drei gegebenen Punkten berechnet.



$A_{CS_1S_2} \approx 4,724$; $A_{ABC} \approx 18,9$

Das Verhältnis beträgt 1:4.

Da sich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke wie 1: 4 verhalten, ist das gesuchte Verhältnis von Dreiecks- zu Trapezfläche 1:3.

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis	1 BE
b)	Gleichung der Geraden h; Ansatz für Wert a; Wert a; Begründung, dass die Geraden nicht parallel oder identisch sind; Begründung, dass sich die Geraden nicht schneiden und Schlussfolgerung	5 BE
c)	Koordinaten eines Schnittpunktes der Geraden k mit einer Dreiecksseite; Flächeninhalt A_1 ; Ansatz für Verhältnis; Verhältnis	4 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B 4: Geometrie /Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

a) Nachweis des Trapezes:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} \frac{85}{13} \\ \frac{17}{13} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\lambda \cdot 5 = \frac{85}{13} \Rightarrow \lambda = \frac{17}{3}; \lambda \cdot 1 = \frac{17}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{17}{3}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DC} \Rightarrow \text{ABCD ist ein Trapez.}$$

b) Wenn A, B, C und D Eckpunkte eines Trapezes sind, so müssen sie auf dem in der x-y-Ebene liegenden Kreis k_1 liegen.

Dieser Kreis ist auch Umkreis des Dreieks ABC, der Mittelpunkt ist also Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten.

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ hat die Koordinaten $\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Ein zu dieser Strecke senkrechter Vektor ist z.B.: $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ hat also die Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BC}$ verläuft parallel zur x-Achse und hat die Gleichung $y = 3$.

Gleichsetzen von y liefert: $3 = 0,5 + 5t \Rightarrow t = 0,5$; M(3; 3)

Radius des Kreises: Abstand $d(M, A)$ der Punkte M und A liefert z.B. mit dem GTR-Programm „Abstand“ :

$d(M, A) = \sqrt{13}$

Gleichung des Kreises k_1 : $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$

Nachweis, dass der Punkt D auf dem Kreis k_1 liegt:

$$\left(-\frac{7}{13} - 3\right)^2 + \left(\frac{48}{13} - 3\right)^2 = \left(-\frac{7}{13} - \frac{39}{13}\right)^2 + \left(\frac{48}{13} - \frac{39}{13}\right)^2 = \left(-\frac{46}{13}\right)^2 + \left(-\frac{9}{13}\right)^2$$

$$= \frac{2197}{169} = 13$$

Daraus folgt: Der Punkt D liegt auf dem Kreis und das Viereck ABCD ist ein Sehnenviereck.

Wenn der Punkt F vom Punkt D verschieden und ABCF ein Trapez sein soll, muss gelten: $\overline{AF} \parallel \overline{BC}$. Der Punkt F liegt also auf einer Geraden h, die durch den Punkt A und parallel zur Strecke $\overline{BC}$ verläuft. Gerade h: $x = 1$

Schnitt des Kreises k_1 mit der Geraden h:

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$ und $x = 1$

$4 + y^2 - 6y + 9 = 13$ (*)

$y^2 - 6y = 0$ $y_1 = 0$ entfällt; $y_2 = 6$ (Lösung mit GTR) $\Rightarrow$ F(1; 6)

Lösungsvariante:

Aus (*) folgt: $(y-3)^2 = 9 \Rightarrow |y-3| = 3 \Rightarrow y_1 = 0 \;;\; y_2 = 6$.

c) Der Kreis k_2 hat den Radius $\overline{OB} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$.

Flächeninhalt der Grundfläche des Kreiskegels: $A_k = \pi r^2 = 37\pi$

Volumen: $V = \frac{1}{3}A_K h = \frac{1}{3} \cdot 37\pi h = 111\pi$

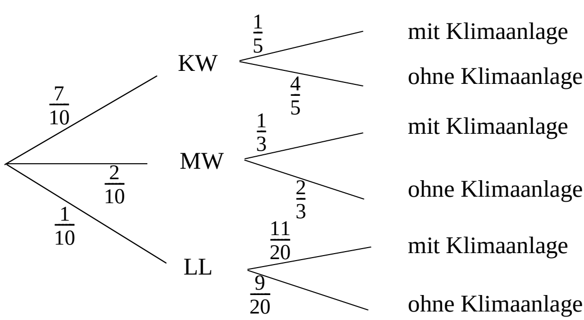
Höhe des Kreiskegels: $h = \dfrac{111\pi}{\frac{37}{3}\pi} = 9 \Rightarrow z_1 = 9$ und $z_2 = -9$

Bewertungsvorschlag:

a) Ansatz für Nachweis; Nachweis	2 BE
b) Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises ; Gleichung des Kreises ; Nachweis des Sehnenvierecks; Ansatz für Koordinaten des Punktes F; Koordinaten des Punktes F	5 BE
c) Radius des Kreises ; Ansatz für Werte z; Werte z	3 BE
	10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 1: Stochastik

a) Der Zufallsversuch wird mithilfe eines Baumdiagramms analysiert.



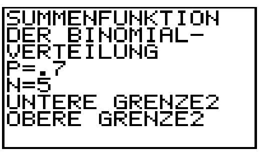
$$P(A) = \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\cdot\frac{11}{20} = \frac{157}{60} \approx 0{,}2617$$

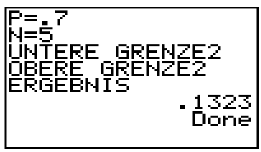
$$P(B) = \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{15} \approx 0,1333$$

$$P(C) = \frac{1}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{5} = \frac{23}{75} \approx 0,3067$$

Das Ereignis C beinhaltet die Teilereignisse: "Der Kunde kauft einen Luxusliner" und "Der Kunde kauft einen Kleinwagen mit Klimaanlage oder einen Mittelklassewagen mit Klimaanlage".

b) X ist binomialverteilt mit n = 5 und p = 0,7.
Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten mit einem GTR-Programm, z.B. dem Programm "SUMBIN" liefert:





Verteilung der Zufallsgröße:

K	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,0024	0,0284	0,1323	0,3087	0,3602	0,1681

Traditioneller Lösungsweg:
Ermittlung der Einzelwahrscheinlichkeiten nach der Formel:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Zum Beispiel für $k = 2 : P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^3 = 0,1323$

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0,7 = 3,5$

c) *Lösungsvariante 1:*
Aus einer Urne mit 29 Kugeln werden ohne Zurücklegen 7 Kugeln gezogen.
Die Kugeln sind wie folgt zusammengesetzt:

- 5 gelbe Kugeln (anstelle der Gäste, die bereits einen Wagen des Herstellers fahren)
- 24 schwarze Kugeln (anstelle der Gäste, die noch keinen Wagen des Herstellers fahren)

Nach der Ziehung wird festgestellt, wie viele der gezogenen Kugeln gelb sind.
Nach hinreichend großer Anzahl von Ziehungen ist die ermittelte relative Häufigkeit für genau zwei gezogene gelbe Kugeln ein geeigneter Schätzwert für die interessierende Wahrscheinlichkeit.

Lösungsvariante 2:
Mithilfe eines GTR werden 7 Zufallszahlen von 1 bis 29 ermittelt. Die Zahlen 1 bis 5 stehen dabei für Gäste, die bereits einen Wagen des Herstellers fahren, die Ziffern 6 bis 29 stehen für Gäste, die noch keinen Wagen des Herstellers fahren.
Danach wird festgestellt, wie oft bei diesen Zahlen die Ziffern 1 bis 5 auftreten.
Ist das genau zweimal der Fall, wird die "Ziehung" als Treffer gewertet.
Der Vorgang ("Ziehung") wird hinreichend oft wiederholt.
Nach hinreichend großer Anzahl von Ziehungen ist die ermittelte relative Häufigkeit für genau zwei gezogene Zahlen aus den Ziffern 1 bis 5 ein geeigneter Schätzwert für die interessierende Wahrscheinlichkeit.

Befehle zum Erzeugen von Zufallszahlen von 1 bis 29:

TI-83:	int(rand*29)+1
Casio 9850 G:	Int(Ran#x29)+1
SHARP EL 9600:	int(random*29)+1

Lösungsvariante 3:
Die in Lösungsvariante 2 beschriebene Simulation wird mithilfe eines GTR-Programms ausgeführt.
Nachdem der Bildschirm gelöscht ist, wird die Anzahl der "Ziehungen" n eingegeben. Danach werden Zufallszahlen wie oben beschrieben ermittelt. Ist die ermittelte Zahl kleiner 6, so wird sie als Erfolg e gezählt. Diese Teilziehung wird 7-mal wiederholt. Ist dann die Anzahl der Erfolge genau 2, so zählt die Ziehung als Treffer t. Die Anzahl der Treffer t wird nach jeder Ziehung durch die Nummer der Ziehung i dividiert und so die relative Häufigkeit h ermittelt. Der jeweilige Punkt mit den Koordinaten (i; h) wird geplottet. Ist i noch kleiner als n, erfolgt die nächste Ziehung. Die entstehende Punktmenge wird mit TRACE untersucht und ein Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ermittelt.

Programm:
(Hier TI-92, aber mit entsprechender Syntax auf jedem GTR lauffähig)

```
Prgm
0 → t
1 → i
0 → e
ClrDraw
ClrIO
Input n
- .1 → xmin
n → xmax
- .1 → ymin
1.1 → ymax

Lbl o
1 → q
0 → e
Lbl p
rand(29) → z
If z < 6 Then
e+1 → e
EndIf
q+1 → q
If q < 8 Then
Goto p
EndIf

If e=2 Then
t+1 → t
EndIf
t/i → h
PtOn i, h
i+1 → i
If i < n Then
Goto o
EndIf
EndPrgm
```

Abarbeitung des Programms:

Ein Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 0,26.

Hinweis: Vom Prüfungsteilnehmer genügt hier eine verbale Beschreibung des Programms (siehe oben), ein vollständiges LISTING und ein Ausdruck werden nicht erwartet.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D:

Es gibt $\binom{29}{7}$ Möglichkeiten, 7 Gewinner aus 29 Gästen zu ziehen. Von den 5 Gästen, die bereits einen Wagen des Herstellers fahren, können 2 Gewinner auf $\binom{5}{2}$ verschiedene Möglichkeiten gezogen werden. Von den übrigen 24 Gästen können 5 Gewinner auf $\binom{24}{5}$ verschiedene Möglichkeiten gezogen werden.

Zum Ereignis D gehören also $\binom{5}{2} \cdot \binom{24}{5}$ verschiedene Ergebnisse.

Da es sich um einen LAPLACE-Versuch handelt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(D) = \frac{\text{Anzahl der zum Ereignis D gehörenden Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

$$= \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{24}{5}}{\binom{29}{7}} \approx 0,2723$$

Bewertungsvorschlag:

a) Wahrscheinlichkeit P(A); Wahrscheinlichkeit P(B);
Wahrscheinlichkeit P(C) — 3 BE

b) zwei Wahrscheinlichkeiten; Verteilung der Zufallsgröße; Erwartungswert — 3 BE

c) Beschreibung des Zufallsexperiments; Aussage zur relativen Häufigkeit als Schätzwert der Wahrscheinlichkeit; Ansatz für Wahrscheinlichkeit P(D);
Wahrscheinlichkeit P(D) — 4 BE

10 BE

Erwartungsbild Aufgabe C 2 : Stochastik

a) In der Urne befinden sich 4 weiße, 5 schwarze und 3 gelbe Kugeln, also insgesamt 12. Es wird ohne Zurücklegen gezogen.

$$P(A) = \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{44} \approx 0,1136$$

$$P(B) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{19}{66} \approx 0,2879$$

$$P(C) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22} \approx 0,3182$$

Da das Ereignis C am wahrscheinlichsten ist, ist Susannes Vermutung falsch.

b) Analyse des Zufallsversuches:
Beim dreimaligen Werfen dieses Tetraeders können folgende Zahlentripel ermittelt werden.

	Summe		Summe		Summe		Summe
1,1,1	3	2,1,1	4	3,1,1	5	4,1,1	6
1,1,2	4	2,1,2	5	3,1,2	6	4;1;2	7
1,1,3	5	2,1,3	6	3,1,3	7	4,1,3	8
1,1,4	6	2,1,4	7	3,1,4	8	<u>4,1,4</u>	<u>9</u>
1,2,1	4	2,2,1	5	3,2,1	6	4,2,1	7
1,2,2	5	2,2,2	6	3,2,2	7	4,2,2	8
1,2,3	6	2,2,3	7	3,2,3	8	<u>4,2,3</u>	<u>9</u>
1,2,4	7	2,2,4	8	<u>3,2,4</u>	<u>9</u>	<u>4,2,4</u>	<u>10</u>
1,3,1	5	2,3,1	6	3,3,1	7	4,3,1	8
1,3,2	6	2,3,2	7	3,3,2	8	<u>4,3,2</u>	<u>9</u>
1,3,3	7	2,3,3	8	<u>3,3,3</u>	<u>9</u>	<u>4,3,3</u>	<u>10</u>
1,3,4	8	<u>2,3,4</u>	<u>9</u>	<u>3,3,4</u>	<u>10</u>	<u>4,3,4</u>	<u>11</u>
1,4,1	6	2,4,1	7	3,4,1	8	<u>4,4,1</u>	<u>9</u>
1,4,2	7	2,4,2	8	<u>3,4,2</u>	<u>9</u>	<u>4,4,2</u>	<u>10</u>
1,4,3	8	<u>2,4,3</u>	<u>9</u>	<u>3,4,3</u>	<u>10</u>	<u>4,4,3</u>	<u>11</u>
<u>1,4,4</u>	<u>9</u>	<u>2,4,4</u>	<u>10</u>	<u>3,4,4</u>	<u>11</u>	<u>4,4,4</u>	<u>12</u>

Alle Tripel werden mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen. Bei den unterstrichenen Tripeln ist die Summe größer als 8. Das ist in 20 von 64 Tripeln der Fall.
Die Wahrscheinlichkeit, eine Augenzahl größer als 8 zu ermitteln und damit 20 Pfennige ausgezahlt zu bekommen ist also $\frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.
Die Zufallsgröße X (Gewinn des Spielers) hat damit folgende Verteilung:

x_i	0,20 DM	– 0,25 DM
$P(X) = x_i$	$\frac{20}{64}$	$\frac{44}{64}$

Gewinn für ein Spiel: $0,20 \cdot \frac{20}{64} + (-0,25) \cdot \frac{44}{64} \approx -0,1094$

Gewinn für zehn Spiele in DM: 10 · (– 0,1094 DM) = – 1,09 DM

Gerechtes Spiel: $E(X) = 0$

$$0 = 0,20 \cdot \frac{20}{64} + a \cdot \frac{44}{64}$$

$$0,20 \cdot \frac{20}{64} = -a \cdot \frac{44}{64}; \qquad a = -0,09$$

Der Spieler hat bei gerechtem Spiel 9 Pfennig pro Spiel einzuzahlen.

c) Analyse des Zufallsversuches: Die 7 Karten enthalten 4 mal „Bube“ (B) und dreimal „Dame“ (W). Es wird mit Zurücklegen gezogen.
Zum Ereignis D gehören die Fälle (B,W,W), (W,B,W) und (W,W,B).

$$P(D) = 3 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{108}{343} \approx 0,3149$$

$$P(E) = P(W, W, W) + P(B, B, B) = \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^3 \approx 0,2653$$

Der Spieler sollte sich für Ereignis D entscheiden, da dieses wahrscheinlicher ist.

Bewertungsvorschlag:

a) Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses; alle Wahrscheinlichkeiten; Schlussfolgerung	3 BE
b) Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X; Ansatz für Erwartungswert; erwarteter Gewinn bei 10 Spielen; Beitrag für gerechtes Spiel	4 BE
c) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D; Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E; Entscheidung und Begründung	3 BE
	10 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1999 / 2000

Gymnasium

Sachsen-Anhalt

Hinweis:
Der Prüfling hatte nach Empfehlung durch die Lehrkraft je eine Aufgabe aus den Gebieten G 1, G 2 und G 3 zur Bearbeitung auszuwählen.

Gebiet G1: Analysis /Aufgabe 1.1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Ihr Graph sei mit G bezeichnet.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Null- und Polstellen, auf ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ sowie den Graphen G auf Extrempunkte und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Lage und Art.
Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $-6 \leq x \leq 6$.

b) Im Punkt $P(-4|\, f(-4))$ wird an den Graphen der Funktion f eine Tangente t_1 gelegt.
Zeigen Sie, dass diese Tangente die y-Achse im Punkt $S(0|\,-2{,}5)$ schneidet.
Es existiert an den Graphen G genau eine Tangente t_2, die zur Tangente t_1 parallel verläuft. Ihr Berührungspunkt mit dem Graphen G sei der Punkt Q.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q.
(Ergebnis zur Kontrolle: $Q(4|\, 2{,}25)$)

c) Eine Gerade schneide den Graphen G in den Punkten Q (aus Teilaufgabe b)) und $R(0{,}25|\, 2{,}25)$. Diese Gerade und der Graph G schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

Gebiet G1: Analysis /Aufgabe 1.2

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{9x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Der Graph sei mit G bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass der Koordinatenursprung O ein Punkt des Graphen G ist.
Ermitteln Sie Art und Lage des lokalen Extrempunktes des Graphen G.
Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 6$.

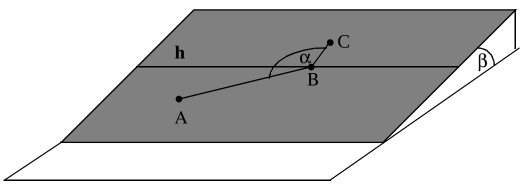
b) Im Punkt $P(2|\, f(2))$ soll die Tangente t an den Graphen G gelegt werden. Sie schneidet die x-Achse im Punkt Q und die y-Achse im Punkt R.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t und bestimmen Sie die Koordinaten

der Punktes Q.
Eine Parallele zur y-Achse durch den Punkt P schneidet die x-Achse im Punkt T.
Weisen Sie nach, dass sich die Maßzahlen der Flächeninhalte der Dreiecke OTP, OPR und OQR wie 1 : 2 : 4 verhalten.

c) Die Punkte S(u| f(u)), V(u| 0), mit u > 0 und O(0| 0) bilden jeweils ein Dreieck SOV. Genau eines dieser Dreiecke hat einen maximalen Flächeninhalt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S für diesen Fall.

Gebiet G2: Analytische Geometrie /Aufgabe 2.1

Auf einer Böschung sollen die Geländepunkte A und B sowie B und C durch geradlinige Wege verbunden werden. Die Lage dieser Punkte ist in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben: A(– 4| 2| 1), B(– 3| 7| 2), C(– 5| 9| 3).
Die x_1x_2-Ebene sei die Horizontalebene. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 10 m.



a) Berechnen Sie die Gesamtlänge der Wege sowie das Gradmaß des Winkels a zwischen den Wegen.

b) Die Lage der Böschung kann in dem zu betrachtenden Bereich durch eine Ebene E charakterisiert werden.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene E.

c) Weisen Sie nach, dass der Punkt $\overline{B}$(0| 10| 2) auf der gleichen Höhenlinie der Böschung liegt wie der Geländepunkt B, und geben Sie eine Gleichung dieser Höhenlinie an. (Anmerkung: Eine Höhenlinie besteht aus Geländepunkten mit gleicher Höhe.)
Zeigen Sie, dass der Weg zwischen B und C orthogonal zur Höhenlinie h verläuft.
Ermitteln Sie die Höhendifferenz zwischen den Punkten B und C, und berechnen Sie das Gradmaß des Neigungswinkels b der Böschung (bez. der Horizontalebene).

Gebiet G2: Analytische Geometrie /Aufgabe 2.2

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte
A(2| 1| – 3), B(0| 3| 1), C(4| – 2| 0), D (6| – 4| – 4) und P (11| 8| – 2)
sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 26 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

a) Die Punkte A, B, C und D liegen in einer Ebene E und bilden das Viereck ABCD. Untersuchen Sie jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr ist:
– Das Viereck ABCD ist ein Trapez.
– Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.
– Das Viereck ABCD ist ein Rechteck.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an.
Die Punkte A und P bestimmen eine Gerade h. Weisen Sie nach, dass die Gerade h senkrecht zur Ebene E verläuft.

b) Es gibt Punkte Q, R und S, so dass der Körper ABCDPQRS ein gerades Prisma ist.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte Q, R und S.
(Ergebnis zur Kontrolle: S(15| 3| – 3))
Das Prisma ABCDPQRS wird von der Geraden g durchstoßen.
Weisen Sie nach, dass die Körperkante $\overline{SP}$ von der Geraden g geschnitten wird, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.

Gebiet G3: Wahrscheinlichkeitsrechnung /Aufgabe 3.1

Ein Firmenmitarbeiter fährt zum Hauptsitz der Firma regelmäßig auf der kürzeren Route A oder auf der längeren Route B. Die Wahl der Route erfolgt spontan. Aufgrund langjähriger Erfahrungen wird in der Regionalpresse die Staugefahr für die Route A mit 80 %, für die Route B mit 45 % angegeben. Bei der Jahresauswertung seines Fahrtenbuches stellt der Mitarbeiter fest, dass er sich bei durchschnittlich zwei Drittel aller Fahrten für die Route B entschieden hat.

a) Fertigen Sie für das Zufallsexperiment „Fahrten des Mitarbeiters“ ein Baumdiagramm an und tragen Sie die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten an den Pfaden ein.
Betrachten Sie dazu die folgenden Ereignisse:
A: Es wird die Route A gewählt.

B: Es wird die Route B gewählt.
S: Der Mitarbeiter gerät in einen Stau.
$\overline{S}$: Der Mitarbeiter gerät in keinen Stau.

Formulieren Sie die Wahrscheinlichkeiten P(S), $P_S(A)$ sowie $P_{\overline{S}}(B)$ in Worten und berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeiten.
(Hinweis: Für die Wahrscheinlichkeiten $P_S(A)$ bzw. $P_{\overline{S}}(B)$ ist auch die Schreibweise $P(A|\,S)$ bzw. $P(B|\,\overline{S})$ gebräuchlich.)

b) Berechnen Sie für die Route A und für die Route B jeweils die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der Mitarbeiter bei drei aufeinanderfolgenden Fahrten jedes Mal in einen Stau gerät.
Begründen Sie, warum ein BERNOULLI-Experiment vorliegt.

c) Bei einem BERNOULLI-Experiment trete ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit p ein.
Geben Sie jeweils einen Ausdruck zur Berechnung an, mit der dieses Ereignis bei n-maliger Durchführung des BERNOULLI-Experimentes
– genau k-mal
– mindestens k-mal
– höchstens k-mal
eintritt.

Gebiet G3: Analysis /Aufgabe 3.2

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = -x^3 + 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Der Graph sei mit G bezeichnet.

a) Der Graph G und der Graph der Funktion $g(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, begrenzen eine Fläche vollständig. Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper.
Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der beiden Graphen.
Ermitteln Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers.

b) Gegeben sind die Funktionen f_a durch $y = f_a(x) = -x^3 + ax^2$, $x, a \in \mathbb{R}$.
Jeder Graph der Funktionen f_a besitzt genau einen Wendepunkt.
Berechnen Sie die Anstiege der Geraden, die in den Wendepunkten W_a senkrecht zu den Graphen der Funktionen f_a verlaufen.

Gebiet G3: Analysis /Aufgabe 3.3

Gegeben sei in einem kartesischen Koordinatensystem eine Ellipse durch ihre Gleichung $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

a) Geben Sie die Ordinate des Ellipsenpunktes P(3| y > 0) an.
In diesem Punkt soll die Tangente an die Ellipse gelegt werden.
Beschreiben Sie hierfür ein Verfahren zur Konstruktion der Tangente und stellen Sie eine Gleichung für diese Tangente auf.

b) Untersuchen Sie die gegebene Ellipse und die Gerade g mit der Gleichung $x = \frac{25}{3}$ auf gemeinsame Punkte.
Zeigen Sie, dass für den Ellipsenpunkt P (aus Teilaufgabe a)), einen Haupt- sowie einen Nebenscheitelpunkt der Ellipse folgende Aussage gilt: Das Streckenverhältnis aus dem Abstand des jeweiligen Punktes zu einem Brennpunkt der Ellipse und seinem Abstand zur Geraden g ist konstant.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1:

a) Nullstellen und Polstellen von f:

Mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{(x-1)^2}{x}$ gilt für Nullstellen $u(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 1$,

für Polstellen $v(x) = 0 \;\Rightarrow x_P = 0$.

Verhalten im Unendlichen:

Es gilt für f(x) im Unendlichen

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x-2+\frac{1}{x}\right) = \pm\infty.$$

Art und Lage der Extrempunkte:

Es ist $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x} = x-2+\frac{1}{x} = x-2+x^{-1}$,

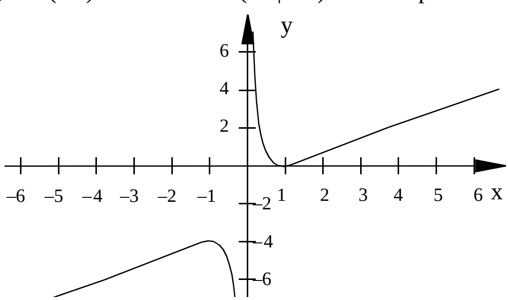
daraus folgt $f'(x) = 1-x^{-2}$ und $f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$. Die notwendige Bedingung für lokale Extrema ergibt $0 = \frac{x^2-1}{x^2}$, d.h., es muss gelten $x^2-1=0$.

Also: $x_{E_1} = 1;\ x_{E_2} = -1 \Rightarrow y_{E_1} = 0;\ y_{E_2} = -4$

Wegen $f''(x_{E_1}) = f''(1) = 2 > 0$ ist T(1| 0) ein Tiefpunkt,

wegen $f''(x_{E_2}) = f''(-1) = -2 < 0$ ist H(– 1| – 4) ein Hochpunkt.

Graph G:



b) Nachweis des Schnittpunktes der Tangente t_1 mit der y-Achse:

Im Punkt P(– 4| f(– 4)) existiert eine Tangente t_1: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ mit $x_0 = -4$ und $y_0 = f(-4) = -\frac{25}{4}$ und $f'(x_0) = 1 - x_0^{-2} = \frac{15}{16}$. Damit wird

t_1: $y + \frac{25}{4} = \frac{15}{16}(x+4) \Rightarrow y = \frac{15}{16}x - \frac{10}{4}$.

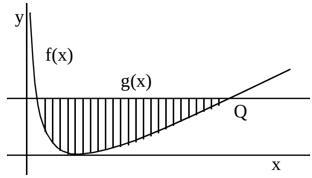
Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist also wie behauptet S(0| – 2,5).

Koordinaten des Berührungspunktes Q von Tangente t_2 mit dem Graphen G:

Der Anstieg der Tangente t_2 ist $m_{t_2} = m_{t_1} = \frac{15}{16}$. Im Berührungspunkt muss gelten: $f'(x_Q) = m_{t_2}$, also $1 - x_Q^{-2} = \frac{15}{16}$; dies hat die Lösung $x_Q = 4$; die zweite Lösung $x = -4$ gilt für die Tangente t_1. Für $x_Q = 4$ ist $y_Q = 2{,}25$, also Q(4| 2,25).

c) Flächeninhalt der Fläche zwischen Graph und einer gegebenen Geraden g:

Gerade g verläuft durch Q(4| 2,25) und R(0,25| 2,25) $\Rightarrow$ g: y = 2,25 für alle x



$$A = \int_{0,25}^{4} (g(x) - f(x))\,dx$$

$$= \int_{0,25}^{4} \left(2,25 - x + 2 - \frac{1}{x}\right) dx = \left[4,25x - \frac{1}{2}x^2 - \ln|x|\right]_{0,25}^{4}$$

$$= 9 - 2\ln 2 - \left(\frac{33}{32} + 2\ln 2\right) = \frac{255}{32} - 4\ln 2 \approx 5{,}2.$$

Der Flächeninhalt beträgt etwa 5,2 FE.

Bewertungsvorschlag:

a) Untersuchen der Funktion auf Nullstellen, Polstellen, Extrempunkte	14 BE
Zeichnen des Graphen	5 BE
b) Nachweisen des Schnittpunktes	4 BE
Ermitteln der Koordinaten von Q	6 BE
c) Berechnen des Flächeninhaltes	6 BE
	35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2:

a) Nachweis, dass O(0| 0) ein Punkt des Graphen ist:

Aus x = 0 folgt $y = f(0) = \frac{9 \cdot 0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$, d.h., O(0| 0) liegt auf G.

Art und Lage des Extrempunktes:

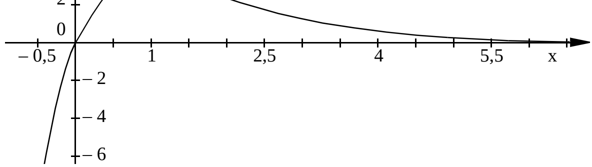
Aus $f(x) = \frac{9x}{e^x} = 9xe^{-x}$ folgt $f'(x) = 9e^{-x} + 9x(-1)e^{-x} = e^{-x}(9 - 9x)$ (1)

und $f''(x) = (-1)e^{-x}(9 - 9x) + e^{-x}(-9) = e^{-x}(-18 + 9x)$. (2)

Aus der notwendigen Bedingung für lokale Extrema $f'(x) = 0$ folgt, da $e^x \neq 0$ für alle x, somit gilt 9 – 9x = 0, d.h. $x_E = 1$, $y_E = \frac{9}{e} \approx 3{,}3$;

wegen $f''(x_E) = f''(1) = e^{-1}(-18 + 9) = -9e^{-1} < 0$ ist $H(1|\ \frac{9}{e})$ ein Hochpunkt.

Graph G:



b) Gleichung der Tangente t an den Graphen G im Punkt P:

Wegen $f(2) = \frac{18}{e^2}$ gilt für Punkt $P(2|\ \frac{18}{e^2})$; aus (1) folgt für den Anstieg von G im Punkt P: $f'(2) = e^{-2}(9 - 9 \cdot 2) = -\frac{9}{e^2}$

$\Rightarrow$ für die Tangentengleichung $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ergibt sich

$y - \frac{18}{e^2} = -\frac{9}{e^2}(x - 2)$ oder $y = -\frac{9}{e^2}x + \frac{36}{e^2}$.

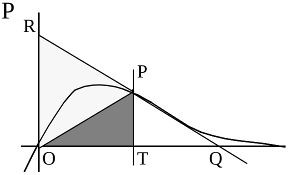
Koordinaten der Punkte P und R:

Aus $0 = -\frac{9}{e^2}x + \frac{36}{e^2}$ ergibt sich der Schnittpunkt Q(4| 0) mit der x-Achse;

aus x = 0 erhält man den Schnittpunkt $R(0|\ \frac{36}{e^2})$ mit der y-Achse.

Flächeninhalte der Dreiecke OTP, OPR und OQR:

Schnittpunkt einer Parallelen zur y-Achse durch P ist T(2| 0).



Wegen $x_T = 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2}x_Q$ und

$y_P = \frac{18}{e^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{e^2} = \frac{1}{2}y_R$ ergibt sich

$A_{\Delta TQP} = A_{\Delta OTP} = \frac{1}{4}A_{\Delta OQR}$ und folglich auch

$A_{\Delta OPR} = A_{\Delta OQR} - 2A_{\Delta OTP} = A_{\Delta OQR} - \frac{2}{4}A_{\Delta OQR} = \frac{2}{4}A_{\Delta OQR}$;

es gilt also $A_{\Delta OTP} : A_{\Delta OPR} : A_{\Delta OQR} = 1 : 2 : 4$.

c) Punkt S für maximales Dreieck SOV:

Es gilt für ein Dreieck SOV mit $S(u|\ f(u)) = S(u|\ \frac{9u}{e^u})$, V(u| 0) mit u > 0:

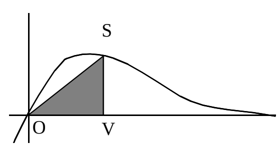
$A_{\Delta SOV} = \frac{1}{2}\overline{OV} \cdot \overline{VS} = \frac{1}{2}u \cdot f(u) = \frac{1}{2}\frac{9u^2}{e^u}$;

Notwendige Bedingung für einen maximalen Flächeninhalt ist A'(u) = 0,

also $A'(u) = \frac{1}{2}(18ue^{-u} + 9u^2(-1)e^{-u}) = \frac{1}{2}e^{-u}(18u - 9u^2) = 0$.

Daraus folgt für u: $0 = 18u - 9u^2 = 9u(2 - u)$, d.h. $u_1 = 0$ oder $u_2 = 2$.

Wegen der Bedingung u > 0 ist $S(2|\ \frac{18}{e^2})$.



Bewertungsvorschlag:

a) Zeigen, dass Koordinatenursprung zum Graphen gehört	1 BE
Ermitteln von Art und Lage der lokalen Extrempunkte	7 BE
Zeichnen des Graphen	5 BE
b) Ermitteln einer Gleichung der Tangente	3 BE
Ermitteln der Koordinaten des Punktes Q	3 BE
Nachweisen des Verhältnisses der Flächeninhalte	9 BE
c) Ermitteln der Koordinaten des Punktes S	7 BE
	35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1:

a) Gesamtlänge der Wege:

Es gilt: $l = \overline{AB} + \overline{BC} = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3+4 \\ 7-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5+3 \\ 9-7 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; damit ergibt sich

$l = \sqrt{1^2 + 5^2 + 1^2} + \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{27} + \sqrt{9} = 3(\sqrt{3} + 1) \approx 8{,}2.$

Eine Einheit entspricht 10 m, also beträgt die Gesamtlänge etwa 82 m.

Winkel α zwischen den Wegen:

Es gilt $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{9}} = \dfrac{-9}{9\sqrt{3}}$; daraus folgt: $\alpha \approx 125{,}3°$.

b) Gleichung der Böschungsebene E:

Weil die Punkte A, B, C nicht auf einer Geraden liegen, gilt E:

$\vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\,\overrightarrow{BA} + t\,\overrightarrow{BC}$, d.h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Nachweis, dass Punkte B und $\overline{B}$ auf der gleichen Höhenlinie liegen:

Es gilt B(– 3| 7| 2) und $\overline{B}$(0| 10| 2); weil für beide Punkte $x_3 = 2$ ist, haben beide Punkte dieselbe Höhe von 20 m.

Es ist nun noch zu prüfen, ob $\overline{B}$ in der Böschungsebene E liegt, d.h. ob es ein t und r gibt, so dass (*) $\overrightarrow{O\overline{B}} = \overrightarrow{OB} + r\,\overrightarrow{BA} + t\,\overrightarrow{BC}$, d.h.

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & 0 & = -3 - r - 2t \\ (2) & 10 & = 7 - 5r + 2t \\ (3) & 2 & = 2 - r + t \end{array}\right\} \text{ aus (3) folgt } r = t \text{, daraus mit (1) folgt } r = -1$$

Mit r = t = – 1 ist Gleichung (*) erfüllt, d.h. $\overline{B}$ liegt in der Ebene E.
Also liegt $\overline{B}$ auf der gleichen Höhenlinie am Hang wie B.

Gleichung der Höhenlinie h:

Es gilt h: $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\,\overrightarrow{B\overline{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Richtungsvektor $\vec{a}_h = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Orthogonalität zwischen der Höhenlinie h und dem Weg BC:

Für den Weg zwischen B und C gilt: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für den Winkel zwischen h und dem Weg von B nach C gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \vec{a}_h}{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\vec{a}_h\right|} = \frac{-6+6+0}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{18}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$$

Höhendifferenz zwischen den Punkten B und C:

Wegen $x_{3,B} = 2$ und $x_{3,C} = 3$ beträgt $\Delta x_3 = 1$, d.h. die Höhendifferenz im Gelände sind 10 m.

Böschungsneigungswinkel β:

Wegen der Orthogonalität zwischen Höhenlinie und Weg durch B und C lässt sich eine senkrechte Schnittfläche betrachten. Für diese gilt:

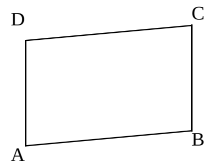
$\sin\beta = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Weglänge}\,\overline{BC}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$, d.h. $\beta \approx 19{,}5°$.

Die Böschung hat eine Neigung von etwa 19°.

Bewertungsvorschlag:

a) Berechnen der Gesamtlänge der Strecke	2 BE
Berechnen der Winkelgröße α zwischen den Wegen	3 BE
b) Ermitteln einer Ebenengleichung für E	3 BE
c) Nachweisen der Lage des Punktes $\overline{B}$	4 BE
Aufstellen einer Gleichung für die Höhenlinie	2 BE
Zeigen, dass Weg orthogonal zur Höhenlinie	2 BE
Ermitteln der Höhendifferenz	1 BE
Ermitteln des Neigungswinkels der Böschung	3 BE
	20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2:



a) Untersuchung von Aussagen:

Wegen $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 3-1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ -2-3 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ -4+2 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 1+4 \\ -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{BC} = k\,\overrightarrow{DA}$ und $\overrightarrow{AB} = c\,\overrightarrow{CD}$.

Da ABCD ein Paar paralleler Seiten besitzt, ist ABCD ein Trapez; da ABCD zwei Paare paralleler Seiten besitzt, ist es ein Parallelogramm.

Wegen $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24}$, $\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{42}$,

$\overline{CD} = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{24}$, $\overline{DA} = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{42}$ ergibt sich $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{DA}$.

Wegen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = -8-10-4 = -22 \neq 0$ ist der Winkel

$\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \neq 90°$, d.h ABCD ist kein Rechteck.

Gleichung für Ebene E durch A, B, C, D:

$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nachweis, dass Gerade h(A, P) senkrecht zur Ebene E:

h(A, P): $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 11-2 \\ 8-1 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem

Richtungsvektor $\vec{a}_h = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$; aus $\vec{a}_h \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -18 + 14 + 4 = 0$

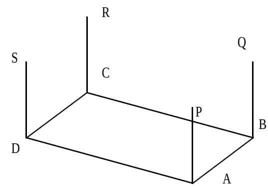
und $\vec{a}_h \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = 36 - 35 - 1 = 0$ folgt $\vec{a}_h \perp \overrightarrow{AB}$ und $\vec{a}_h \perp \overrightarrow{AD}$, d.h. die Gerade h verläuft senkrecht zur Ebene E.

b) Koordinaten der Punkte Q, R, S, so dass ABCDPQRS ein gerades Prisma ist:
Weil A, B, C, D in einer Ebene liegen und h(A, P) senkrecht zu dieser Ebene, müssen die Punkte Q, R, S auf parallelen Hilfslinien zu h durch die Punkte B, C, D liegen (siehe Skizze). Es gilt dann:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Die Punkte Q, R, S haben die Koordinaten Q(9| 10| 2), R(13| 5| 1), S(15| 3| –3).

Schnittpunkt der Körperkante $\overline{SP}$ mit der Geraden g:

Es gilt für die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 26 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

und für die Gerade *l* = g(S, P): $\vec{x} = \overrightarrow{OS} + t\ \overrightarrow{SP}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11-15 \\ 8-3 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Falls g und *l* einander schneiden, muss genau eine Lösung der Gleichung

$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 26 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ existieren; hieraus folgt

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & 0 + 26r & = 15 - 4t \\ (2) & 3 + 5r & = 3 + 5t \\ (3) & 1 - 7r & = -3 + t \end{array}\right\}$$ aus (2) folgt r = t, mit (3) folgt daraus t = $\frac{1}{2}$:

Für den Schnittpunkt Z gilt dann: $\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 26 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$

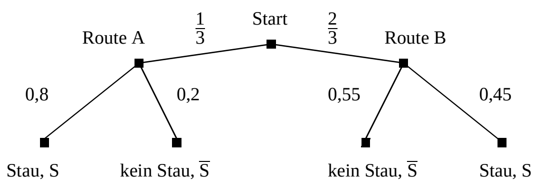
Die Kante $\overline{SP}$ wird von der Geraden g im Punkt Z (13| 5,5| – 2,5) geschnitten.

Bewertungsvorschlag:

a) Untersuchen des Vierecks ABCD	3 BE
Angeben einer Gleichung der Ebene E	3 BE
Nachweisen, dass die Hilfsgerade h senkrecht zur Ebene E verläuft	3 BE
b) Berechnen der Koordinaten der Punkte Q, R, S	3 BE
Nachweisen eines Schnittpunktes der Geraden g mit der Körperkante $\overline{SP}$	7 BE
Berechnen der Koordinaten des Schnittpunktes	1 BE
	20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.1:

a) Baumdiagramm für Zufallsexperiment „Fahrten des Mitarbeiters“:
Es gibt zwei Routen, A und B; Fahrtenbuchauswertung ergibt $\frac{2}{3}$ aller Fahrten auf Route B; Staugefahr auf Route A ist $p_A = 80\ \%$, Staugefahr auf Route B ist $p_B = 45\ \%$.



Berechnen bestimmter Wahrscheinlichkeiten:

$P(S)$ Wahrscheinlichkeit, auf einer beliebigen Fahrt in einen Stau zu geraten
$P(S) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}8 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}45 = \frac{17}{30} \approx 0{,}566$ (57%)

$P_S(A)$ Wahrscheinlichkeit, im Falle eines Staues auf Route A zu sein
Aus $P_S(A) \cdot P(S) = P_A(S) \cdot P(A)$ folgt $P_S(A) \cdot \frac{17}{30} = 0{,}8 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$P_S(A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}8}{\frac{17}{30}} = \frac{8}{17} \approx 0{,}471 \text{ (47\%)}$$

$P_{\overline{S}}(B)$ Wahrscheinlichkeit im Falle freier Fahrt auf Route B zu sein
Aus $P_{\overline{S}}(B) \cdot P(\overline{S}) = P_B(\overline{S}) \cdot P(B)$ folgt mit $1 = P(S) + P(\overline{S})$

$$P_{\overline{S}}(B) \cdot \left(1 - \frac{17}{30}\right) = 0{,}55 \cdot \frac{2}{3}\text{, d.h. } P_{\overline{S}}(B) = \frac{0{,}55 \cdot \frac{2}{3}}{1 - \frac{17}{30}} = \frac{11}{13} \approx 0{,}846 \text{ (85\%)}$$

b) Wahrscheinlichkeit, dreimal aufeinanderfolgend in einen Stau zu geraten:

Es sei X Zufallsgröße für die Anzahl von Staus auf einer Route (A oder B) mit $n = k = 3$; für Route A gilt mit $p = \frac{8}{10}$ bei 3 Wiederholungen

$P_A(X = 3) = \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{512}{1000} = 0{,}512$ (51%);

für Route B gilt mit $p = \frac{45}{100}$ bei 3 Wiederholungen

$P_B(X = 3) = \left(\frac{45}{100}\right)^3 = \frac{729}{8000} \approx 0{,}091$ (9 %).

Begründung für ein BERNOULLI-Experiment:
Es existieren genau zwei Ergebnisse beim Zufallsexperiment: Stau/ kein Stau; die Wahrscheinlichkeiten p bzw. (1 – p) der Ergebnisse sind bei jedem Versuch gleich.

c) Werte für Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse:

Ein BERNOULLI-Experiment mit Ereigniswahrscheinlichkeit p wird n mal durchgeführt.

- Das Ereignis tritt genau k mal auf: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Das Ereignis tritt mindestens k mal auf:

$$P(X \ge k) = 1 - P(X < k) = 1 - \left[\binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-(k-1)}\right]$$

$$P(X \ge k) = 1 - P(X < k) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

- Das Ereignis tritt höchstens k mal auf: $P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$.

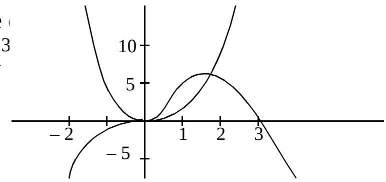
Bewertungsvorschlag:

a) Erstellen eines Baumdiagramms	3 BE
Formulieren der Ereignisse, Berechnen der Wahrscheinlichkeiten	5 BE
b) Berechnen der Wahrscheinlichkeiten	2 BE
Begründen des Vorliegens eines BERNOULLI-Experiments	2 BE
Angeben von Ausdrücken zur Berechnung	3 BE
	15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.2:

a) Koordinaten der gemeinsamen Punkte

Aus $y = f(x) = -x^3 + 3x^2$ und $g(x) = x^3$



$-x^3 + 3x^2 = x^3$

$-2x^3 + 3x^2 = 0$

$x^2(-2x + 3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{3}{2};\ y_1 = 0;\ y_2 = \frac{27}{8}$.

Die gemeinsamen Punkte sind $S_1(0|\,0)$ und $S_2(\frac{3}{2}\,|\,\frac{27}{8})$.

Volumen des Rotationskörpers:

$$V = \pi \int_0^{1,5} [f(x)]^2\,dx - \pi \int_0^{1,5} [g(x)]^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^{1,5} (-x^3 + 3x^2)^2\,dx - \pi \int_0^{1,5} x^6\,dx$$

$$= \pi \int_0^{1,5} (x^6 - 6x^5 + 9x^4)\,dx - \pi \int_0^{1,5} x^6\,dx = \pi \int_0^{1,5} (-6x^5 + 9x^4)\,dx$$

$$= \pi \left[-x^6 + \frac{9}{5} \cdot x^5\right]_0^{1,5} = \frac{729}{320}\,\pi \approx 7{,}16.$$

Das Volumen hat eine Größe von etwa 7,16 VE.

b) Anstiege der Geraden, die in den Wendepunkten W_a senkrecht zu den Graphen f_a sind:

$f_a(x) = -x^3 + ax^2;\ f_a'(x) = -3x^2 + 2ax;\ f_a''(x) = -6x + 2a,\ f_a'''(x) = -6.$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f_a''(x) = 0 = -6x + 2a \Rightarrow x_W = \frac{1}{3}\,a.$

Da $f_a'''(x) = -6$ für alle x, ist $W_a\,(\frac{1}{3}\,a|\ f(\frac{1}{3}\,a))$ ein Wendepunkt. Die jeweilige Steigung der Funktion f_a im Wendepunkt W_a ergibt sich als

$f_a'(\frac{1}{3}\,a) = -3 \cdot \frac{1}{9}\,a^2 + 2a\frac{1}{3}\,a = \frac{1}{3}\,a^2$; die dazu jeweils senkrecht verlaufende Gerade im Wendepunkt W_a besitzt eine Steigung $m_\perp = -\dfrac{1}{f_a'\left(\frac{1}{3}a\right)} = -\dfrac{3}{a^2}$.

Bewertungsvorschlag:

a) Berechnen der Koordinaten der gemeinsamen Punkte	3 BE
Ermitteln des Rotationsvolumens	6 BE
b) Berechnen der Anstiege	6 BE
	15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.3:

a) Ordinate des Ellipsenpunktes P:

Für die Ellipse gilt $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; für den Ellipsenpunkt P(3| y > 0) muss gelten

$\frac{3^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, d.h. $144 + 25\,y^2 = 400$, also y = 3,2.

Der Ellipsenpunkt ist P(3| 3,2). (y = – 3,2 entfällt wegen Bedingung y > 0).

Konstruktion der Tangente in einem Ellipsenpunkt P:

(1) Es werden die Brennpunktstrahlen $\overrightarrow{F_1P}$ und $\overrightarrow{F_2P}$ gezeichnet; der Winkel $\sphericalangle F_1PF_2$ wird halbiert;

(2) Senkrecht zur Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle F_1PF_2$ wird im Punkt P eine Gerade t errichtet. Die Gerade t ist die Tangente an die Ellipse in P.

Gleichung der Tangente in P an die Ellipse:

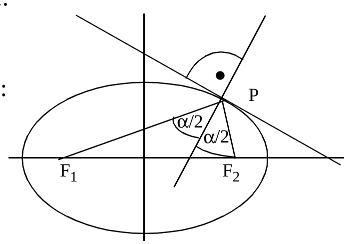
Mit $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ und P(3| 3,2) gilt für die

Tangente an die Ellipse in Mittelpunktlage:

$\frac{x x_P}{25} + \frac{y y_P}{16} = 1,\quad \frac{x \cdot 3}{25} + \frac{y \cdot \frac{16}{5}}{16} = 1$

$\Rightarrow \frac{3}{5}\,x + y = 5$

Tangentengleichung: $y = -\frac{3}{5}\,x + 5$



b) Gemeinsame Punkte zwischen Ellipse und Gerade

Ellipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; Gerade g: $x = \frac{25}{3}$.

Einsetzen der Geradengleichung in die Ellipsengleichung ergibt:

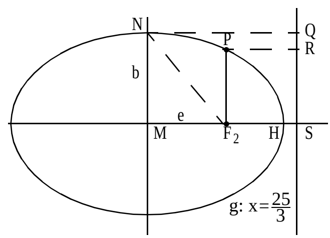
$$\frac{\left(\frac{25}{3}\right)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{25}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$400 + 9y^2 = 144$$

Da es hierfür keine reelle Lösung gibt, haben Ellipse und Gerade keinen gemeinsamen Punkt.

Streckenverhältnis zwischen den Punkten:



Mit P(3| 3,2), H(5| 0), N(0| 4) und der Exzentrizität $\overline{MF_2} = e = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$ gilt für die Abstände:

$$\overline{NF_2} = \sqrt{e^2 + b^2} = a = 5$$

$$\overline{NQ} = \frac{25}{3} \Rightarrow \overline{NF_2} : \overline{NQ} = 3 : 5$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{0^2 + 3,2^2} = 3,2 = \frac{16}{5}$$

$$\overline{PR} = \frac{25}{3} - 3 \quad \Rightarrow \overline{PF_2} : \overline{PR} = \frac{16}{5} : \frac{16}{3} = 3 : 5$$

$$\overline{HF_2} = 5 - 3 = 2, \overline{HS} = \frac{25}{3} - 5$$

$$\overline{HF_2} : \overline{HS} = 2 : \frac{10}{3} = 3 : 5$$

Sämtliche Abstände verhalten sich wie 3 : 5.

Bewertungsvorschlag:

a) Angeben der Ordinate	2 BE
Beschreiben eines Konstruktionsverfahrens	3 BE
Aufstellen einer Tangentengleichung	3 BE
b) Untersuchen von Ellipse und Gerade auf gemeinsame Punkte	2 BE
Zeigen der gleichen Streckenverhältnisse	5 BE
	15 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1999 / 2000

Gymnasium

Thüringen

Aufgabe 1.1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(1 - \ln x)$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an!

b) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte und Wendepunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $0{,}1 \le x \le 8$!

d) Im Punkt N(e; 0) wird an den Graphen der Funktion f die Tangente t_1 gelegt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t_1 !
In welchem Punkt muss die Tangente t_2 an den Graphen von f gelegt werden, damit t_2 senkrecht zur Tangente t_1 verläuft?

e) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x + 2000$ eine Stammfunktion von f ist!

f) Der Graph der Funktion f, die Gerade mit der Gleichung $y = -x + e$ und die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie deren Flächeninhalt!

g) Eine Parallele zur y-Achse schneidet den Graphen der Funktion f in einem Punkt $R(x_R; f(x_R))$ mit $x_R < e$ und die x-Achse in einem Punkt S. Der Punkt O bezeichnet den Koordinatenursprung.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R so, dass das Dreieck OSR maximalen Flächeninhalt annimmt!
Berechnen Sie diesen Inhalt!

h) Durch den Punkt T(0; – e) verläuft eine zur Tangente t_1 (aus Teilaufgabe d)) parallele Gerade.
Berechnen Sie den Abstand dieser beiden zueinander parallelen Geraden!

Aufgabe 1.2

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f symmetrisch zum Koordinatenursprung ist!

Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$!

b) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte und Wendepunkte!
Berechnen Sie gegebenenfalls deren Koordinaten!
(Auf den Nachweis des Wendepunktes wird verzichtet.)

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-6 \le x \le 6$!
Geben Sie den Wertebereich der Funktion f an!

d) Im Koordinatenursprung wird die Tangente t an den Graphen der Funktion f gelegt.
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Tangente t!
Des Weiteren ist eine Gerade g gegeben durch $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen der Funktionen t und g?

e) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = 4\ln(x^2 + 9) + 2000$ eine Stammfunktion von f ist!

f) Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Punkt P(3; f(3)) schneiden die Koordinatenachsen in den Punkten Q(3; 0) und R(0; f(3)). Durch die Punkte O(0; 0), Q, P und R ist das Rechteck OQPR bestimmt. Der Graph der Funktion f teilt die Fläche des Rechtecks OQPR in zwei Teilflächen A_1 und A_2.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Teilflächen A_1 und A_2 !

g) Für jedes $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$, ist durch f_a eine Funktion $f_a(x) = \frac{8x}{x^2 + a}$, $x \in \mathbb{R}$ gegeben.
Für welchen Wert des Parameters a hat der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 1$ eine waagerecht verlaufende Tangente?

Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(11; 2; 7), B(11; 10; 1), F(6; 6; 4) und S(6; 9; 8) gegeben.

a) Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ABF !

b) Durch die Punkte A, B, F und S wird eine dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche ABF bestimmt.

Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{FS}$ die Höhe der Pyramide ist! Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide ABFS !

c) Bestimmen Sie den Winkel α zwischen der Seitenkante $\overline{AS}$ und der Grundkante $\overline{AF}$ der Pyramide ABFS !

d) Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und F. Auf der Geraden g liegt ein Punkt C derart, dass F Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist.
Die Gerade h verläuft durch die Punkte B und F. Auf dieser Geraden h liegt ein Punkt D derart, dass F Mittelpunkt der Strecke $\overline{BD}$ ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C und D !
Welches spezielle Viereck wird durch die Punkte A, B, C und D bestimmt?
Begründen Sie Ihre Aussage!

e) Parallel zur y-Achse fallen Lichtstrahlen ein. Die Pyramide ABFS erzeugt auf der x-z-Ebene einen viereckigen Schatten.
Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte A', B', F' und S' des Schattens an!
Begründen Sie, dass das entstehende Viereck ein Trapez ist!

Aufgabe 2.2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt P(– 3; 5; 3) sowie die Geraden g und h durch

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R} \text{ und } h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt!
Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε an, die durch den Punkt P und die Gerade g festgelegt ist!

b) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind und ihre Richtungsvektoren orthogonal zueinander verlaufen!

c) Die Gerade h durchstößt die Ebene ε (aus Teilaufgabe a)) im Punkt D.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes D !

d) Eine Gerade k verläuft durch den Punkt P und schneidet die Gerade g im Punkt S(– 2; 5; 2).
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Gerade k und g !

e) Gegeben ist der Punkt $Q(-\frac{8}{3}; \frac{17}{3}; \frac{7}{3})$.
Zeigen Sie, dass das Dreieck PQS gleichschenklig und rechtwinklig ist!

f) Parallel zur Strecke $\overline{PQ}$ verläuft durch den Punkt S die Gerade t.
Geben Sie für t eine Gleichung an!
Für welche Punkte U und V auf der Geraden t beträgt der Flächeninhalt der Trapeze PQSU und PQVS jeweils 2 FE ?
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte U und V !

Aufgabe 2.3

An einem Thüringer Gymnasium wählten 59 % der Schüler das Grundfach Mathematik. Von diesen Schülern haben 38 % das Grundfach Physik und 7 % das Leistungsfach Physik belegt.
Unter den 41 % der Schüler, die Mathematik als Leistungsfach wählten, belegten 36 % das Grundfach Physik und 46 % das Leistungsfach Physik.
Ein Schüler der Klassenstufe 11 aus diesem Gymnasium wird zufällig ausgewählt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
A := „Der Schüler hat sich sowohl für das Grundfach Mathematik als auch für das Grundfach Physik entschieden.“,
B := „ Der Schüler belegt das Grundfach Physik.“,
C := „ Der Schüler belegt weder das Leistungsfach Mathematik noch das Leistungsfach Physik.“.
Nutzen Sie ein Baumdiagramm!

b) Die Schüler des Grundfaches Mathematik müssen sich einem Test unterziehen.
Daniel weiß die richtigen Antworten mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 80 %. Paul hat sich nicht ausreichend vorbereitet. Seine Antworten stimmen mit jeweils 30 %.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit beantwortet Paul genau 10 von 20 gestellten Fragen richtig?
Auch Daniel werden 20 Fragen gestellt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens 16 Antworten richtig?
Wie viele Fragen müssen Paul mindestens gestellt werden, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Frage richtig beantwortet?

c) Im Praktikum des Leistungsfaches Physik entwickeln die Schüler eine Experi-

mentieranordnung. Die Anordnung funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit p. Es wird festgestellt, dass bei zweimaliger unabhängiger Hintereinanderausführung das Experiment mit einer Wahrscheinlichkeit von 19 % mindestens einmal nicht gelingt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p !

d) Am Nachmittag spielen Paul und Daniel Karten. In einem Stapel von 15 gut durchmischten Karten befinden sich genau 4 Joker. Es wird folgendes Spiel vereinbart:
Nacheinander werden zwei Karten ohne Zürücklegen gezogen und aufgedeckt. Ist unter den gezogenen Karten mindestens ein Joker, zahlt Daniel an Paul 5 Euro. Ist kein Joker unter den aufgedeckten Karten, erhält Daniel 5 Euro von Paul.
Welcher Spieler erhält auf lange Sicht einen Gewinn?
Damit dieses Spiel fair wird, müssen die Spielregeln geändert werden. Geben Sie eine Möglichkeit an!

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1:

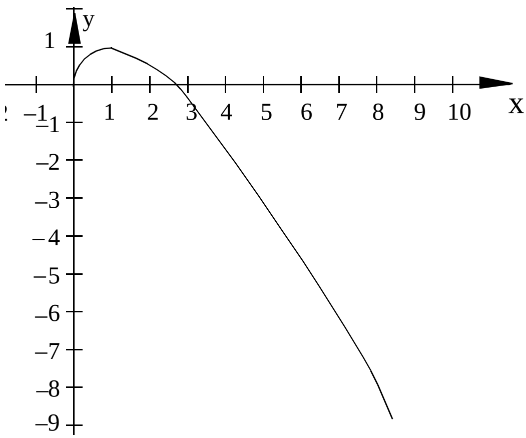
a) Definitionsbereich $D_f : 0 < x < +\infty$

b) Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = x(1 - \ln x) \Rightarrow x_1 = 0$(entfällt laut D_f), $x_2 = e \Rightarrow S_x(e; 0)$
lokale Extrempunkte: $f'(x) = 1 - \ln x + x \cdot -\frac{1}{x} = -\ln x$, $f''(x) = -\frac{1}{x}$, $f'''(x) = \frac{1}{x^2}$
$f'(x) = -\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$, $f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ lokale Minimumstelle
$f(1) = 1 \Rightarrow P_{min}(1; 1)$
Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{x} \Rightarrow 0 = -1$ falsche Aussage
$\Rightarrow$ Es existiert kein Wendepunkt.

c) Graph:

$f(0{,}1) \approx 0{,}33$
$f(8) \approx -8{,}6$

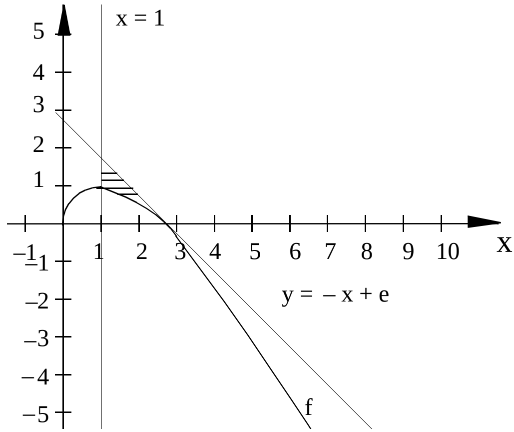


d) $N(e; 0)$: $y_t = mx + n \Rightarrow m_1 = f'(e) = -1$
Einsetzen von N in y_t: $0 = -1 \cdot e + n \Rightarrow n = e \Rightarrow y_{t1} = -x + e$
Damit t_2 senkrecht zu t_1 verläuft, muss gelten: $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = 1$
$m_2 = f'(x) = 1 \Rightarrow x = e^{-1}$; $f(e^{-1}) = e^{-1}(1 - \ln e^{-1}) = e^{-1}(1 + 1) = 2e^{-1}$
$\Rightarrow Q(e^{-1}; 2e^{-1})$

e) Nachweis Stammfunktion: Es gilt: $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = \frac{3}{2}x - (x \ln x + \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x}) = \frac{3}{2}x - x \ln x - \frac{1}{2}x = x - x \ln x = x(1 - \ln x) = f(x)$$

f) Skizze



$x_0 = e$ ist Nullstelle der Geraden y und von f $\Rightarrow$ obere Grenze $x = e$

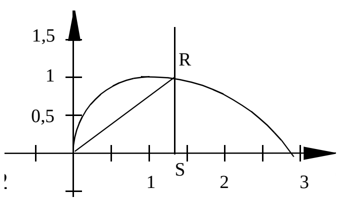
$$A = \int_1^e (g(x) - f(x))\,dx = \int_1^e g(x)\,dx - \int_1^e f(x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + ex\right]_1^e - \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^e \approx 1{,}476 - 1{,}097 \approx 0{,}379 \text{ FE}$$

g) Skizze

S(x; 0)

R(x; f(x))



Hauptbedingung: $A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}\,|\overline{OS}|\,|\overline{SR}|$

Nebenbedingungen: $g = x$ und $h = f(x) = x(1 - \ln x)$

Zielfunktion: $A(x) = \frac{1}{2}xx(1 - \ln x) = \frac{1}{2}x^2(1 - \ln x)$

$A'(x) = x(1 - \ln x) + \frac{1}{2}x^2(-\frac{1}{x}) = x(\frac{1}{2} - \ln x)$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 0 = x(\frac{1}{2} - \ln x) \Rightarrow x = 0$ (entfällt wegen D_f)

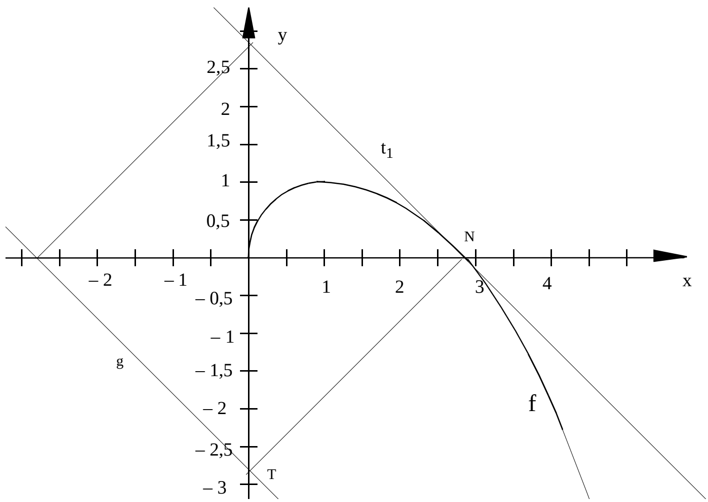
oder $(\frac{1}{2} - \ln x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{e}$

$A''(x) = -\ln x - \frac{1}{2}$; $A''(\sqrt{e}) = -\ln\sqrt{e} - \frac{1}{2} = -1 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f(\sqrt{e}) = \sqrt{e}\,(1 - \ln\sqrt{e}) = \sqrt{e}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{e} \Rightarrow R(\sqrt{e}\,;\,\frac{1}{2}\sqrt{e})$

$A = \frac{1}{2}(\sqrt{e})^2(1 - \ln\sqrt{e}) = \frac{1}{2}e(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e$ FE $\approx 0{,}68$ FE

h) Skizze



$g \parallel t_1 \Rightarrow m_g = m_{t1}$, $y_{t1} = -x + e$, $y_g = -x - e$
Im entstandenen Viereck sind die Diagonalen gleich lang (2e) und stehen senkrecht aufeinander (Koordinatenachsen).
$\Rightarrow$ Viereck ist ein Quadrat $\Rightarrow \overline{TN} \perp t_1$ und $\overline{TN} \perp g$

$\Rightarrow |\overline{TN}|$ ist Abstand der parallelen Geraden ($|\overline{TN}| = d$).
$d^2 = |\overline{ON}|^2 + |\overline{OT}|^2 \Rightarrow d = \sqrt{e^2 + e^2} = \sqrt{2e^2} = \sqrt{2}\,e$ LE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2:

a) Symmetrie zum Koordinatenursprung:

Es ist zu zeigen: $f(-x) = -f(x)$ für jedes $x \in D_f$
$\frac{8 \cdot (-x)}{(-x)^2 + 9} = -\frac{8x}{x^2 + 9}$ wahre Aussage $\Rightarrow$ der Graph von f ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.
Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{8x}{x^2 + 9} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{8x}{x\left(x + \frac{9}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{8}{x + \frac{9}{x}} = 0$

b) Schnittpunkte mit der x - Achse:

$f(x) = 0 : \quad \frac{8x}{x^2 + 9} = 0 \Rightarrow 8x = 0$, also $x = 0$ und $S_x(0; 0)$

Lokale Extrempunkte:

$$f'(x) = \frac{8(x^2+9) - 8x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{72 - 8x^2}{(x^2+9)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-16x(x^2+9)^2 - (72 - 8x^2) \cdot 2 \cdot (x^2+9) \cdot 2x}{(x^2+9)^4} = \frac{16x^3 - 432x}{(x^2+9)^3}$$

$f'(x) = 0$: $72 - 8x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$; $x_2 = -3$

$f''(3) \approx -0{,}148 < 0 \Rightarrow$ lokale Maximumstelle

$f''(-3) \approx 0{,}148 > 0 \Rightarrow$ lokale Minimumstelle

$f(3) = \frac{4}{3} \Rightarrow P_{Max}(3; \frac{4}{3})$, $f(-3) = -\frac{4}{3} \Rightarrow P_{Min}(-3; -\frac{4}{3})$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0$: $16x^3 - 432x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $P_{W1}(0; 0)$

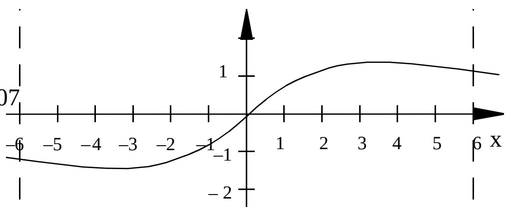
$16x^2 - 432 = 0 \Rightarrow \quad x_2 = \sqrt{27}$, $x_3 = -\sqrt{27}$

und $P_{W2}(\sqrt{27}; \frac{2}{3}\sqrt{3})$; $P_{W2}(-\sqrt{27}; -\frac{2}{3}\sqrt{3})$

c) Graph:

$f(6) \approx 1{,}07$

$f(-6) \approx -1{,}07$



Wertebereich der Funktion: $-\frac{4}{3} \leq y \leq \frac{4}{3}$

d) Gleichung der Tangente:

$y_t = mx + n$; $m_t = f'(0) = \frac{8}{9}$; $n = 0 \Rightarrow y_t = \frac{8}{9}x$

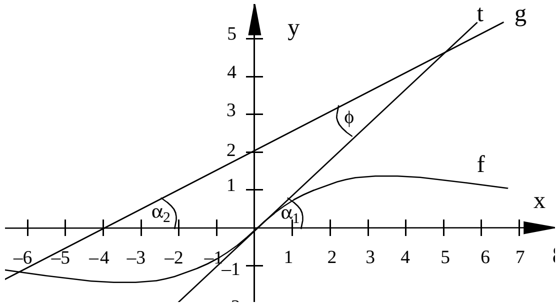
Schnittpunkt: $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{8}{9}x \Rightarrow x = \frac{36}{7} \Rightarrow S(\frac{36}{7}; \frac{32}{7})$

Schnittwinkel: $\tan \alpha_1 = \frac{8}{9} \Rightarrow \alpha_1 \approx 41{,}6°$

$\tan \alpha_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 \approx 26{,}6°$

$\phi = 180° - \alpha_2 - (180° - \alpha_1) \approx 15°$

Skizze:
(nicht verlangt)

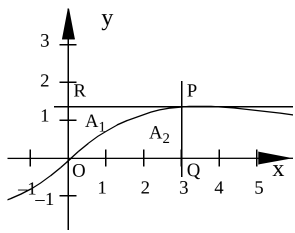


e) Nachweis der Stammfunktion: Zu zeigen ist: $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x^2+9} \cdot 2x = \frac{8x}{x^2+9} = f(x)$$

f) Skizze:

Fläche des Rechtecks OQPR:
$A = 3 \cdot f(3) = 4$ FE



Teilfläche A_2: $A_2 = \int_0^3 f(x)\,dx = [4 \cdot \ln(x^2+9)]_0^3 \approx 11{,}56 - 8{,}79 = 2{,}77$ FE

Teilfläche A_1: $A_1 = A - A_2 \approx 1{,}23$ FE

g) Berechnung des Parameters a

$f_a(x) = \frac{8x}{x^2+a}$; an der Stelle x = 1 waagerechte Tangente $\Rightarrow m = 0$

$f'_a(x) = \frac{8(x^2+a) - 8x \cdot 2x}{(x^2+a)^2} = \frac{8a - 8x^2}{(x^2+a)^2}$; $f'_a(1) = 8a - 8 = 0 \Rightarrow a = 1$

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1:

a) Umfang des Dreiecks ABF:

$$u = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BF}| + |\overrightarrow{FA}| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-5\\-4\\3\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-5\\4\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{100} + \sqrt{50} + \sqrt{50}$$

$u \approx 24{,}14$ LE

Flächeninhalt des Dreiecks ABF:

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{u}{2}$,

$a = |\overrightarrow{AB}|$, $b = |\overrightarrow{BF}|$, $c = |\overrightarrow{FA}| \Rightarrow A \approx 24{,}99$ FE

b) Zu zeigen: $\overrightarrow{FS} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$ und $\overrightarrow{FS} \cdot \overrightarrow{FA} = 0$

$$\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix} = 0 + 12 - 12 = 0; \quad \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-5\\4\\-3\end{pmatrix} = 0 + 12 - 12 = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{FS}$ steht senkrecht auf der Grundfläche ABF

Volumen der Pyramide ABFS: $V = \frac{1}{3} A_g h$

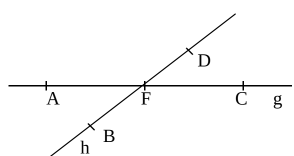
$$h = |\overrightarrow{FS}| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right| = 5 \text{ LE} \Rightarrow V \approx \frac{1}{3} \cdot 24{,}99 \cdot 5 \text{ VE} = 41{,}65 \text{ VE}$$

c) Bestimmen des Winkels α

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AS}|}{|\overrightarrow{AF}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-5\\7\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{75}} \approx 0{,}8165 \Rightarrow \alpha \approx 35{,}26°$$

d) Koordinaten der Punkte C und D

Es sei mit O(0; 0; 0) der Koordinatenursprung bezeichnet. Dann gelten:



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AF}$$

$$= \begin{pmatrix}6\\6\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\10\\1\end{pmatrix} \Rightarrow C(1; 10; 1)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}6\\6\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix} \Rightarrow D(1; 2; 7)$$

Untersuchung des Vierecks ABCD:

$|\overrightarrow{AC}| = 2 \cdot \sqrt{50}$; $|\overrightarrow{BD}| = 2 \cdot \sqrt{50}$

$\Rightarrow$ Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander.

$|\overrightarrow{AB}| = 10$ LE; $|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 10$ LE; $|\overrightarrow{DC}| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix}\right| = 10$ LE;

$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 10$ LE $\Rightarrow$ Alle Seiten sind gleich lang.

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$ $\Rightarrow$ Gegenüberliegende Seiten sind parallel.

$$\cos \sphericalangle CFD = \frac{\left|\begin{pmatrix}-5\\4\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-5\\-4\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-5\\4\\-3\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-5\\-4\\3\end{pmatrix}\right|} = 0 \Rightarrow \sphericalangle CFD = 90° \Rightarrow$$ Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.

$\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Quadrat.

e) Koordinaten der Eckpunkte A', B', F' und S' des Schattens

Schatten auf x-z-Ebene: y = 0
Parallele zur y-Achse: x-Koordinaten und z-Koordinaten bleiben erhalten.
$\Rightarrow$ A'(11; 0; 7), B'(11; 0; 1), F'(6; 0; 4) und S'(6; 0; 8)

Zu zeigen: Das Viereck A'B'F'S' ist ein Trapez, d.h. es existiert ein Paar paralleler Seiten.
Es gilt: $\overrightarrow{A'B'} = k\ \overrightarrow{S'F'}$, da $\begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix} = k \begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}$ für k = 1,5 $\Rightarrow$ Es existiert ein Paar paralleler Seiten.

Damit ist das Viereck A'B'F'S' ein Trapez.

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2:

a) Punktprobe

$-3 = 0 - r \quad \Rightarrow r = 3$
$5 = 3 + r \quad \Rightarrow r = 2$
$3 = 1 + 0{,}5\,r \Rightarrow r = 4$

$\Rightarrow$ Es gibt keine reelle Zahl r, die alle drei Gleichungen löst. Damit gilt $P \notin g$.

Ebene ε: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}-1\\1\\0,5\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$; $s, r \in \mathbb{R}$

b) Lage der Geraden g und h zueinander

$$g \cap h: \begin{array}{lrcl} \text{I} & 0 - r &=& -2 + 0{,}5s \\ \text{II} & 3 + r &=& 2 - 0{,}5s \\ \text{III} & 1 + 0{,}5r &=& -1 + 2s \end{array}$$

I + II: 3 = 0 falsche Aussage $\Rightarrow$ Es gibt keinen Schnittpunkt von g und h.

Da die Richtungsvektoren (laut Aufgabenstellung) nicht parallel sind, folgt, dass g und h zueinander windschief liegen.

Orthogonalität der Richtungsvektoren:

Es muss gelten: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$; $-0{,}5 - 0{,}5 + 1 = 0$; wahre Aussage

Die Richtungsvektoren stehen senkrecht aufeinander.

c) Durchstoßpunkt D:

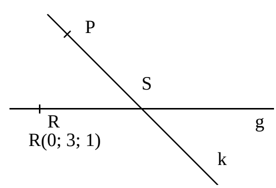
$$h \cap \varepsilon \quad \begin{array}{lrcl} \text{I} & -2 + 0{,}5s &=& 0 - r - 3t \\ \text{II} & 2 - 0{,}5s &=& 3 + r + 2t \\ \text{III} & -1 + 2s &=& 1 + 0{,}5r + 2t \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{I + II} & & & 0 = 3 - t & \Rightarrow t = 3 \\ \text{t in I und II: II'} & 2 - 0{,}5s &=& 9 + r & \Rightarrow r = -7 - 0{,}5s \\ \text{III'} & -1 + 2s &=& 7 + 0{,}5r & \\ \text{r in III'} & -1 + 2s &=& 7 + 0{,}5(-7 - 0{,}5s) & \end{array}$$

$\Rightarrow s = 2$; $r = -8 \Rightarrow D(-1; 1; 3)$

d) Schnittwinkel:

$$\cos\phi = \frac{\left|\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SR}\right|}{\left|\overrightarrow{SP}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SR}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-3|}{\sqrt{2} \cdot 3}$$



$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = 45°$$

e) Dreieck PQS:

1. Zwei gleich lange Seiten:

$|\overrightarrow{PS}| = \left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2}$; $|\overrightarrow{PQ}| = \left|\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right| = 1$; $|\overrightarrow{SQ}| = \left|\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right| = 1$

$\Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{SQ}| = 1$, d.h., die Bedingung ist erfüllt.

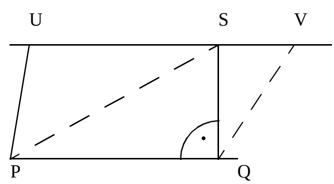
2. Zwei Seiten stehen senkrecht aufeinander.

Zu zeigen: $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QS} = 0$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QS}$ $\Rightarrow$ Dreieck ist gleichschenklig und rechtwinklig.

f) Gleichung für Gerade t:

t: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$



Bestimmen der Punkte U und V:

$A_{Tr} = \frac{1}{2}(a + c)h$; $h = |\overrightarrow{SQ}| = 1$ LE; $a = |\overrightarrow{PQ}| = 1$ LE

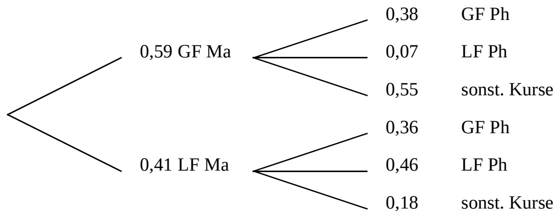
$2 = \frac{1}{2}(1 + c) \cdot 1 \Rightarrow c = 3$, also $|\overrightarrow{SU}| = 3|\overrightarrow{PQ}|$

$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OS} - 3\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow U(-3; 3; 4)$

$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OS} + 3\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix} \Rightarrow V(-1; 7; 0)$

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.3:

a) Baumdiagramm



A = $\{$(GF Ma, GF Ph)$\}$ B = $\{$(GF Ma, GF Ph); (LF Ma, GF Ph)$\}$

C = $\{$(GF Ma, GF Ph); (GF Ma, sonst. Kurse)$\}$

$P(A) = 0{,}59 \cdot 0{,}38 = 0{,}2242$
$P(B) = 0{,}59 \cdot 0{,}38 + 0{,}41 \cdot 0{,}36 = 0{,}3718$
$P(C) = 0{,}59 \cdot 0{,}38 + 0{,}59 \cdot 0{,}55 = 0{,}5487$

b) Daniel: $p = 0{,}8$ X: Anzahl der richtigen Antworten
Paul : $p = 0{,}3$
Paul : $n = 20,\ k = 10$ $P(X = 10) = \binom{20}{10} \cdot 0{,}3^{10} \cdot 0{,}7^{10} = 0{,}0308$

Daniel : $n = 20,\ k \geq 16$ $P(X \geq 16) = \binom{20}{16} \cdot 0{,}8^{16} \cdot 0{,}2^{4} +$

$\binom{20}{17} \cdot 0{,}8^{17} \cdot 0{,}2^{3} + \binom{20}{18} \cdot 0{,}8^{18} \cdot 0{,}2^{2} + \binom{20}{19} \cdot 0{,}8^{19} \cdot 0{,}2^{1} + \binom{20}{20} \cdot 0{,}8^{20} \cdot 0{,}2^{0}$

$= 0{,}6296$

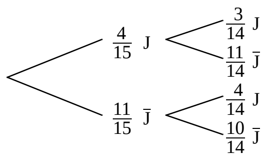
$P(X \geq 1) \geq 0{,}9$
$1 - P(X = 0) \geq 0{,}9$
$1 - 0{,}7^{n} \geq 0{,}9$
$0{,}7^{n} \leq 0{,}1$
$n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}7} = 6{,}45$; Paul müssen mindestens 7 Fragen gestellt werden.

c) Berechnung der Wahrscheinlichkeit p

X: Anzahl der Versuche, in denen die Anordnung nicht funktioniert

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}19$
$1 - p^{2} = 0{,}19$
$p^{2} = 0{,}81$, also $p = 0{,}9$

d) 15 Karten, davon 4 Joker (J)



e_i	$P(e_i)$
J J	$\frac{2}{35}$
J $\bar{J}$	$\frac{22}{105}$
$\bar{J}$ J	$\frac{22}{105}$
$\bar{J}$ $\bar{J}$	$\frac{11}{21}$

A: mindestens 1 Joker wird gezogen

$\Rightarrow A = \{ J\,J;\ J\,\bar{J};\ \bar{J}\,J \}$; $P(A) = \frac{10}{21}$, $P(\bar{A}) = \frac{11}{21}$

X: Gewinn für Daniel

$P(x_i)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{11}{21}$
Gewinn x_i	-5	$+5$

$E(X) = -5 \cdot \frac{10}{21} + 5 \cdot \frac{11}{21} = \frac{5}{21} > 0$

$\Rightarrow$ Daniel erhält auf lange Sicht einen Gewinn.

Faires Spiel: Es muss gelten: $E(X) = 0$ z.B.

$P(x_i)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{11}{21}$
x_i	$-x$	5

$0 = -x \cdot \frac{10}{21} + 5 \cdot \frac{11}{21}$

$\frac{10}{21} x = \frac{55}{21}$

$x = 5{,}5$; Daniel zahlt an Paul 5,5 Euro.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe	Teilaufgabe								Summe
	a	b	c	d	e	f	g	h	
1.1	1	7	2	5	2	4	6	3	30
1.2	3	10	3	6	1	4	3		30
2.1	3	3	2	4	3				15
2.2	2	3	3	2	2	3			15
2.3	4	5	2	4					15