Inhalt

Abiturprüfung Grundkurs 1995/96 und 1996/97

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern
Sachsen
Sachsen-Anhalt
Thüringen
Berlin

paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH Berlin

Autoren für die einzelnen Bundesländer bzw. die ausgewählten Schulen:

Margit Liskow (Mecklenburg-Vorpommern)
Dr. Rainer Heinrich (Sachsen)
Birgit Maier (Sachsen-Anhalt)
Siegbert Hülle (Thüringen)

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier.

1. Auflage

1 5 4 3 2 1 | 2001 2000 99 98 97

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes.

Redaktion: Prof. Dr. habil. Karlheinz Weber
Layout: Matthias Nerling, Heiko Schlichting
Umschlaggestaltung: Britta Scharffenberg
Druck: OSTHAVELLAND-DRUCK GmbH VELTEN

ISBN 3-89517-272-3

Inhalt

Vorwort

Das vorliegende Heft enthält die Aufgaben, die in den zentralen Abiturprüfungen für Mathematik-Grundkurse in den Bundesländern Mecklenburg-Vorpommern (Schuljahr 1996/97), Sachsen (Schuljahre 1995/96 und 1996/97), Sachsen-Anhalt (Schuljahre 1995/96 und 1996/97) und Thüringen (Schuljahre 1995/96 und 1996/97) gestellt wurden. Da es in Berlin kein Zentralabitur für das Fach Mathematik gibt, wurde als Beispiel weiterhin eine Abiturprüfungsarbeit von einer Berliner Schule aus dem Schuljahr 1996/97 in das Heft aufgenommen.

Die Erwartungsbilder skizzieren in der Regel einen möglichen Lösungsweg, wobei stets auch wesentliche Zwischenschritte Aufnahme fanden, um den Nachvollzug des Gedankengangs zu erleichtern und für den Lernenden die Möglichkeiten zur Selbstkontrolle zu erhöhen. Die angegebenen Bewertungsvorschläge haben empfehlenden Charakter. Einigen Arbeiten vorangestellte *Hinweise* informieren über länderspezifische Modalitäten der Prüfungsdurchführung.

Hinsichtlich der Symbolik und Zeichensetzung folgen die Aufgabentexte den Originalfassungen, woraus teilweise Unterschiede zwischen den Vorgehensweisen in den einzelnen Arbeiten resultieren.

Der PAETEC Schulbuchverlag hofft, mit dieser Aufgabensammlung den Lehrkräften Anregungen für die Gestaltung eigener Klausur- und Prüfungsarbeiten sowie den Schülerinnen und Schülern Hilfe bei der Vorbereitung auf das Abitur zu geben. Darüber hinaus erlaubt die geschlossene Veröffentlichung der Prüfungsaufgaben aus einem Schuljahr gewiß interessante Vergleiche bezüglich Schwerpunktsetzung, Anforderungsniveau, Aufgabengestaltung usw. in den verschiedenen Bundesländern, woraus wiederum Ansätze für eigenes Nachdenken erwachsen können.

Die Redaktion

Berlin, Dezember 1997

Abiturprüfung Grundkurs

1996 / 97

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern

Hinweis: Von den nachfolgenden Arbeiten A und B, die jeweils aus Pflicht- und Wahlteil bestehen, hatte der Prüfungsteilnehmer eine auszuwählen. Im Pflichtteil (Aufgaben P1 – P3), der für die Arbeiten A und B identisch ist, waren alle Aufgaben, aus dem Wahlteil (Aufgaben A4 – A6 bzw. B4 – B6) waren zwei Aufgaben zu lösen.

PFLICHTTEIL ARBEITEN A und B

Aufgabe P1: Analysis

a) Gegeben ist eine Folge (a_n) durch $a_n = n^2 - 5n + 5$, $n \geq 1$.
Gibt es ein Glied dieser Folge, das den Wert 11 771 hat?
Begründen Sie Ihre Aussage!
Zeigen Sie, daß (a_n) weder eine arithmetische noch eine monotone Folge ist!

b) Durch $b_3 = 12$ und $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$, $n \geq 1$, ist eine Folge (b_n) festgelegt.

Geben Sie für diese Folge eine explizite Bildungsvorschrift an!

c) Eine Funktion f ist definiert durch $y = f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Graph im kartesischen Koordinatensystem sei G.
Berechnen Sie für G die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die der lokalen Extrempunkte!

Im Schnittpunkt P von G mit der y-Achse gibt es eine Tangente t an G.
Stellen Sie die Gleichung der Tangente t auf!
Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Tangente t die Gerade mit der Gleichung $y = -x$ schneidet!

Aufgabe P2: Geometrie

Die Punkte $A(8\,|\,4\,|\,0)$, $B(0\,|\,6\,|\,2)$, $C(0\,|\,0\,|\,8)$ und $D(8\,|\,-1\,|\,5)$ bestimmen als Eckpunkte ein Viereck.

a) Stellen Sie das Viereck in einem räumlichen Koordinatensystem dar!

b) Weisen Sie nach, daß das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist!

c) Untersuchen Sie, ob das Viereck ABCD ein Trapez ist!

d) Berechnen Sie die Größe des Flächeninhalts des Vierecks ABCD!

Aufgabe P3: Stochastik

Der Basketballer „Long Henry" hat beim Freiwurf erfahrungsgemäß eine Trefferquote von 70%.

a) Er bekommt in einer Spielsituation zwei Freiwürfe zugesprochen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er
   a1) beide Male,
   a2) mindestens einmal,
   a3) nur beim ersten Mal,
   a4) genau einmal?

b) Wie viele Freiwürfe müßte er sich wenigstens vornehmen, damit die Wahrscheinlichkeit, dabei mindestens einen Treffer zu erzielen, 99% überschreitet?

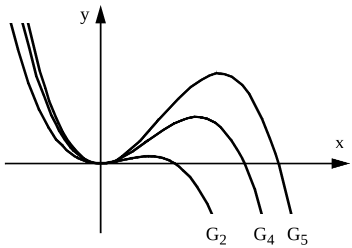
WAHLTEIL ARBEIT A

Aufgabe A4: Analysis

Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung

$y = f_a(x) = ax^2 - x^3,\ x \in \mathbb{R},$
$a \in \mathbb{R},\ a > 0.$

Die zu f_a gehörigen Graphen seinen G_a (siehe Skizze).



a) Berechnen Sie von G_a die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die Koordinaten der Wendepunkte!

b) I_a sei der Inhalt der Fläche, die von G_a und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird.
Berechnen Sie I_a!

c) Für welche Werte von a ist der Anstieg von f_a an der Stelle a kleiner als –4?

Aufgabe A5: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichungen

$$y = f(x) = \frac{x+2}{x},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$$

und $y = g(x) = -2x + 6,\ x \in \mathbb{R}.$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und für den Graphen von f die Gleichungen der Asymptoten!
Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen f und g im Intervall $-3 \leq x \leq 4$!

b) Bestimmen Sie denjenigen x-Wert, $x > 0$, für den die Differenz $g(x) - f(x)$ ein lokales Extremum hat!

c) Die Graphen von f und g schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

Aufgabe A6: Geometrie

Gegeben sind die drei Punkte $A(8\,|\,-4\,|\,4)$, $B(4\,|\,0\,|\,6)$, $A'(4\,|\,4\,|\,0)$.
A' bzw. B' sind Bildpunkte von A bzw. B bei ein und derselben Verschiebung.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von B', stellen Sie das Parallelogramm AA'B'B in einem räumlichen Koordinatensystem dar, und untersuchen Sie, ob dieses Parallelogramm ein Rhombus ist!

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt I des Parallelogramms AA'B'B!

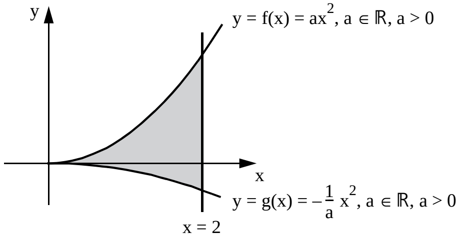
c) Weiterhin ist eine Gerade g durch g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Sie schneidet die Seite AA' des Parallelogramms AA'B'B im Punkt $S(7\,|\,-2\,|\,3)$.
Zeigen Sie: Die Gerade g teilt das Parallelogramm AA'B'B in zwei kongruente Vierecke.

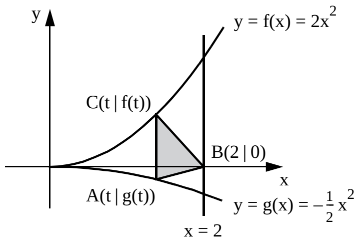
WAHLTEIL ARBEIT B

Aufgabe B4: Analysis

a) Für welchen Wert von a ist der Inhalt der grau gefärbten Fläche (siehe Skizze) minimal?



b) Für $a = 2$ erhält man die Funktionsgleichungen $y = f(x) = 2x^2$ und $y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2$.
Für welchen Wert von t hat das einbeschriebene Dreieck ABC (siehe Skizze) einen maximalen Flächeninhalt?



Aufgabe B5: Analysis

Gegeben ist eine Funktion durch die Gleichung $y = f(x) = 2x(1 - \ln x)$.
G ist der zugehörige Graph.

a) Bestimmen Sie von f den maximalen Definitionsbereich und die Nullstelle!
Berechnen Sie $f(\sqrt{e})$!

b) Bestimmen Sie für G die Koordinaten des Extrempunktes!
Begründen Sie, daß G keinen Wendepunkt hat!
Skizzieren Sie G im Intervall $0 < x \leq 4$!

c) Zeigen Sie, daß durch $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x$ eine Stammfunktion von f gegeben ist!
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen G, der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 0{,}5$ vollständig begrenzt wird!

Aufgabe B6: Geometrie

Ein Dreieck ABC ist durch die Eckpunkte $A(8 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 6 \mid 0)$ und $C(0 \mid 0 \mid 4)$ bestimmt.
Gegeben sind außerdem die Punkte $D(4 \mid 3 \mid 0)$, $E(0 \mid 1{,}5 \mid 3)$ und $F(2 \mid 3 \mid 1)$.

a) Stellen Sie das Dreieck ABC und die Punkte D, E und F graphisch dar!

b) Untersuchen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder ob sie falsch ist:
– F ist ein Punkt der durch A, B und C bestimmten Ebene.
– E ist Höhenfußpunkt im Dreieck ABC
– Die Gerade durch C und D ist Winkelhalbierende des Dreiecks ABC.

Erwartungsbild zu Aufgabe P1: Analysis

a) $a_n = n^2 - 5n + 5,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

$n^2 - 5n + 5 = 11\,771 \Rightarrow n^2 - 5n - 11\,766 = 0$

$$n_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{47\,064}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{217}{2}$$

$n_1 = 111 \quad (n_2 = -106 < 0$ entfällt)

$\Rightarrow a_{111} = 11\,771$

Zu zeigen ist: (a_n) ist weder eine arithmetische noch eine monotone Folge.

Nachweis:

Ist (a_n) eine arithmetische Folge, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$a_{n+1} - a_n = d;\ \ d \in \mathbb{R}$

Ein einfaches Gegenbeispiel zeigt:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 - a_1 = -2 \\ a_3 - a_2 = 0 \end{array}\right\} a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$$

Daraus folgt: (a_n) ist keine arithmetische Folge.

Weiterer Lösungsweg:

$a_n = n^2 - 5n + 5;\ a_{n+1} = (n+1)^2 - 5(n+1) + 5 = n^2 - 3n + 1$

$a_{n+1} - a_n = 2n - 4 \neq d,\quad d \in \mathbb{R}$

Daraus folgt: (a_n) ist keine arithmetische Folge.

Ist (a_n) eine monotone Folge, so gilt:

$a_{n+1} - a_n < 0$, wenn (a_n) monoton fallend ist

$a_{n+1} - a_n > 0$, wenn (a_n) monoton wachsend ist.

$a_{n+1} - a_n = 2n - 4$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Für } n = 1 \text{ gilt: } a_{n+1} - a_n = -2 \\ \text{Für } n = 2 \text{ gilt: } a_{n+1} - a_n = 0 \\ \text{Für } n = 3 \text{ gilt: } a_{n+1} - a_n = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n) \text{ ist nicht monoton}$$

b) (b_n) ist bestimmt durch $b_3 = 12$ und $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n;\quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$

$\Rightarrow b_2 = 24,\ b_1 = 48;\quad q = \frac{1}{2}$

Somit ist die explizite Bildungsvorschrift $b_n = 48 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$.

c) Schnittpunkte mit der x-Achse:

$0 = \frac{1}{4}x^3 - 3x = x(\frac{1}{4}x^2 - 3) \Rightarrow x_1 = 0;\ \frac{1}{4}x^2 - 3 = 0$, also $x^2 = 12$

und $x_{2,3} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$, woraus sich als Schnittpunkte ergeben:

$P_1(0\,|\,0)$; $P_2(-2\sqrt{3}\,|\,0)$; $P_3(+2\sqrt{3}\,|\,0)$

Schnittpunkte mit der y-Achse:
$f(0) = 0 \Rightarrow P_1(0\,|\,0)$

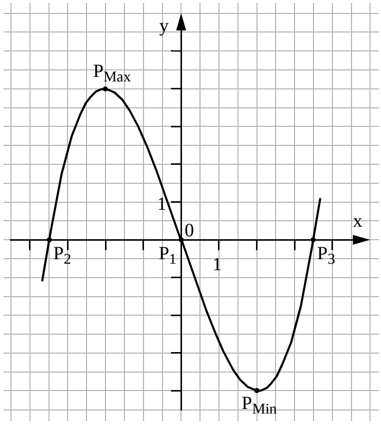
Lokale Extrempunkte:

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$; $f''(x) = \frac{3}{2}x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 - 3 = 0$, also $x^2 = 4$

und damit $x_{E_1} = -2$; $x_{E_2} = +2$

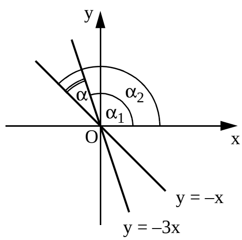
$f''(-2) = -3 < 0$; $f(-2) = 4$
$\Rightarrow P_{Max}(-2\,|\,4)$
$f''(2) = 3 > 0$; $f(2) = -4$
$\Rightarrow P_{Min}(2\,|\,-4)$



Tangentengleichung:
Der Schnittpunkt von G mit der y-Achse ist $P_1(0\,|\,0)$. Die Gleichung der Tangente t hat folgende Form: $y = mx$. Dabei ist $f'(0) = -3$, d.h. $m = -3$
$\Rightarrow$ t: $y = -3x$
Schnittwinkel:
$y = -3x$; $m_1 = -3$ $\qquad$ $y = -x$; $m_2 = -1$

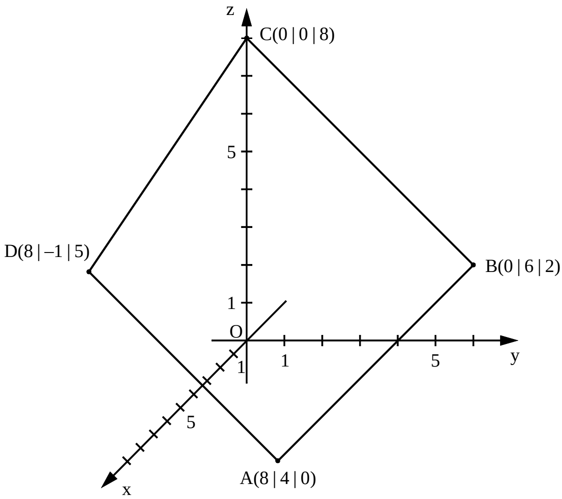
$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-1-(-3)}{1+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \approx 26{,}6°$

Weitere Lösungsweg:
$\tan\overline{\alpha}_1 = -3 \Rightarrow \overline{\alpha}_1 \approx -71{,}6°$, also $\alpha_1 \approx 108{,}4°$;
$\tan\overline{\alpha}_2 = -1 \Rightarrow \overline{\alpha}_2 \approx -45°$ und damit ist $\alpha_2 \approx 135°$.
$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 135° - 108{,}4°$
$\alpha = 26{,}6°$



Erwartungsbild zu Aufgabe P2: Geometrie

a)



b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Nachweis, daß ΔABC rechtwinklig ist:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -8 \cdot 0 + 2 \cdot (-6) + 2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, d.h.

$\sphericalangle$ ABC = 90°. ΔABC ist also rechtwinklig.

Nachweis, daß ΔABC gleichschenklig ist:

$$\left.\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AB}\right| &= \sqrt{64 + 4 + 4} = \sqrt{72} \\ \left|\overrightarrow{BC}\right| &= \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} \end{aligned}\right\} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| \text{, also ist } \Delta ABC \text{ gleichschenklig}$$

c) ABCD ist ein Trapez $\Leftrightarrow$ 1) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ oder

2) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

Nachweis von 1):

Wenn $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, so muß $\overrightarrow{AD} = r\,\overrightarrow{BC}$, $r \in \mathbb{R}$, gelten.

Mit $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ folgt

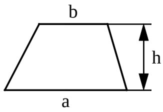
$0 = r \cdot 0$ wahr für alle $r \in \mathbb{R}$

$-5 = r \cdot (-6) \quad \Rightarrow r = \frac{5}{6}$

$5 = r \cdot 6 \quad \Rightarrow r = \frac{5}{6}$

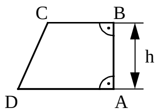
$\Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC}$, d.h.: ABCD ist ein Trapez
(Betrachtung von 2) ist gegenstandslos)

d) Flächeninhalt des Vierecks ABCD:
Allgemein:



$\Rightarrow A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$

Speziell:



$h = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{72}$ (LE)

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$ (LE)

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$ (LE)

$A_{Trapez} = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AD}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|\right)h = \frac{1}{2}\left(\sqrt{50} + \sqrt{72}\right) \cdot \sqrt{72} = \frac{1}{2}(60 + 72) = 66$ (FE)

Der Flächeninhalt des Vierecks ABCD beträgt 66 (FE).

Erwartungsbild zu Aufgabe P3: Stochastik

a) x_1 – Treffer beim 1. Freiwurf
x_2 – Treffer beim 2. Freiwurf
$p = 0{,}7$

a1) $P(x_1 \cap x_2) = P(x_1) \cdot P(x_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$
Er trifft <u>beide Male</u> mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,49.

a2) $P(x_1) \cdot \overline{P(x_2)} + \overline{P(x_1)} \cdot P(x_2) + P(x_1) \cdot P(x_2)$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}49 = 0{,}91$
Er trifft <u>mindestens einmal</u> mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,91.

a3) $P(x_1) \cdot \overline{P(x_2)} = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$
Er trifft <u>nur beim ersten Mal</u> mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,21.

a4) $P(x_1) \cdot \overline{P(x_2)} + \overline{P(x_1)} \cdot P(x_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$
Er trifft <u>genau einmal</u> mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,42.

b) x – Anzahl der Treffer
$P(x \geq 1) > 0{,}99$, also $1 - P(x = 0) > 0{,}99$ bzw. $P(x = 0) < 0{,}01$
$\Rightarrow 0{,}3^n < 0{,}01$, also $n \cdot \lg 0{,}3 < \lg 0{,}01$ und damit $n > 3{,}825$.
Er muß mindestens 4 Freiwürfe ausführen.

Erwartungsbild zu Aufgabe A4: Analysis

a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
x-Achse: $0 = ax^2 - x^3 = x^2(a - x) \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = a$, also $P_1(0 \mid 0);\ P_2(a \mid 0)$
y-Achse: $y = a \cdot 0^2 - 0^3 = 0 \Rightarrow P_1(0 \mid 0)$
Lokale Extrempunkte:
$f'_a(x) = 2ax - 3x^2;\ f''_a(x) = 2a - 6x$
$f'_a(x) = 0 \Rightarrow 2ax - 3x^2 = x(2a - 3x) = 0$, also $x_{E_1} = 0;\ x_{E_2} = \frac{2}{3}a$
$f''_a(0) = 2a > 0$, da $a > 0$; $f_a(0) = 0 \Rightarrow P_{Min}(0 \mid 0)$
$f''_a(\frac{2}{3}a) = -4a < 0$, da $a > 0$; $f_a(\frac{2}{3}a) = \frac{4}{27}a^3 \Rightarrow P_{Max}(\frac{2}{3}a \mid \frac{4}{27}a^3)$
Wendepunkte:
$f''_a(0) = 0 \Rightarrow 2a - 6x = 0$, also $x_W = \frac{1}{3}a$
$f'''_a(x_W) = -6 \neq 0;\ f_a(\frac{1}{3}a) = \frac{2}{27}a^3 \Rightarrow P_W(\frac{1}{3}a \mid \frac{2}{27}a^3)$

b) $$\int_0^a f_a(x)\,dx = \int_0^a (ax^2 - x^3)\,dx = [a \cdot \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4]_3^a$$
$$= a \cdot \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{4}a^4 - 0 = \tfrac{1}{3}a^4 - \tfrac{1}{4}a^4 = \tfrac{1}{12}a^4$$
Flächeninhalt: $I_a = \frac{1}{12}a^4$ (FE)

c) $$\left.\begin{array}{l} f'_a(x) = 2ax - 3x^2 \\ f'_a(a) = 2a^2 - 3a^2 = -a^2 \\ f'_a(a) < -4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -a^2 < -4,\text{ also } a^2 > 4 \Rightarrow a_1 > +2 \\ (a_2 < -2 \text{ entfällt, da } a > 0 \text{ nach Vor.}) \end{array}$$
Für $a > 2$ ist der Anstieg von f'_a an der Stelle a kleiner als -4.

Erwartungsbild zu Aufgabe A5: Analysis

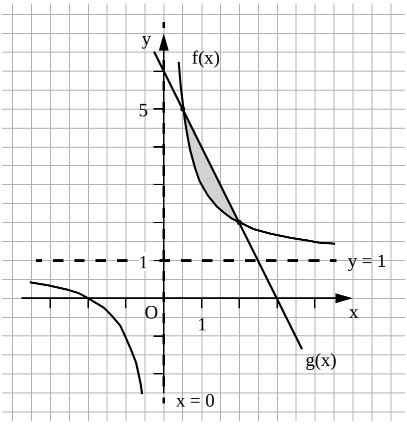
a) Nullstellen von f:
$f(x_N) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_N + 2}{x_N} = 0 \Leftrightarrow x_N + 2 = 0$ und $x_N \neq 0$
$\Rightarrow x_N = -2$

Asymptoten von f:
$x_P = 0$ ist Polstelle von f $\Rightarrow$ x = 0 ist Asymptotengeichung (senkrechte Asymptote)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ y = 1 ist Asymtotengeichung (waagerechte Asymptote)
Skizze:
Wertetabelle für f(x):

x	–3	–2	–1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{3}$	0	–1	n.d.	5	3	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$



b) d(x) = g(x) – f(x)

$d(x) = -2x + 6 - \frac{x+2}{x} = -2x + 6 - 1 - \frac{2}{x} = -2x - \frac{2}{x} + 5$

Untersuchung auf das lokale Extremum:

$d'(x) = -2 + \frac{2}{x^2}$; $d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} - 2 = 0$, also $x^2 = 1$

$\Rightarrow x_1 = 1$ ($x_2 = -1$ entfällt, da x > 0 nach Voraussetzung)

$d''(x) = -\frac{4}{x^3}$; $d''(1) = -4 < 0 \Rightarrow x_1 = 1$ ist eine lokale Maximumstelle

An der Stelle $x_1 = 1$ ist die Differenz g(x) – f(x) maximal.

c) Flächeninhalt

Ermitteln der Integrationsgrenzen:

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x+2}{x} = -2x + 6$, also $x + 2 = -2x^2 + 6x$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$, also $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{16}{16}} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 2$

Weiterer Lösungsweg:

Anhand des Graphen Vermutung aufstellen und rechnerisch überprüfen.

Ermitteln des Flächeninhaltes:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(-2x - \frac{2}{x} + 5\right) dx = \left[-x^2 - 2\ln x + 5x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

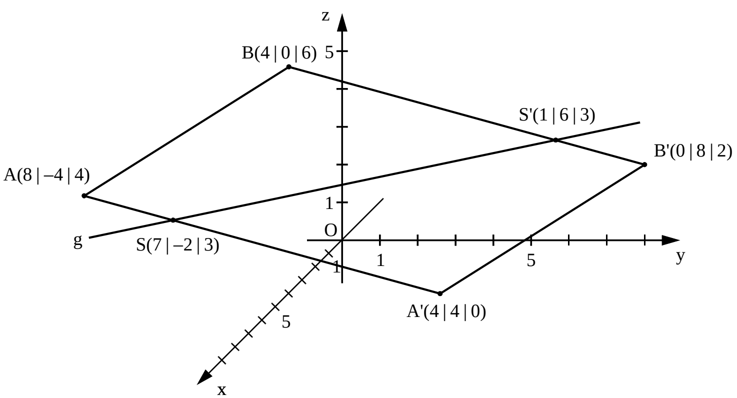
$$= -4 - 2\ln 2 + 10 - \left(-\frac{1}{4} - 2\ln\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4} - 4\ln 2 \approx 0{,}9774$$

Flächeninhalt: A = 0,9774 (FE)

Erwartungsbild zu Aufgabe A6: Geometrie

a) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, also $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_x - 4 \\ b'_y - 0 \\ b'_z - 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(0\,|\,8\,|\,2)$

Darstellung des Parallelogramms AA'B'B (S und S' aus Aufgabenteil c).):



Untersuchung:
AA'B'B ist ein Parallelogramm. Wenn $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AA'}\right|$ gilt, dann ist AA'B'B ein Rhombus.

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6 \\ \left|\overrightarrow{AA'}\right| = \sqrt{16 + 64 + 16} = \sqrt{96} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| \neq \left|\overrightarrow{AA'}\right|$$

$\Rightarrow$ AA'B'B ist kein Rhombus.

b) Flächeninhalt:

$$A_{Parallelogramm} = \sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{AA'}\right|^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'}\right)^2}$$

$$= \sqrt{36 \cdot 96 - (16 + 32 - 8)^2} \approx 43{,}08 \text{ (FE)}$$

Flächeninhalt des Parallelogramms AA'B'B = 43,08 (FE)

c) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$

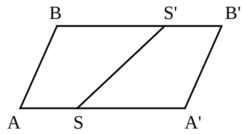
$h_{BB'}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$

Koordinaten des Schnittpunktes zwischen g und $h_{BB'}$:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 4 + 3r = 4 - 4t & \\ \text{(II)} & 2 - 4r = \phantom{4-{}} 8t & \\ \text{(II)} & 3 \phantom{{}-4r} = 6 - 4t & \Rightarrow t = \frac{3}{4} \\ \hline 2 \cdot \text{(I)} + \text{(II)} & 10 + 2r = 8 & \Rightarrow r = -1 \qquad \text{(Probe!)} \end{array}$$

Schnittpunktkoordinaten ergeben sich

$$\left.\begin{array}{l} \text{aus } g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{oder} \\ \text{aus } h_{BB'}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow S'(1 \mid 6 \mid 3)$$



Voraussetzung: AA'B'B ist ein Parallelogramm
Behauptung: ASS'B ≅ A'B'S'S
Beweis:
ASS'B und A'B'S'S sind genau dann kongruent, wenn sie paarweise in allen Seiten übereinstimmen.

(1) $|\overline{SS'}| = |\overline{SS'}|$ gemeinsam

(2) $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$ folgt aus der Voraussetzung

Da $|\overline{AA'}| = |\overline{BB'}|$, ist nur noch zu zeigen, daß $|\overline{AS}| = |\overline{B'S'}|$ gilt.

$|\overline{AS}| = \sqrt{(7-8)^2 + (-2+4)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{6}$ (LE)

$|\overline{B'S'}| = \sqrt{(1-0)^2 + (6-8)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6}$ (LE)

Daraus folgt:

(3) $|\overline{AS}| = |\overline{B'S'}|$

(4) $|\overline{A'S}| = |\overline{BS'}|$ folgt aus (3) und der Voraussetzung

Aus (1), (2), (3) und (4) folgt ASS'B ≅ A'B'S'S, d.h.:
Die Gerade g teilt das Parallelogramm AA'B'B in zwei kongruente Vierecke.

Erwartungsbild zu Aufgabe B4: Analysis

a) Flächeninhalt

$$\int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^2 (ax^2 + \tfrac{1}{a}x^2)\,dx = \int_0^2 (a + \tfrac{1}{a})x^2\,dx$$

$$= [\tfrac{1}{3}(a + \tfrac{1}{a})x^3]_0^2 = \tfrac{8}{3}(a + \tfrac{1}{a})$$

$\Rightarrow A = \frac{8}{3}(a + \frac{1}{a})$ (FE); $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$

Untersuchung von A auf das lokale Minimum:

$A'(a) = \frac{8}{3}(1 - \frac{1}{a^2})$; $A''(a) = \frac{16}{3a^3}$

$A'(a) = 0 \Rightarrow \frac{8}{3}(1 - \frac{1}{a^2}) = 0 \Rightarrow a^2 = 1$, also $a_1 = 1$ ($a_2 = -1$ entfällt, da $a > 0$)

$A''(1) = \frac{16}{3} > 0 \Rightarrow a_1 = 1$ ist lokale Minimumstelle

Für a = 1 ist der Inhalt der grau gefärbten Fläche minimal.

b) $y = f(x) = 2x^2$; $y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2$

$A_\Delta = \frac{(f(t) - g(t)) \cdot (2-t)}{2}$

$A(t) = \frac{1}{2}(2t^2 + \frac{1}{2}t^2) \cdot (2-t) = \frac{5}{4}t^2 \cdot (2-t) = \frac{5}{2}t^2 - \frac{5}{4}t^3$

Untersuchung von A(t) auf das lokale Maximum:

$A'(t) = 5t - \frac{15}{4}t^2$; $A''(t) = 5 - \frac{15}{2}t$

$A'(t) = 0 \Rightarrow 5t - \frac{15}{4}t^2 = 5t(1 - \frac{3}{4}t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$ (entfällt, da sinnlos); $t_2 = \frac{4}{3}$

$A''(\frac{4}{3}) = 5 - \frac{15}{2} \cdot \frac{4}{3} = -5 < 0 \Rightarrow t_2 = \frac{4}{3}$ ist lokale Minimumstelle

Für $t = \frac{4}{3}$ hat das einbeschriebene Dreieck ABC den maximalen Flächeninhalt.

Erwartungsbild zu Aufgabe B5: Analysis

a) Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$; $x > 0$

Nullstelle: $0 = 2x(1 - \ln x)$

$\Rightarrow x_{N_1} = 0$ (entfällt, da $0 \notin D_f$); $1 - \ln x = 0$, also $\ln x = 1$ und damit $x_{N_2} = e$.

$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}(1 - \ln\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}(1 - \frac{1}{2}) = \sqrt{e}$

b) Extrempunkt:

$f'(x) = 2(1 - \ln x) + 2x(-\frac{1}{x}) = 2 - 2\ln x - 2 = -2\ln x$; $f''(x) = -\frac{2}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2\ln x = 0$, also $\ln x = 0$ und damit $x_E = 1$

$f''(1) = -2 < 0$; $f(1) = 2(1-0) = 2 \Rightarrow P_{Max}(1 \mid 2)$

Wendepunkt:

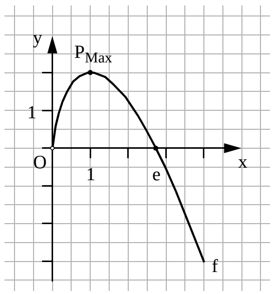
$f''(x_W) = -\frac{2}{x_W} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Die notwendige Bedingung $f''(x_W) = 0$ für die Existenz eines Wendepunktes ist nicht erfüllt. Also besitzt f keinen Wendepunkt.

Wertetabelle für Skizze:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
f(x)	≈ 1,69	2	≈ 1,23	≈ – 0,59	≈ – 3,1

Skizze:



c) Zu zeigen ist: $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = 3x - (2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}) = 3x - 2x\ln x - x = 2x(1 - \ln x) = f(x)$

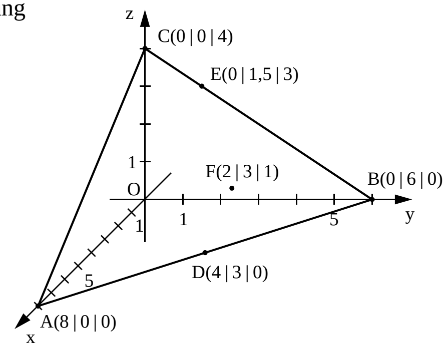
Flächeninhalt:

$\left[\frac{3}{2}x^2 - x^2 \cdot \ln x\right]_{0,5}^{e} = \frac{3}{2}e^2 - e^2 \cdot 1 - \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln 0,5\right) \approx 3,1457$

Flächeninhalt: 3,15 (FE)

Erwartungsbild zu Aufgabe B6: Geometrie

a) Graphische Darstellung



b) Untersuchung, ob $F \in \varepsilon_{ABC}$:

ε_{ABC}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\quad t, r \in \mathbb{R}$

F(2 | 3 | 1):

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 2 = 8 - 8t - 8r & \\ \text{(II)} & 3 = \quad 6t & \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ \text{(III)} & 1 = \quad\quad 4r & \Rightarrow r = \frac{1}{4} \end{array}$$

$t = \frac{1}{2}$ und $r = \frac{1}{4}$ eingesetzt in (I) ergibt $8 - 8 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$

$\Rightarrow F \in \varepsilon_{ABC}$

Untersuchung, ob E Höhenfußpunkt im Dreieck ABC ist:
zu zeigen ist: 1) $E \in g_{BC}$

2) $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}$

zu 1)

g_{BC}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$; $p \in \mathbb{R}$; E(0 | 1,5 | 3)

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 0 = 0 & \\ \text{(II)} & 1{,}5 = 6 - 6p & \Rightarrow p = \frac{3}{4} \\ \text{(III)} & 3 = \quad 4p & \Rightarrow p = \frac{3}{4} \end{array}$$

$\Rightarrow E \in g_{BC}$

zu 2)

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\begin{pmatrix} -8 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 - 9 + 12 = 3 \neq 0$

E ist also nicht Höhenfußpunkt im Dreieck ABC.

Annahme: $\sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle ACD$
Nachweis:
Zu zeigen ist: 1) $D \in \varepsilon_{ABC}$

2) $\sphericalangle(\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{CA}) = \sphericalangle(\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{CB})$

zu 1)

$D \in \varepsilon_{ABC} \Leftrightarrow D \in g_{AB}$

$D(4\,|\,3\,|\,0);\quad g_{AB}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix};\quad t \in \mathbb{R}$

$4 = 8 - 8t \quad \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$3 = \quad 6t \quad \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\underline{0 = 0}$

$D \in \varepsilon_{ABC}$

zu 2)

$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{CA}) = \frac{4 \cdot 8 + 3 \cdot 0 + (-4) \cdot (-4)}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{80}} = \frac{48}{\sqrt{3\,280}} \approx 0{,}838$

$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{CB}) = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + (-4) \cdot (-4)}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{52}} = \frac{34}{\sqrt{2\,132}} \approx 0{,}736$

$\Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{CA}) \neq \sphericalangle(\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{CB})$

Die Gerade g_{CD} ist keine Winkelhalbierende des Dreiecks ABC.

Abiturprüfung
Grundkurs

1995 / 96

Gymnasium

Sachsen

Hinweis:
Für die Abiturprüfungen Mathematik/Grundkurs galt im Schuljahr 1995/96 folgende Regelung: Der Fachlehrer wählt zur Bearbeitung durch den Prüfungsteilnehmer aus:
– je eine von den jeweils zwei vorgegebenen Aufgaben aus den Teilgebieten A und B,
– eine von mehreren vorgegebenen Aufgaben zu den wahlobligatorische Lehrplanthemen aus dem Kurshalbjahr 12/II (Teilgebiet C).

Nachfolgend sind die Aufgaben für den Ersttermin und den Nachtermin zusammengefaßt.

Aufgabe A1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = (x^2 - 4x + 3) \cdot (x + 2)$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen mit der y-Achse, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema).
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-2{,}5 \leq x \leq 3{,}5$.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen der Graph der Funktion f Tangenten besitzt, die parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = -x + 6$ $(x \in \mathbb{R})$ verlaufen.

c) Gegeben ist die Funktion p durch $y = p(x) = x^3 + 6$ $(x \in \mathbb{R})$.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und dem Graphen der Funktion p vollständig begrenzt wird.

Gegeben sind die Funktionen h_m durch $y = h_m(x) = m \cdot x + 6$ $(m \in \mathbb{R};\ x \in \mathbb{R})$.

d) Für welche Werte von m besitzen die Graphen der Funktionen f und h_m genau drei gemeinsame Punkte?

e) Die beiden Schnittpunkte des Graphen der Funktionen $h_{0,25}$ mit dem Graphen der Funktion f, die nicht auf der y-Achse liegen, und der Koordinatenursprung bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Aufgabe A 2: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$ $(x \in D_f)$.

a) Bestimmen Sie für die Funktion f den größtmöglichen Definitionsbereich.
Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema).
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $0 < x \leq 4$.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt P(1; f(1)).
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h, welche die Tangente t im Punkt P senkrecht schneidet.
Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt Q, die Gerade h schneidet die x-Achse im Punkt R.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQR.

c) Weisen Sie nach, daß die Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (\ln x)^2 + 2 \ln x \quad (x \in \mathbb{R}, x > 0)$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion G der Funktion f, für die $G(\sqrt{e}) = 2$ gilt.

d) Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = e$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

e) Gegeben ist die Funktion g durch $y = g(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g im Intervall $0 < x \leq 4$ in das Koordinatensystem von Aufgabenteil a).
Der Graph der Funktion g zerlegt die im Aufgabenteil d) beschriebene Fläche in zwei Teilflächen.
Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser Teilflächen.

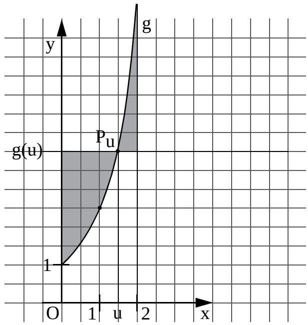
f) Die Gerade mit der Gleichung $x = u \quad (u \in \mathbb{R}, u > e^{-1})$ schneidet den Graphen der Funktion f im Punkt S und den Graphen der Funktion g aus Aufgabenteil e) im Punkt T.
Für welchen Wert von u ist die Länge der Strecke $\overline{ST}$ maximal?

Aufgabe A 3: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = e^x - e \quad (x \in \mathbb{R})$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.
Geben Sie für die Funktion f das Monotonieverhalten an, und untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen.
Ermitteln Sie die Stelle x_1, an der der Funktionswert $f(x_1) = e$ ist.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-3 \leq x \leq 2$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt P(0; f(0)).

b) Die Funktion g sei gegeben durch
$y = g(x) = f(x) + e$ $(x \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le 2)$.
Für jedes u $(u \in \mathbb{R},\ 0 < u < 2)$ verläuft durch den Punkt $P_u(u;\, g(u))$ eine Parallele zur x-Achse.
Diese Parallele, der Graph von g, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ begrenzen für jedes u genau zwei Flächen (siehe Skizze).
Für welchen Wert u ist die Summe der Flächeninhalte dieser Flächen minimal?



c) Gegeben ist die Funktion h durch $y = h(x) = (e^x - e)^2$ $(x \in D_h)$.
Geben Sie für die Funktion h den größtmöglichen Definitionsbereich sowie den Wertebereich an, und führen Sie für die Funktion h eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema).
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h im Intervall $-3 \le x \le 1{,}5$ in das Koordinatensystem von Aufgabenteil a) ein.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen der Funktion h und der Geraden mit der Gleichung $y = e^2$.

d) Die y-Achse und die Graphen der Funktionen f und h begrenzen eine Fläche A vollständig.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche A.

Aufgabe A 4: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x}$ $(x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an, und führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Polstellen, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen).
Weisen Sie nach, daß die Funktion f keine lokalen Extrema besitzt.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-4 \le x \le 6$.

b) Der Punkt $P(x;\, 6)$ mit $x > 0$ ist ein Punkt des Graphen von f. Im Punkt P wird an den Graphen der Funktion f eine Tangente gelegt.
Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung dieser Tangente.

c) Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 6$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
Der Graph der Funktion $y = g(x) = -3x + 18$ $(x \in \mathbb{R})$ teilt diese Fläche in zwei Teilflächen.

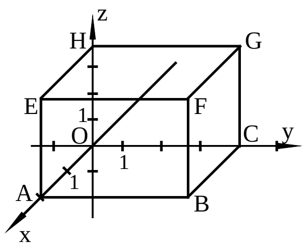
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in das Koordinatensystem von Aufgabenteil a) ein, und berechnen Sie die Inhalte der beiden Teilflächen.

d) Gegeben ist die Funktion h durch $y = h(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$.
Berechnen Sie die Stelle x $(x > 0)$, für die die Differenz der Funktionswerte $d(x) = h(x) - f(x)$ minimal wird.
Ermitteln Sie diese minimale Differenz.

e) Gegeben sind die Funktionen $f_c(x)$ durch
$y = f_c(x) = \frac{2x^2 - c}{x}$ $(c \in \mathbb{R};\ c \neq 0;\ x \in D_{f_c})$.
Untersuchen Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktionen f_c in Abhängigkeit von c.
Für welchen Wert c hat der Graph der zugehörigen Funktion von f_c an der Stelle $x = 1$ den Anstieg 4?

Aufgabe B 1: Analytische Geometrie und lineare Algebra

Von dem in der Abbildung dargestellten Quader ABCOEFGH sind die Punkte $A(2;\ 0;0)$ und $G(0;\ 4;\ 3)$ gegeben. Des weiteren ist T der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks ABCO, P der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks ABFE sowie M der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks ABGH.
Außerdem gilt $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OH}$.



a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte B, C, E, F und H sowie die Ortsvektoren $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OM}$.

b) Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{TB}$, $\overrightarrow{BF}$ und $\overrightarrow{AM}$ als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

c) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen den Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und $\overline{BH}$.

d) Ein Dreieck XYZ ist durch die Vektoren $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Punkt $Z(2;\ 3;\ 0)$ bestimmt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Y sowie das Volumen der Pyramide XYZG.

e) In der x-y-Ebene ist der Kreis k gegeben durch die Gleichung
$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 45$.
Die Gerade g, die durch die Punkte A und C verläuft, schneidet den Kreis k in den Punkten S_1 und S_2.
Berechnen Sie die Länge der Sehne $\overline{S_1S_2}$.
Ermitteln Sie je eine Gleichung der zu der Geraden g parallelen Tangenten an den Kreis k.

Aufgabe B 2: Analytische Geometrie und lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2; 5; -3)$, $B(-4; 8; 3)$, $C(-3; 2; 3)$ und $D(-1; 1; 1)$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und C liegen in einer Ebene E.
Stellen Sie für die Ebene E eine Parametergleichung und eine Gleichung in allgemeiner Form auf.
Weisen Sie nach, daß der Punkt D ebenfalls in der Ebene E liegt.

b) Zeigen Sie, daß das Viereck ABCD ein Trapez, aber kein Parallelogramm ist.
Durch die Mittelpunkte der beiden nichtparallelen Seiten des Trapezes ABCD verläuft die Gerade m.
Geben Sie eine Gleichung für die Gerade m an.
Berechnen Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$ und den Flächeninhalt des Trapezes ABCD.

c) Das Viereck ABCF ist ein Parallelogramm.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes F.

d) Die Gerade g enthält die Punkte A und B und schneidet die x-y-Ebene im Punkt M.
Der Punkt M ist der Mittelpunkt eines in der x-y-Ebene liegenden Kreises k, der durch den Koordinatenursprung verläuft.
Stellen Sie eine Gleichung für den Kreis k auf.
Die Gerade h enthält die Punkte A und D und schneidet die x-y-Ebene im Punkt T.
Weisen Sie nach, daß es keine Tangente an den Kreis k gibt, die den Punkt T enthält.

Aufgabe B 3: Analytische Geometrie und lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem $\{0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$ sind die Punkte A(4; 0; 0), B(6; 4; 0), C(0; 6; 0) und D(5; 4; 8) gegeben. Diese Punkte sind Eckpunkte eines Körpers ABCD.

a) Skizzieren Sie den Körper ABCD in einem kartesischen Koordinatensystem.
Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCD.

b) Die Punkte M_1 bzw. M_2 sind die Mittelpunkte der Kanten $\overline{BD}$ bzw. $\overline{CD}$ des Körpers ABCD.
Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{M_1M_2}$ linear abhängig sind.

c) Durch die Punkte $P_1(1;\ 0;\ 0)$ und $P_2(0;\ 2;\ 0)$ ist eine Gerade g_1 bestimmt.
Durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ ist eine Gerade g_2 bestimmt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S und die Größe des Schnittwinkels dieser beiden Geraden.

d) Durch die Punkte B, C und D wird eine Ebene E bestimmt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form.
Untersuchen Sie, ob die Gerade g_3, die durch den Punkt A und den Richtungsvektor $\vec{m} = -3\vec{i} + 2{,}5\vec{j} + 9\vec{k}$ gegeben ist, die Ebene E im Punkt $P_4(-2;\ 5;\ 18)$ schneidet.

e) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes F so, daß das Viereck ABCF ein Parallelogramm ist.

f) Ermitteln Sie die Menge aller derjenigen Punkte P(x; y; 0) mit $x, y \in \mathbb{R}$, für die gilt: $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AP}$.
Geben Sie die Koordinaten eines derartigen Punktes an.

Aufgabe B 4: Analytische Geometrie und lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(–5; –3; 0), B(11; 5; –4) sowie die Gerade g durch die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}) \quad \text{gegeben.}$$

a) Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B.
Weisen Sie rechnerisch nach, daß sich die Geraden g und h im Punkt C(3; 1; –2) schneiden und orthogonal zueinander sind.

b) Zeigen Sie, daß jeder Punkt $P_t(\frac{1}{2}t;\ 4-\frac{1}{2}t;\ -8+t)$ $(t \in \mathbb{R})$ auf der Geraden g liegt.

c) Die Gerade g schneidet die x-y-Koordinatenebene im Punkt S.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S.
Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung des in der x-y-Koordinatenebene liegenden Kreises, der durch die Punkte S, A und den Koordinatenursprung verläuft.

d) Die Punkte A, B und $P_2(1;\ 3;\ -6)$ liegen in der Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABP_2.
Berechnen Sie die Koordinaten eines von P_2 verschiedenen Punktes D, der in der Ebene E liegt und für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABD gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABP_2 ist.

Aufgabe C 1: Komplexe Zahlen

Für die folgenden Aufgabenteile gilt stets $i^2 = -1$.

a) Gegeben sind die komplexen Zahlen
$z_1 = \sqrt{2} \cdot (1 + i)$ und $z_2 = 2 \cdot (\cos\frac{5}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{5}{6}\pi)$.
Berechnen Sie z_1^8; $z_1 \cdot z_2$ sowie $\frac{z_1}{z_2}$, und geben Sie die Ergebnisse in der Form $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ an.

b) Ermitteln Sie konstruktiv das Produkt der Zahlen
$z_3 = 5 - 2i$ und $z_4 = 3 \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3})$.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^6 = -\frac{1}{64}$ $(x \in \mathbb{C})$.

d) Geben Sie eine quadratische Gleichung an, welche die Lösungen
$x_1 = 2 - 3i$ und $x_2 = -5 + 3i$ besitzt.

e) Welche komplexen Zahlen z erfüllen die Gleichung $|z - 3 - i| = |z - 1 - 3i|$?

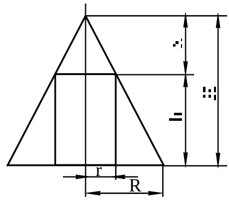
Aufgabe C 2: Numerische Verfahren

a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $x^3 - x + 6 = 0$ im Bereich der reellen Zahlen genau eine Lösung besitzt, und geben Sie diese Lösung an.

b) Lösen Sie die Gleichung $\ln x + \frac{1}{2}x - 1 = 0$ graphisch.

Bestimmen Sie mit Hilfe des allgemeinen Iterationsverfahrens die Lösung dieser Gleichung auf zwei Dezimalstellen genau. Benutzen Sie die Iterationsvorschrift $x_{n+1} = e^{1-0{,}5x_n}$.

c) Die Skizze zeigt einen Schnitt durch einen geraden Kreiskegel (Radius R = 5 cm, Höhe H = 12 cm), in den ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben ist. Das Volumen des Kreiszylinders beträgt 25% des Kegelvolumens.
(Skizze nicht maßstäblich)



Weisen Sie nach, daß sich die Höhe x des Restkegels mit Hilfe der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 144 = 0$ ermitteln läßt.
Berechnen Sie die Höhe x mit Hilfe des NEWTON-Verfahrens auf drei Dezimalstellen genau.
Geben Sie die Höhe h und den Radius r des Zylinders auf zwei Dezimalstellen genau an.

Aufgabe C 3: Kegelschnitte

In einem kartesischen Koordinatensystem sind ein Kreis durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ und eine Parabel durch die Gleichung $y^2 = \frac{16}{3}x$ gegeben.

a) Geben Sie die Koordinaten des Brennpunktes F und eine Gleichung für die Leitlinie der Parabel an.
Konstruieren Sie mindestens 10 Punkte der Parabel, und zeichnen Sie die Parabel mindestens im Intervall $0 \le x \le 6$.

b) Der Kreis und die Parabel schneiden einander im I. Quadranten im Punkt R.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes R.
Die Gerade t_k sei Tangente an den Kreis im Punkt R.
Die Gerade t_p sei Tangente an die Parabel im Punkt R.
Stellen Sie je eine Gleichung für die Tangenten t_k und t_p auf, und berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen diesen beiden Tangenten.

c) Durch den Brennpunkt F verläuft eine Gerade, die auf der Tangente t_p senkrecht steht und die Leitlinie der Parabel im Punkt L schneidet.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks FLR.

d) Eine andere Parabel, die nach oben geöffnet ist und deren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung liegt, verläuft ebenfalls durch den Punkt R.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Parabel.

Aufgabe C 4: Kegelschnitte

In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine zur Abszissenachse symmetrische Parabel durch ihren Scheitelpunkt S(0; 0) und einen Punkt P(1; 2) gegeben.

a) Ermitteln Sie die Scheitelgleichung dieser Parabel.
Konstruieren Sie mindestens 8 Punkte der Parabel, und zeichnen Sie diese Parabel im Intervall $0 \leq x \leq 6$.

b) Die Tangenten von dem Punkt T(– 4; 0) an die Parabel berühren diese in den Punkten P_1 und P_2.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks TP_1P_2.

c) Der Brennpunkt der Parabel sei der Mittelpunkt eines Kreises k.
Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 2$ ist eine Tangente an den Kreis k.
Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung für den Kreis k.

d) Der Punkt $P_0(x_0; y_0)$ $(x_0 \neq 0)$ ist ein Punkt einer Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ $(p \in \mathbb{R}, p \neq 0)$.
Weisen Sie rechnerisch nach, daß die Tangente t an diese Parabel im Punkt P_0 die Ordinatenachse im Punkt $B(0; \frac{1}{2}y_0)$ schneidet.

Aufgabe C 5: Lineare Gleichungssysteme

Für jedes t $(t \in \mathbb{R})$ ist ein lineares Gleichungssystem durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 8x & - & 8y & - & 4z & = & 16 \\ 2x & + & (t-4)y & - & z & = & 5 \\ (8-2t)x & - & 4y & + & 2z & = & -10 \end{array} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

a) Ermitteln Sie für t = 1 die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems.

b) Berechnen Sie den Wert des Parameters t, für den das zugehörige Gleichungssystem die Lösungsmenge $L = \{(-\frac{1}{8}; y; -4)\}$ $(y \in \mathbb{R})$ besitzt.

c) Berechnen Sie jeweils die Werte des Parameters t, für die das zugehörige Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

Aufgabe C 6: Lineare Gleichungssysteme

a) Der Graph einer quadratischen Funktion verläuft durch die Punkte $A(-1; 2)$, $B(\frac{1}{2}; -\frac{7}{4})$ und $C(3; 2)$.
Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung dieser Funktion, und geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion mit den Koordinatenachsen an.

b) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & cz & = & -3 \\ -2ax & + & by & - & 2cz & = & 0 \\ 3ax & - & 2by & - & 3cz & = & -11 \end{array} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Für welche reellen Koeffizienten a; b und c hat dieses Gleichungssystem die Lösungsmenge $L = \{(-1; 2; \frac{1}{2})\}$?

c) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & by & = & a \\ -2x & + & by & = & 1 \end{array} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

Für welche reellen Zahlen a und b hat das Gleichungssystem
- keine Lösung,
- genau eine Lösung,
- unendlich viele Lösungen?

Aufgabe C 7: Stochastik

Bei der Herstellung bestimmter Bauteile treten die beiden Fehler „nicht maßgerecht“ und „nicht funktionsfähig“ unabhängig voneinander auf. Dabei kommt der Fehler „nicht maßgerecht“ mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 und der Fehler „nicht funktionsfähig“ mit der Wahrscheinlichkeit 0,075 vor.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weist ein der Produktion zufällig entnommenes Bauteil keinen der beiden Fehler auf?

b) Der Produktion werden 10 Bauteile zufällig entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich unter ihnen mehr als ein nicht maßgerechtes Bauteil befindet?

c) Von 50 Bauteilen sind genau 4 fehlerhaft. Die Bauteile werden nacheinander in zufälliger Reihenfolge geprüft.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei den ersten vier Überprüfungen alle fehlerhaften Bauteile kontrolliert werden.

d) Alle produzierten Bauteile werden nacheinander, unabhängig voneinander auf Funktionsfähigkeit kontrolliert. Bei einer ersten Prüfung, die 10 Sekunden dauert, kann in 50% der Fälle über die Funktionsfähigkeit eines Bauteils entschieden werden. Nur wenn die erste Prüfung zu keiner Entscheidung führte, wird unmittelbar danach eine zweite Prüfung von 30 Sekunden Dauer durchgeführt und dabei endgültig über die Funktionsfähigkeit entschieden.
Die Zufallsgröße Z gibt die für die Kontrolle von 4 Bauteilen auf Funktionsfähigkeit erforderliche Zeit an.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert der Zufallsgröße Z.

Aufgabe C 8: Stochastik

Eine Autowerkstatt rüstet Autos mit elektronischen Wegfahrsperren und Alarmanlagen aus.

a) Die Werkstatt verfügt über 14 Stellplätze für PKW, von denen sich vier Stellplätze in der Werkstatthalle befinden.
Am Feierabend sind im Werkstattgelände zehn PKW, von denen bereits in acht PKW eine Wegfahrsperre eingebaut wurde. Die Fahrzeuge ohne Wegfahrsperre sollen innerhalb der Werkstatthalle, die mit Wegfahrsperre außerhalb abgestellt werden.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Stellflächen zu belegen, wenn die Anordnung der Fahrzeuge innerhalb einer Belegung keine Rolle spielt?

b) Der Lagerbestand besteht zu 40 % aus Wegfahrsperren vom Typ I und zu 60 % aus Wegfahrsperren vom Typ II. Die Ausschußquote liegt bei Typ I bei 3 %, bei Typ II bei 4 %.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig aus dem Lager entnommene Wegfahrsperre Ausschuß?

c) Die Lieferfirma sucht in der laufenden Produktion nach Ausschußstücken. Es werden 50 Wegfahrsperren des Typs II (Ausschußquote 4 %) geprüft.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
Ergebnis A: Es ist genau eine Wegfahrsperre Ausschuß.
Ergebnis B: Es sind mehr als 2 Wegfahrsperren Ausschuß.
Für eine Wegfahrsperre vom Typ II zahlt die Werkstatt an den Hersteller 250 DM. Eine defekte Wegfahrsperre braucht durch die Werkstatt nicht bezahlt zu werden.
Welchen Betrag muß die Werkstatt im Durchschnitt für 50 gelieferte Wegfahrsperren des Typs II bezahlen?

d) Im Rahmen einer Sonderaktion werden Kunden, die die Werkstatt betreten, befragt, ob sie den Einbau einer sehr preiswerten Alarmanlage wünschen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich die Kunden mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{8}$ für den Einbau.
Sobald sich ein Kunde für den Einbau entscheidet, wird die Befragung für diesen Tag abgebrochen, spätestens jedoch nach dem vierten befragten Kunden. Wie viele Befragungen führt die Werkstatt durchschnittlich an einem Tag durch?

Aufgabe C 9: Stochastik

Ein Biathlonwettkampf beinhaltet einen Skilanglauf und einen Schießwettbewerb. Ein Wettkämpfer muß bei einem Schießen auf fünf Scheiben schießen. Trifft er nicht alle Ziele, muß er entsprechend seinen Fehlschüssen bis zu drei Reserveschuß abgeben. Sind dann immer noch nicht alle Scheiben getroffen, muß der Sportler im Skilanglauf Strafrunden absolvieren.
Eine Biathlon-Staffel besteht aus vier Sportlern.

a) Ein Trainer stellt eine Mannschaft für einen Wettkampf auf. Die zwei stärksten Mannschaftsmitglieder stehen bereits fest. Für die beiden restlichen Plätze stehen dem Trainer 6 gleichwertige Sportler zur Verfügung. Wie viele Mannschaften kann er damit aufstellen, wenn die Startreihenfolge unberücksichtigt bleibt?
Wie viele Startreihenfolgen sind möglich, wenn von den zwei leistungsstärksten Sportlern einer als Startläufer und der andere als Schlußläufer eingesetzt werden soll?

b) Ein Sportler trifft beim Schießen erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 das Ziel.
Im Training absolviert dieser Sportler eine Serie von 20 Schuß.
Wie viele Treffer kann er dabei erwarten?
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
Ereignis A: Der Sportler erzielt 20 Treffer.
Ereignis B: Der Sportler trifft wenigstens 18 mal.

c) Ein Schütze hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 0,9.
Auf einer Übungsschießanlage kippt bei einem Treffer die Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 um. Bei einem Fehlschuß kippt die Scheibe aufgrund von Vibrationen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 um.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kippt bei einem Schuß des Schützens die Scheibe um?

d) Bei einem Training muß ein Sportler auf 5 Scheiben schießen. Dafür hat er 5 Schuß im Magazin und nur 2 Reserveschuß zur Verfügung. Erfahrungsgemäß benötigt er für einen Schuß aus dem Magazin 3 Sekunden. Für jeden der maximal zwei Reserveschuß benötigt er wegen des Nachladens im Durchschnitt 10s. Er trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9.
Die Zufallsgröße Z beschreibe die Zeit (in Sekunden), die für das Schießen benötigt wird.
Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Z an.
Ermitteln Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße Z.

Aufgabe C 10: Stochastik

Eine Urne enthalte sechs Kugeln, auf die je genau eine Zahl aufgedruckt ist. Auf zwei Kugeln ist die Zahl 2, auf eine Kugel die Zahl 3 und auf drei Kugeln die Zahl 6 aufgedruckt.
Ein Zufallsexperiment besteht im zweimaligen Ziehen einer Kugel, die dabei nach erfolgter Ziehung jeweils wieder zurückgelegt werden soll.
Die Zufallsgröße X beschreibt die dabei ermittelte Augensumme.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X an.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Es werden zwei gleiche Zahlen gezogen.
Ereignis B: Die Summe der Zahlen ist kleiner als sieben.
Geben Sie alle Ergebnisse an, die zum Eintreten des Gegenereignisses vom Ereignis „A und B“ führen.

Aus der Urne wird erneut mit Zurücklegen der Kugeln gezogen.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei drei Ziehungen mindestens einmal eine Kugel mit der Zahl 6 gezogen wird.

d) Wie oft muß die Ziehung mindestens durchgeführt werden, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens eine Kugel mit der Zahl 6 gezogen wird, größer als 99 % wird?

e) Ermitteln Sie rechnerisch, was wahrscheinlicher ist: Bei drei Ziehungen mindestens einmal eine Kugel mit der Zahl 6 zu ziehen oder bei sechs Ziehungen mindestens zweimal eine Kugel mit der Zahl 6 zu ziehen.

Jetzt wird aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird beim dreimaligen Ziehen genau zweimal eine 6 gezogen?

Erwartungsbild zu Aufgabe A1: Analysis

a) Nullstellen: $x_{N1} = -2$; $x_{N2} = 1$; $x_{N3} = 3$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen mit der y-Achse: $P_y(0; 6)$

Ableitungen von f(x): $f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$; $f''(x) = 6x - 4$

Lokale Extrema: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{E1} = 2{,}1$; $x_{E2} = -0{,}8$

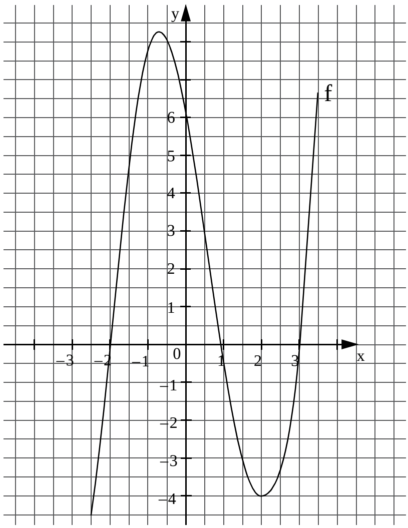
Nachweis der lokalen Extrema:

$f''(x_{E1}) = 8{,}7 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

$f''(x_{E2}) = -8{,}7 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

Koordinaten der lokalen Extrempunkte: $P_{MIN}(2{,}1; -4{,}1)$; $P_{MAX}(-0{,}8; 8{,}2)$

Graph:



b) Anstieg der Tangenten: $m = -1$

Ansatz: $f'(x) = -1$

$3x^2 - 4x - 5 = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$; $x_2 = 2$ und damit $P_1(-\frac{2}{3}; \frac{220}{27})$; $P_2(2; -4)$

c) $f(x) = p(x)$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = x^3 + 6$, also $-2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -2{,}5$

$$A = \int_{-2,5}^{0} (f(x) - p(x))dx$$

$$= \int_{-2,5}^{0} (-2x^2 - 5x)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_{-2,5}^{0} \approx 5{,}21 \text{ (FE)}$$

d) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = m \cdot x + 6$, also $x^3 - 2x^2 - 5x - mx = x(x^2 - 2x - 5 - m) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_{2;3} = 1 \pm \sqrt{6 + m}$
$\Rightarrow$ genau drei Schnittpunkte existieren für $m > -6$ und $m \neq -5$.

e) $h_{0,25}$: $y = h_{0,25}(x) = 0,25 \cdot x + 6$
Ansatz für Koordinaten der Schnittpunkte: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,25x + 6$
Koordinaten der Schnittpunkte: $S_1(-1,5;\ 5,625)$; $S_2(3,5;\ 6,875)$
Ansatz für Flächeninhalt: $A = \frac{6 \cdot 1,5}{2} + \frac{6 \cdot 3,5}{2}$ (FE)
Flächeninhalt: A = 15 (FE)

Bewertungsvorschlag:

a)	erste Nullstelle; zweite Nullstelle; dritte Nullstelle; Verhalten im Unendlichen; Koordinaten des Schnittpunktes; 1. Ableitung; 2. Ableitung; erste Extremstelle; zweite Extremstelle; Nachweis des lokalen Minimums; Nachweis des lokalen Maximums; Koordinaten der lokalen Extrempunkte; Graph	13 BE
b)	Anstieg; Ansatz für Punkte; Abzissen beider Punkte; Koordinaten beider Punkte	4 BE
c)	Ansatz für Schnittpunkte; Abszissen der Schnittpunkte; Ansatz für Flächeninhalt; Stammfunktion; Flächeninhalt	5 BE
d)	Ansatz für Schnittstelle; Schnittstelle x = 0; weitere Schnittstellen; Schlußfolgerung	4 BE
e)	Abszisse von S_1; Abszisse von S_2; Ansatz für Flächeninhalt; Flächeninhalt	4 BE
		30 BE

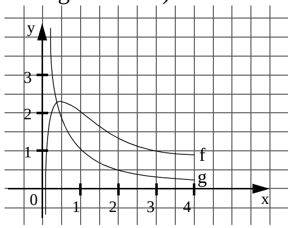
Erwartungsbild zu Aufgabe A 2: Analysis

a) Definitionsbereich: $\{x \mid x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$
Nullstelle: $\ln x_N = -2 \quad \Rightarrow \quad x_N = e^{-2}$ (Näherungswert: $x_N = 0,1353$)

Ableitungen von f(x): $f'(x) = \frac{-\ln x - 1}{x^2}$; $f''(x) = \frac{2\ln x + 1}{x^3}$

lokale Extremstelle: $f'(x_E) = 0 \quad \Rightarrow \ln x_E = -1$, also $x_E = e^{-1} \approx 0,3679$
Nachweis des Extremums: $f''(e^{-1}) = -e^3 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum
Koordinaten des lokalen Extremums: $P_{MAX}(e^{-1} \approx 0,3679;\ e \approx 2,718)$

Graph (auch Graph von Aufgabenteil e):



b) P(1; 2); $f'(1) = -1$
Gleichung der Tangente t: $y = -x + 3$
Anstieg m der Gerade h: $m = 1$; Gleichung der Geraden h: $y = x + 1$
Q(3; 0); R(–1; 0)
Flächeninhalt A_Δ des Dreiecks PQR: $A_\Delta = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$ (FE)

c) $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot (\ln x + 2) \Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f.
$2 = \frac{1}{2} \cdot (\ln\sqrt{e}\,)^2 + 2 \cdot \ln\sqrt{e} + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{7}{8}$
gesuchte Stammfunktion: $G(x) = \frac{1}{2} \cdot (\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x + \frac{7}{8}$

d) $I = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{\ln x + 2}{x}\, dx = [\frac{1}{2} \cdot (\ln x)^2 + 2\ln x]_{e^{-2}}^{e} = (\frac{1}{2} + 2) - (\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot (-2)) = 4{,}5$
Inhalt der Fläche A: 4,5 (FE)

e) Ansatz für Schnittstelle: $\frac{\ln x+2}{x} = \frac{1}{x}$, also $\ln x + 2 = 1$ (da $x > 0$) und $x = e^{-1}$.

I sei der Inhalt der an der x-Achse liegenden Teilfläche.
$I_1 = \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{\ln x + 2}{x}\, dx = [\frac{1}{2} \cdot (\ln x)^2 + 2\ln x]_{e^{-2}}^{e^{-1}} = -1{,}5 + 2 = 0{,}5$ (FE)
$I_2 = \int_{e^{-1}}^{e} \frac{1}{x}\, dx = [\ln|x|]_{e^{-1}}^{e} = 2$ (FE)
$I = I_1 + I_2 = 2{,}5$ (FE)
Inhalt der Gesamtfläche: 4,5 (FE) $\Rightarrow$
Verhältnis der Inhalte der Teilflächen: 2,5 : 2 bzw. 5 : 4

f) Zielfunktion: $d(u) = f(u) - g(u) \quad (u \in \mathbb{R};\ u > 0)$
$d(u) = \frac{\ln u + 2}{u} - \frac{1}{u} = \frac{\ln u + 1}{u}$
Ableitungen: $d'(u) = \frac{-\ln u}{u^2}$; $d''(u) = \frac{2\ln u\text{-}1}{u^3}$
$d'(u_E) = 0 \Rightarrow \ln u_E = 0$, also $u_E = 1$
$d''(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum
Das lokale Maximum ist auch globales Maximum.
Für u = 1 wird die Länge der Strecke $\overline{ST}$ maximal.

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Nullstelle; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Extremstelle; Koordinaten des Extremum; Art des Extremum; Graph	8 BE
b)	Anstieg der Tangente t; Gleichung der Tangente t; Anstieg der Geraden h; Gleichung der Geraden h; Koordinaten der Punkte Q und R; Flächeninhalt	6 BE
c)	Ansatz für Nachweis; Nachweis; Gleichung der speziellen Stammfunktion	3 BE
d)	Ansatz für Flächeninhalt; Ergebnis	2 BE
e)	Graph von g; Schnittstelle; Ansatz für Berechnung des Flächeninhaltes der ersten Teilfläche; Flächeninhalt der ersten Teilfläche; Flächeninhalt der zweiten Teilfläche; Verhältnis	6 BE
f)	Zielfunktion; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Wert für u; Nachweis des Maximums	5 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A 3: Analysis

a) Nullstellen: $e^x - e = 0 \;\Rightarrow\; x_N = 1$

Monotonie: $f'(x) = e^x$ $\quad$ $f'(x) > 0$ im gesamten Definitionsbereich

$\Rightarrow$ Die Funktion f ist monoton wachsend im gesamten Definitionsbereich.

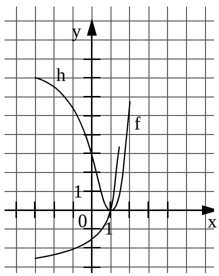
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x - e) = \infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - e) = -e$

Stelle x_1: $e = e^{x_1 - e} \;\Rightarrow\; x_1 = \ln(2e)$

Gleichung der Tangente t:

$f'(0) = e^0 = 1$; $\;f(0) = 1 - e$ $\quad$ (Näherungswert: $-1{,}72$)

$\Rightarrow$ Tangente t: $y = x + 1 - e$ bzw. $y = x - 1{,}72$



b) g: $y = g(x) = e^x \;(0 \le x \le 2)$

$$A(u) = \int_0^u (e^u - e^x)dx + \int_u^2 (e^x - e^u)dx = [e^u x - e^x]_0^u + [e^x - e^u x]_u^2$$

$$A(u) = [e^u u - e^u + 1] + [e^2 - 2e^u - e^u + ue^u]$$

Zielfunktion: $A(u) = 2ue^u - 4e^u + e^2 + 1 \quad (0 < u < 2)$

$A'(u) = 2e^u + 2ue^u - 4e^u = 2ue^u - 2e^u$

$A'(u) = 0 \Rightarrow 0 = 2ue^u - 2e^u = 2e^u(u-1) \Rightarrow u_E = 1$

$A''(u) = 2ue^u + 2e^u - 2e^u = 2ue^u$

$A''(1) = 2e; \quad A''(1) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

Das lokale Minimum ist auch globales Minimum

$\Rightarrow$ Für $u = 1$ ist die Summe der Flächeninhalte minimal.

c) Größtmöglicher Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$; Wertebereich: $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$

Nullstellen: $e^x - e = 0 \Rightarrow x_N = 1$

Ableitungen: $h'(x) = 2(e^x - e) \cdot e^x$; $h''(x) = 2e^{2x} + 2e^x(e^x - e) = 2e^x(2e^x - e)$

lokale Extrema: $h'(x) = 0 \Rightarrow e^x - e = 0$, also $x_E = 1$

$h''(1) = 2e^2 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum $P_{MIN}(1:0)$

Graph: (siehe Aufgabenteil a))

Schnittpunkt: $e^2 = (e^x - e)^2 = e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2$ bzw. $0 = e^{2x} - 2e^{x+1} = e^x(e^x - 2e)$

$e^x = 2e \Rightarrow x_s = \ln(2e) = 1 + \ln 2$

Schnittpunkt: $S(1 + \ln 2; e^2)$

d) $x_g = 1$

$A = \int_0^1 ((e^x - e)^2 - (e^x - e))dx = \int_0^1 (e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 - e^x + e)dx$

$= [\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{x+1} + xe^2 - e^x + ex]_0^1 = -\frac{1}{2}e^2 + 2e + \frac{1}{2}$ (Näherungswert: 2,24)

Bewertungsvorschlag:

a) Nullstelle; Monotonie; Verhalten für $x \to \infty$; Verhalten für $x \to -\infty$; Stelle x_1; Graph; Anstieg der Tangente; Gleichung der Tangente — 8 BE

b) Gleichung der Funktion g; Ansatz; Zielfunktion; 1. Ableitung; Extremstelle; 2. Ableitung; Art des Extremums — 7 BE

c) größtmöglicher Definitionsbereich; Wertebereich; Nullstelle; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Extremstelle; Koordinaten des lokalen Extrempunktes; Art des Extremums; Graph; Ansatz für Schnittpunkt; Koordinaten des Schnittpunktes — 11 BE

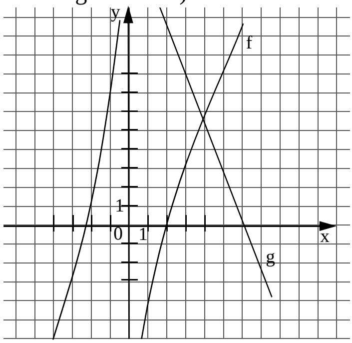
d) Integrationsgrenzen; Ansatz; Stammfunktion; Flächeninhalt — 4 BE

30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A 4: Analysis

a) Definitionsbereich D_f: $\{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}$
Nullstellen: $0 = 2x^2 - 8 \Rightarrow x_{N1} = -2;\ x_{N2} = 2$
Polstelle: $x = 0$
Symmetrie: $f(-x) = \frac{2(-x)^2 - 8}{-x} = -f(x)$
$\Rightarrow$ zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty;\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
1. Ableitung: $f'(x) = \frac{2x^2 + 8}{x^2}$
lokale Extrema: $f'(x_E) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow$ keine lokalen Extrema

Graph (auch Graph zu Aufgabenteil c):



b) Ermitteln der Abszizze von P: $f(x) = 6 \Rightarrow 6 = \frac{2x^2 - 8}{x}$
$0 = x^2 - 3x - 4 \Rightarrow x_1 = -1$ (entfällt); $x_2 = 4$ (trifft zu)
$\Rightarrow P(4; 6)$ $\quad f'(4) = 2 + \frac{8}{16} = \frac{5}{2}$
Ansatz für Gleichung der Tangente: $y = mx + n$
$6 = \frac{5}{2} \cdot 4 + n$, also $n = -4$
Gleichung der Tangente: $y = \frac{5}{2}x - 4$

c) $A = \int\limits_2^6 (2x - \frac{8}{x})dx = [x^2 - 8 \cdot \ln|x|]_2^6$
$= 32 - 8 \cdot \ln 6 + 8 \cdot \ln 2 = 32 - 8 \cdot \ln 3 \approx 23{,}21$ (FE)

Zeichnung der Geraden (siehe Aufgabenteil a))

Schnittstelle der Geraden mit dem Graphen von f:
$\frac{2x^2 - 8}{x} = -3x + 18 \Rightarrow 0 = 5x^2 - 18x - 8;\ x_1 = -\frac{2}{5}$ (entfällt); $x_2 = 4$ (trifft zu)
Zerlegung der Teilfläche A_1 zwischen Gerade und x-Achse in zwei Teile:

$$A_{1_1} = \int_2^4 \left(2x - \frac{8}{x}\right)dx = \left[x^2 - 8\ln|x|\right]_2^4$$
$$= 12 - 8 \cdot \ln 4 + 8 \cdot \ln 2 = 12 - 8 \cdot \ln 2 \text{ (FE)}$$
$$A_{1_2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ (FE)} \text{ (Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks)}$$
$$A_1 = A_{1_1} + A_{1_2} = 18 - 8 \cdot \ln 2 \approx 12{,}45 \text{ (FE)}$$
$$A_2 = A - A_1 = 32 - 8 \cdot \ln 3 - 18 + 8 \cdot \ln 2 = 14 - 8 \cdot \ln\frac{3}{2} \approx 10{,}76 \text{ (FE)}$$

d) $y = h(x) = x^3$

Zielfunktion: $d(x) = h(x) - f(x) = x^3 - 2x + \frac{8}{x} \quad (x > 0)$

$d'(x) = 3x^2 - 2 + \frac{8}{x^2}$; $d'(x) = 0 \Rightarrow 0 = 3x^4 - 2x^2 - 8$

Substitution: $x^2 = z \Rightarrow 3z^2 - 2z - 8 = 0$

$z_1 = -\frac{4}{3}$ (entfällt); $z_2 = 2$ (trifft zu) $\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$ (entfällt)

$x_2 = \sqrt{2}$ (trifft zu)

$d''(x) = 6x + \frac{16}{x^3}$; $d''(\sqrt{2}) = 6 \cdot \sqrt{2} + \frac{16}{2 \cdot \sqrt{2}} = 10 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$ lokales Minimum

$d(\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} + \frac{8}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \sqrt{2}$

e) Nullstellen: $0 = \frac{2x^2 - c}{x}$, also $x^2 = \frac{c}{2}$ und $x_{1;\,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{2}}$

für $c < 0$: keine Nullstelle)

für $c = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x \notin D_f \Rightarrow$ keine Nullstelle (dieser Fall brauchte nicht untersucht zu werden)

für $c > 0$ genau zwei Nullstellen

$f_c(x) = 2x - \frac{c}{x}$; $f'_c(x) = 2 + \frac{c}{x^2}$; $4 = 2 + c \Rightarrow c = 2$

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Nullstellen; Polstelle; Symmetrie; Verhalten im Unendlichen; 1. Ableitung; Begründung; Graph	8 BE
b)	x-Wert; Anstieg; Gleichung der Tangenten	3 BE
c)	Ansatz; Stammfunktion; Flächeninhalt; Graph von g; Schnittstelle; Ansatz für Flächeninhalt A_1; Flächeninhalt A_1; Flächeninhalt A	8 BE
d)	1. Ableitung; biquadratische Gleichung; Lösung der biquadratischen Gleichung; Extremstelle; 2. Ableitung; Nachweis des Minimums; minimale Differenz	7 BE
e)	Ansatz; Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von c; Ansatz; Wert für c	4 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B 1: Analytische Geometrie und lineare Algebra

a) B(2; 4; 0); C(0; 4; 0); E(2; 0; 3); F(2; 4; 3); H(0; 0; 3)

$$\overrightarrow{OT}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\text{r};\ \overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}2\\2\\1{,}5\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}1\\2\\1{,}5\end{pmatrix}$$

b) $\overrightarrow{TB} = \frac{1}{2}\,(\vec{a} + \vec{b})\quad ;\quad \overrightarrow{BF} = \vec{c}\quad ;\quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\,(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

c) $\cos\alpha\ \left|\dfrac{\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}}{29}\right| = \dfrac{3}{29}\quad\Rightarrow\quad\alpha = 84{,}1°$

d) Y(3; 1; 0)

$$\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{XZ} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix};\ \left|\overrightarrow{XY}\right| = \sqrt{29}\,;\ \left|\overrightarrow{XZ}\right| = \sqrt{32}$$

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{XY};\overrightarrow{XZ}) = \frac{\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{32}} = 0{,}9191\ \Rightarrow\ \sphericalangle(\overrightarrow{XY};\overrightarrow{XZ}) = 23{,}19°$$

Flächeninhalt der Grundfläche: $A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{XY}\right|\cdot\left|\overrightarrow{XZ}\right|\cdot\sin\sphericalangle(\overrightarrow{XY};\overrightarrow{XZ})$
$= 6$ (FE)

Volumen: $V = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 3 = 6$ (VE)

e) g(AC): $y = -2x + 4$

$k \cap g(AC)$: $(x + 2)^2 + (-2x + 6)^2 = 45$, also $x^2 - 4x - 1 = 0$

$x_1 = 2 + \sqrt{5}\,;\ y_1 = -2\cdot\sqrt{5}\qquad x_2 = 2 - \sqrt{5}\ ;\ y_2 = 2\cdot\sqrt{5}$

$\Rightarrow\ \left|\overline{S_1S_2}\right| = \sqrt{2\,(\sqrt{5})^2 + (-4\sqrt{5})^2} = 10$ (LE)

Tangenten t an k mit Anstieg –2: $y = -2x + n$

$k \cap t$:

$$\begin{aligned}
(x + 2)^2 + (-2x + n + 2)^2 &= 45\\
x^2 + 4x + 4 + 4x^2 - 8x - 4nx + 4n + 4 + n^2 &= 45\\
x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{4}{5}nx + \frac{4}{5}n + \frac{n^2}{5} - \frac{37}{5} &= 0\\
x^2 - \frac{4 + 4n}{5}x + \frac{n^2 + 4n - 37}{5} &= 0\\
x_{1;2} = \frac{2 + 2n}{5} \pm \sqrt{\frac{4 + 8n + 4n^2}{25} - \frac{5n^2 + 20n - 185}{25}}&\\
= \frac{2 + 2n}{5} \pm \sqrt{\frac{-n^2 - 12n + 189}{25}}&
\end{aligned}$$

Bedingung für Tangente: Diskriminante muß 0 sein.
$\Rightarrow$ $n^2 + 12n - 189 = 0$; $n_1 = 9$; $n_2 = -21$
$\Rightarrow$ Gleichungen der Tangenten: t_1: $y = -2x + 9$; t_2: $y = -2x - 21$

Weiterer Lösungsweg:

– Ermittlung der Tangentenberührungspunkte als Schnitt des Kreises k mit der Mittelsenkrechten auf $\overline{S_1S_2}$.
– Einsetzen der Koordinaten der Berührungspunkte in die Tangentengleichung.

Bewertungsvorschlag:

a)	Koordinaten aller Punkte; ein Ortsvektor; alle Ortsvektoren	3 BE
b)	erste Linearkombination; zweite Linearkombination; dritte Linearkombination	3 BE
c)	Ansatz; Größe des Winkels	2 BE
d)	Koordinaten von Y; Ansatz; Flächeninhalt der Grundfläche; Volumen	4 BE
e)	Gleichung der Geraden g; Ansatz für Schnittpunkte; Koordinaten der Schnittpunkte; Länge der Sehne; Ansatz für Tangenten; quadratische Gleichung; Werte, für die die Diskriminante Null ist; Gleichungen der Tangenten	8 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B 2: Analytische Geometrie und lineare Algebra

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R};\ s \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} x &= 2 - 6t - 5s \\ y &= 5 + 3t - 3s \\ z &= -3 + 6t + 6s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + z &= -1 + s \\ x + 2y &= 12 - 11s \end{aligned}$$

E: $12x + 2y + 11z = 1$

Lage des Punktes D: $12 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 11 \cdot 1 = 1$

$1 = 1$ wahre Aussage

$\Rightarrow D \in E$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegen $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{DC}$ ist $\overline{AB} \,||\, \overline{DC} \Rightarrow$ ABCD ist Trapez.

Wegen $\overrightarrow{AD} \neq \mu \cdot \overrightarrow{BC}$ $(\mu \in \mathbb{R})$ ist $\overline{AD} \nparallel \overline{BC} \Rightarrow$ ABCD ist kein Parallelogramm.

M_1 sei der Mittelpunkt von $\overline{AD}$, M_2 sei der Mittelpunkt von $\overline{BC}$.

$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$; $\qquad \overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$\Rightarrow \quad M_1(0{,}5;\, 3;\, -1)$; $\qquad M_2(-3{,}5;\, 5;\, 3)$

m: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$

$$\cos \sphericalangle BAD = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}}{9 \cdot \sqrt{41}} = \frac{10}{3 \cdot \sqrt{41}} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BAD = 58{,}6°$$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}\,(a + c) \cdot h$; $\quad h = \sin \sphericalangle BAD \cdot \left|\overline{AD}\right| = 5{,}46$

$A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5{,}46 = 32{,}8$ (FE)

c) $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad F(3;\, -1;\, -3)$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R})$

$M(x;\, y;\, 0) \quad \Rightarrow \quad -3 + 6u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0{,}5$

$\Rightarrow \quad M(-1;\, \frac{13}{2};\, 0); \quad \Rightarrow \quad r^2 = 1^2 + \frac{13^2}{2} = \frac{173}{4}$

Kreis k: $(x + 1)^2 + (y - \frac{13}{2})^2 = \frac{173}{4}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (v \in \mathbb{R})$

$(x;\, y;\, 0) \quad \Rightarrow \quad -3 + 4v = 0$, also $\quad v = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad T(-\frac{1}{4};\, 2;\, 0)$

$\left|\overline{MQ}\right|^2 = \frac{333}{16}$

$\frac{333}{16} < \frac{173}{4}$ $\quad\Rightarrow$ Der Abstand des Punktes M vom Punkt T ist kleiner als der Radius des Kreises k.

$\Rightarrow$ T liegt im Inneren des Kreises k.

$\Rightarrow$ Es gibt keine Tangente an den Kreis k, die den Punkt T enthält.

Bewertungsvorschlag:

a) Parametergleichung; Substitution eines Parameters; Gleichung in allgemeiner Form; Nachweis — 4 BE

b) Nachweis, daß ABCD ein Trapez ist; Nachweis, daß ABCD kein Parallelogramm ist; Koordinaten des Mittelpunktes der Seite $\overline{AD}$ oder der Seite $\overline{BC}$; Gleichung der Geraden m; Ansatz für Winkel; Größe des Winkels; Ansatz für Flächeninhalt; Flächeninhalt — 8 BE

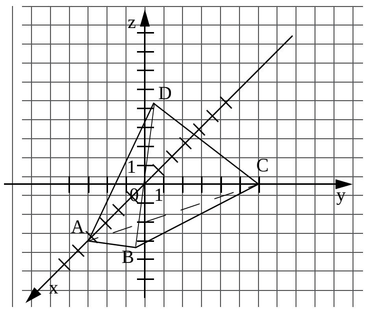
c) Koordinaten von F — 1 BE

d) Gleichung der Geraden g; Koordinaten von M; Gleichung des Kreises k;
Gleichung der Geraden h; Koordinaten von T; Abstand der Punkte M und T; Schlußfolgerung und Begründung — 7 BE

20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B 3: Analytische Geometrie und lineare Algebra

` ABCD ist eine dreiseitige Pyramide.



$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

$A_G = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \sin\sphericalangle(\overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AC})$

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\6\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{52}} = \frac{16}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{52}}$$

$\Rightarrow\ \sphericalangle(\overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AC}) = 60{,}26°$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{52} \cdot \sin 60{,}26° \cdot 8$

$\quad = \frac{16}{3}\sqrt{65} \cdot \sin 60{,}26° \approx 37{,}34$ (VE)

b) $M_1(\frac{11}{2}; 4; 4)$, $M_2(\frac{5}{2}; 5; 4)$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = 2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$ $\Rightarrow$ Die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{M_1M_2}$ sind linear abhängig.

c) g_1: $y = -2x + 2$ $\qquad$ g_2: $y = 2x - 1$

Koordinaten des Schnittpunktes: $S(\frac{3}{4};\frac{1}{2})$

Schnittwinkel: $\tan\sphericalangle(g_1; g_2) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \frac{4}{3} \Rightarrow \sphericalangle(g_1; g_2) = 53{,}1°$

d) Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}; s \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} x &= 6 - 6r - s \\ y &= 4 + 2r \quad \Rightarrow r = 0{,}5y - 2 \\ z &= 8s \quad \Rightarrow s = \tfrac{1}{8}z \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 6 - 6(0{,}5y - 2) - \frac{1}{8}z$

E: $8x + 24y + z = 144$

Probe, ob P_4 in E liegt: $8 \cdot (-2) + 24 \cdot 5 + 1 \cdot 18 = 122 \neq 144$

$\Rightarrow$ P_4 ist nicht Schnittpunkt von Gerade g_3 und Ebene E.

e) $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F(-2; 2; 0)$

f) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, also $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 3x - 12$

$\Rightarrow$ Alle Punkte P mit der geforderten Eigenschaft liegen in der x-y-Ebene auf der Geraden mit der Gleichung $y = 3x - 12$.

$\Rightarrow$ $P(x; 3x - 12; 0) \quad (x \neq 4)$

Koordinaten eines Punktes: z. B. $P_0(0; -12; 0)$

Bewertungsvorschlag:

a)	Skizze; Ansatz für Flächeninhalt der Grundfläche; Flächeninhalt der Grundfläche; Volumen	4 BE
b)	Koordinaten der Mittelpunkte; Ansatz für Nachweis; Nachweis der linearen Abhängigkeit	3 BE
c)	Ansatz für Koordinaten von S; Koordinaten von S; Ansatz für Schnittwinkel; Größe des Schnittwinkels	4 BE
d)	Ansatz; Eliminieren eines Parameters; Ebenengleichung; Ergebnis	4 BE
e)	Ansatz; Koordinaten von F	2 BE
f)	Ansatz; Gleichung der Geraden; Koordinaten eines Punktes	3 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B 4: Analytische Geometrie und lineare Algebra

a) Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$

Punktproben für C:

$$\begin{array}{rcl|l|l} 3 &=& -5 + 16r & \Rightarrow r = 0{,}5 & \\ 1 &=& -3 + 8r & \Rightarrow r = 0{,}5 & \Rightarrow C \in h \\ -2 &=& 0 - 4r & \Rightarrow r = 0{,}5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|l|l} 3 &=& 5 + s & \Rightarrow s = -2 & \\ 1 &=& -1 - s & \Rightarrow s = -2 & \Rightarrow C \in g \\ -2 &=& 2 + 2s & \Rightarrow s = -2 & \end{array}$$

Nachweis der Orthogonalität: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \ g \perp h$

b) Punktprobe für P_t:

$$\begin{array}{rcl|l|l} 0{,}5t &=& 5 + s & \Rightarrow t = 10 + 2s & \\ 4 - 0{,}5t &=& -1 - s & \Rightarrow t = 10 + 2s & \Rightarrow P_t \in g \text{ für } t \in \mathbb{R} \\ -8 + t &=& 2 + 2s & \Rightarrow t = 10 + 2s & \end{array}$$

c) $S(x; y; 0) \Rightarrow 0 = 2 + 2s \Rightarrow s = -1;\quad S(4; 0; 0)$

Der Mittelpunkt des Kreises k habe die Koordinaten (a; b).

$\Rightarrow$ Gleichung des Kreises k: $(x - a)^2 + (y - b)2 = r^2$

$$\begin{array}{rrcl} A \in k: & (-5 - a)^2 + & (-3 - b)^2 &= r^2 \\ S_{xy} \in k: & (4 - a)^2 + & (0 - b)^2 &= r^2 \\ 0 \in k: & (0 - a)^2 + & (0 - b)^2 &= r^2 \quad \downarrow - \\ \hline & 16 - 8a + & a^2 - a^2 &= 0 \Rightarrow a = 2 \end{array}$$

Einsetzen von a = 2 in 1. und 2. Gleichung liefert:

$$\begin{array}{rcl} 49 + 9 + 6b + b^2 &=& r^2 \\ 4 + b^2 &=& r^2 \quad \downarrow - \\ \hline 54 + 6b &=& 0, \text{ also } b = -9 \end{array}$$

$\Rightarrow M(2; -9);\quad r = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{4 + 81} = \sqrt{85}$ (LE)

$\Rightarrow$ k: $(x - 2)^2 + (y + 9)^2 = 85$

d) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (s_1 \in \mathbb{R}; s_2 \in \mathbb{R})$

$$\begin{array}{l} x = -5 + 16s_1 + 6s_2 \\ y = -3 + 8s_1 + 6s_2 \\ z = \quad\ - 4s_1 - 6s_2 \\ \hline y + z = -3 + 4s_1 \\ x + z = -5 + 12s_1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ E: $x - 3y - 2z = 4$

Flächeninhalt des Dreiecks ABP_2:

$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

$c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{256 + 64 + 16} = \sqrt{336} = 4 \cdot \sqrt{21}$ (LE)

$P_2 \in P_t \Rightarrow P_2$ liegt auf der Geraden h.

Die Gerade h schneidet die Gerade g senkrecht im Punkt C.

$\Rightarrow h_c = \left|\overrightarrow{P_2C}\right| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (LE)

$A = \frac{4 \cdot \sqrt{21} \cdot 2 \cdot \sqrt{6}}{2} = 12 \cdot \sqrt{14}$ (FE)

Für alle Dreiecke ABD_i gilt $\left|\overrightarrow{AB}\right| = c =$ konstant.

Soll der Flächeninhalt des gesuchten Dreiecks gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABP_2 sein, muß gelten: Abstand $d(D_i; h) = \left|\overrightarrow{P_2C}\right| = h_c =$ konstant.

$\Rightarrow$ Alle Punkte D_i liegen auf zu h(AB) parallelen Geraden e_1 und e_2 in der Ebene E.

Gerade e_1 durch P_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(t_1 \in \mathbb{R})$

D* sei der Spiegelpunkt von P_2 an der Geraden h:

$\overrightarrow{OD^*} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{P_2C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^*(5; -1; 2)$

Gerade e_2 durch D*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(t_2 \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Anzugeben sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden e_1 oder e_2, z. B.: $D^*(5; -1; 2)$

Bewertungsvorschlag:

a)	Gleichung der Geraden h(AB); Punktprobe für die Gerade h; Punktprobe für die Gerade g; Ansatz für Orthogonalität; Nachweis	5 BE
b)	Ansatz; Nachweis	2 BE
c)	Ansatz; Koordinaten von S; Ansatz; Radius des Kreises; Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises; Gleichung des Kreises	6 BE
d)	Ansatz; Substitution eines Parameters; Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form; Ansatz; Flächeninhalt Ansatz; Koordinaten eines Punktes D	7 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 1: Komplexe Zahlen

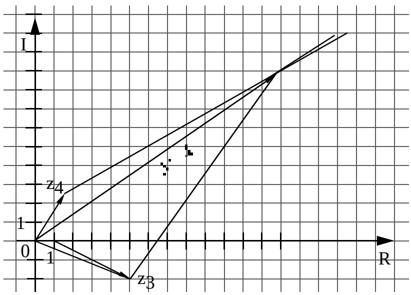
a) $\tan\varphi = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{4}$; $r = 2 \;\Rightarrow\; z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$z_1^8 \quad = 2^8 \cdot (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 256$

$z_1 \cdot z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{6} + (\sqrt{2} - \sqrt{6})i$

$\frac{z_1}{z_2} \quad = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2} + (-\sqrt{6} - \sqrt{2})\,i}{3 + 1} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\,i$

b) Konstruktion:



c) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$ $(n \in \mathbb{N}^+;\ k \in \{0; 1; 2; ...; (n-1)\})$

Für $n = 6$ und $z = -\frac{1}{64} \;\Rightarrow$

$x_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i$ $\qquad x_2 = \frac{1}{2}i$ $\qquad x_3 = -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i$

$x_4 = -\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}i$ $\qquad x_5 = -\frac{1}{2}i$ $\qquad x_6 = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}i$

d) Gesucht: quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$

Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

$\Rightarrow\; x^2 + 3x - 1 + 21i = 0$

e) $|z - 3 - i| = |z - 1 - 3i|$ $\qquad$ a... Realteil der komplexen Zahl z

$(a - 3)^2 + (b - 1)^2 = (a - 1)^2 + (b - 3)^2$ $\qquad$ b... Imaginärteil der komplexen Zahl z

$\Rightarrow\; a = b$

$\Rightarrow$ Alle komplexen Zahlen, bei denen Realteil und Imaginärteil übereinstimmen, erfüllen die Gleichung.

Weiterer Lösungsweg:

Alle komplexen Zahlen, deren Punkte in der GAUSSschen Zahlenebene von den Punkten (3; 1) und (1; 3) denselben Abstand haben, d. h., auf der Mittelsenkrechten dieser Punkte liegen, erfüllen die Gleichung.

Diese Mittelsenkrechte ist die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten.

$\Rightarrow$ Alle komplexen Zahlen, bei denen Realteil und Imaginärteil übereinstimmen, erfüllen die Gleichung.

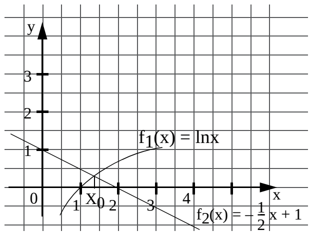
Bewertungsvorschlag:

a)	Ansatz für z_1^8; z_1^8; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$	4 BE
b)	Konstruktion	1 BE
c)	eine Lösung; alle Lösungen	2 BE
d)	Gleichung	1 BE
e)	Ansatz; Ergebnis	2 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 2: Numerische Verfahren

a) $x_1 = -2$ (Lösung durch systematisches Probieren finden bzw. Gleichung graphisch lösen)
Nachweis der einzigen Lösung: $(x^3 - x + 6) : (x + 2) = x^2 - 2x + 3$
Aus $x^2 - 2x + 3 = 0$ folgt $x_{2;3} = 1 \pm \sqrt{1-3} \Rightarrow L = \{-2\}$

b) $\ln x = -\frac{1}{2}x + 1$
Ablesen aus Zeichnung: $x_0 = 1{,}4$
Zwei Iterationsformen bieten sich u. a. an: (lt. Aufgabenstellung ist die 2. Form anzuwenden!)
Erste Möglichkeit: $x = \varphi(x) = 2 - 2 \cdot \ln x$
$|\varphi'(x)| = \left|-\frac{2}{x}\right| \geq 1$ in $[1; 2] \Rightarrow$ Divergenz



Zweite Möglichkeit: $x = \varphi(x) = e^{1-0{,}5x}$
$|\varphi'(x)| = \left|-\frac{1}{2}e^{1-0{,}5x}\right| < 1$ in $[1; 2] \Rightarrow$ Konvergenz
Startwert: $x_0 = 1{,}4$; Ergebnis: $x = 1{,}37$

c) $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi \Rightarrow V_{Zylinder} = 25\pi$
$25\pi = \pi r^2 h$, also $25 = r^2 h$.
Wegen $\frac{12}{5} = \frac{x}{r}$ (nach Strahlensatz), also $r = \frac{5}{12}x$, und mit $h = 12 - x$ folgt:
$25 = \left(\frac{5}{12}x\right)^2 \cdot (12 - x) \Rightarrow x^3 - 12x^2 + 144 = 0$
Startwert: $x_0 = 4$
NEWTON-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
$f(x) = x^3 - 12x^2 + 144$; $f'(x) = 3x^2 - 24x$

Ergebnis: $x = 4{,}334$

Höhe x: 4,334 cm $\Rightarrow$ Höhe h: 7,67 cm

Radius r: 1,81 cm

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis; Lösung	2 BE
b)	erster Graph; zweiter Graph; graphische Lösung; Ergebnis	4 BE
c)	Nachweis; Startwert; Ergebnis für x; Längen von Radius und Höhe	4 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 3: Kegelschnitte

a) $y^2 = \frac{16}{3}x \;\Rightarrow\; p = \frac{8}{3}$; Brennpunkt $F(\frac{4}{3}; 0)$; Leitlinie l: $x = -\frac{4}{3}$

b)
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ y^2 &= \frac{16}{3}\cdot x \end{aligned}$$

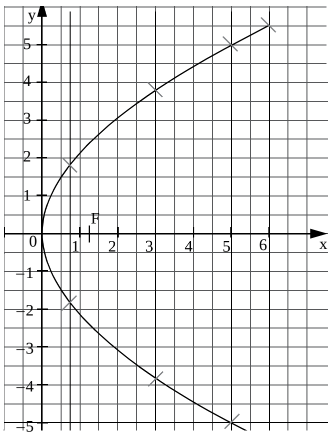
$$x^2 + \frac{16}{3}x - 25 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1;\,2} &= -\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + 25} \\ &= -\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{289}{9}} \\ &= -\frac{8}{3} \pm \frac{17}{3} \end{aligned}$$

$x_1 = 3$ (trifft zu)

$x_2 = -\frac{25}{3}$ (entfällt, nicht I. Quadrant)

$\Rightarrow$ Schnittpunkt $R(3; 4)$



Tangente t_k: $xx_1 + yy_1 = r^2$, also $x \cdot 3 + y \cdot 4 = 25$ bzw. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

Tangente t_p: $yy_1 = p(x + x_1) \;\Rightarrow\; y \cdot 4 = \frac{8}{3}\cdot(x + 3)$ bzw. $y = \frac{2}{3}x + 2$

Schnittwinkel: $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$

$$\tan\varphi = \left|\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{1 + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}\right| = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{17}{6} \;\Rightarrow\; \varphi = 70{,}6°$$

c) Gleichung der Senkrechten durch F:

$m_\perp = -\frac{3}{2}$; $0 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + n \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt Q mit der Tangente t_p: Q(0; 2)

Schnittpunkt L von Senkrechter und Leitlinie:
$y = -\frac{3}{2}x + 2$ und $x = -\frac{4}{3}$

$y = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad L\left(-\frac{4}{3}; 4\right)$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{FL}| \cdot |\overline{QR}|$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{64}{9} + 16} \cdot \sqrt{9 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{208}{9}} \cdot \sqrt{13}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = \frac{26}{3} \text{ (FE)}$$

Weiterer Lösungsweg zur Ermittlung des Flächeninhaltes A:
Da die Ordinaten von R und L übereinstimmen, gilt:
Die Tangente t_p ist Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle$ FRL und wegen $|\overline{FR}| = |\overline{SL}|$ auch Mittelsenkrechte von $\overline{FL}$. Die Strecke $\overline{RL}$ verläuft parallel zur Achse der Parabel.

$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{RL}| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(3 + \frac{4}{3}\right) \cdot 4 = \frac{26}{3}$ (FE)

d) Gleichung der Parabel: $y = ax^2$

Mit R(3; 4) folgt: $4 = a \cdot 9$, also $a = \frac{4}{9} \Rightarrow$ Parabel: $y = \frac{4}{9}x^2$

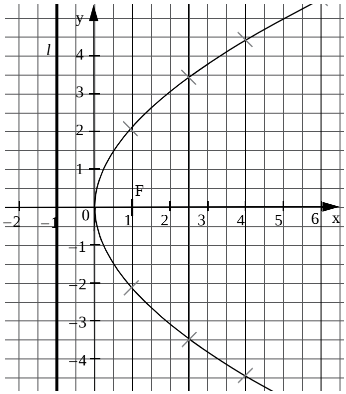
Bewertungsvorschlag:

a)	Koordinaten des Punktes F; Gleichung der Leitlinie; Konstruktion der Punkte und Zeichnung	3 BE
b)	Koordinaten des Punktes R; Gleichung der Tangente t_k; Gleichung der Tangente t_p; Schnittwinkel	4 BE
c)	Ansatz; Flächeninhalt	2 BE
d)	Gleichung der Parabel	1 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 4: Kegelschnitte

a) $y^2 = 2px$

$P(1;\,2) \;\Rightarrow\; p = 2$, also $y^2 = 4x$



b) $yy_0 = 2(x + x_0)$; $T(-4;\,0)$

$0y_0 = 2(-4 + x_0)$, also $x_0 = 4$

$\Rightarrow\; P_1(4;\,4)$ und $P_2(4;\,-4)$

$A = \frac{h \cdot g}{2}$; $g = \left|\overline{P_1P_2}\right| = 8$ (LE);

$h = d(g;\,T) = 8$ (LE)

$A = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$ (FE)

c) Brennpunkt: $F(1;\,0)$

Senkrechte s zur Geraden $y = \frac{1}{2}x + 2$ durch F: $y = -2x + 2$

Schnittpunkt von s und der Geraden $y = \frac{1}{2}x + 2$: $n_1 = n_2 \;\Rightarrow\; P_S(0;\,2)$

Radius: $r = \overline{FP_S} = \sqrt{5}$ (LE); Kreisgleichung für k: $(x - 1)^2 + y^2 = 5$

d) $yy_0 = p \cdot (x + x_0)$ (Gleichung der Tangente an eine Parabel $y^2 = 2px$ im Punkt $P_0(x_0;\,y_0)$)

$y_By_0 = p \cdot x_0$ ($B(0;\,y_B)$ als Schnittpunkt mit der Ordinatenachse)

Aus $y_0^2 = 2px_0$ folgt $x_0 = \frac{y_0^2}{2p}$, also gilt $y_By_0 = p \cdot \frac{y_0^2}{2p}$ bzw. $y_B = \frac{1}{2}y_0$.

$\Rightarrow\; B(0;\,\frac{1}{2}y_0)$ w. z. b. w.

Bewertungsvorschlag:

a)	Scheitelgleichung; Konstruktion von 8 Punkten; Zeichnung im Intervall	3 BE
b)	Ansatz; Koordinaten von P_1 und P_2; Flächeninhalt	3 BE
c)	Ansatz; Kreisgleichung	2 BE
d)	Ansatz; Nachweis	2 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 5: Lineare Gleichungssysteme

a) Für t = 1 gilt:

$$\left.\begin{array}{rcr} 8x - 8y - 4z &=& 16 \\ 2x - 3y - z &=& 5 \\ 6x - 4y - 2z &=& -10 \end{array}\right| \quad \cdot(-4)^{\uparrow} \cdot (-3)_{\downarrow}$$

$$\begin{array}{rcr} 2x - 3y - z &=& 5 \\ 4y &=& -4 \\ 5y + 5z &=& -25 \end{array}$$

$x = -1;\quad y = -1;\quad z = -4$, also $L = \{(-1; -1; -4)\}$

b) Für $x = -\frac{1}{8}$ und $z = -4$ gilt:

$$\begin{array}{lclcl} -1 - 8y &=& 0 & \Rightarrow & y = -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} + (t-4)y &=& 1 & \Rightarrow & t = -6 \\ -\frac{1}{8}(8-2t) - 4y &=& -2 & & \text{wahre Aussage} \end{array}$$

$\Rightarrow\quad t = -6$

c) $D = \det\begin{pmatrix} 8 & -8 & -4 \\ 2 & t-4 & -1 \\ 8-2t & -4 & 2 \end{pmatrix} = -8t^2 + 64t - 96$

$-8t^2 + 64t - 96 = 0 \Rightarrow t_1 = 6;\quad t_2 = 2$

für $t_1 = 6$:

$D_x = \det\begin{pmatrix} 16 & -8 & -4 \\ 5 & 2 & -1 \\ -10 & -4 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad$ unendlich viele Lösungen für t = 6

für $t_2 = 2$:

$D_x = \det\begin{pmatrix} 16 & -8 & -4 \\ 5 & -2 & -1 \\ -10 & -4 & 2 \end{pmatrix} = 32 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad$ keine Lösung für t = 2

$\Rightarrow\quad$ genau eine Lösung für $t \neq 2$ und $t \neq 6$

Bewertungsvorschlag:

a) Gleichungssystem für t = 1; Eliminieren einer Variablen; Lösungsmenge — 3 BE

b) Ansatz; Lösen des Gleichungssystems (einschließlich des Wahrheitswertes der dritten Zeile); Wert für t — 3 BE

c) Determinante der Koeffizientenmatrix; Werte für die die Determinante 0 wird; Bedingung für eindeutige Lösbarkeit; Schlußfolgerung für die anderen Fälle — 4 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 6: Lineare Gleichungssysteme

a) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{lll} A(-1;\,2) & \Rightarrow & a - b + c = 2 \\ B(\tfrac{1}{2};\,-\tfrac{4}{7}) & \Rightarrow & \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}b + c = -\tfrac{7}{4} \\ C(3;\,2) & \Rightarrow & 9a + 3b + c = 2 \end{array}$$

$\Rightarrow\ c = -1;\ b = -2;\ a = 1$

$\Rightarrow$ Gleichung der Funktion: $y = f(x) = x^2 - 2x - 1$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $P_1(1 + \sqrt{2}\,;\,0);\ P_2(1 - \sqrt{2}\,;\,0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $P_3(0;\,-1)$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} -a & + & 2b & + & 0{,}5c & = & -3 \\ 2a & + & 2b & - & c & = & 0 \\ -3a & - & 4b & - & 1{,}5c & = & -11 \end{array}$$

$\Rightarrow\ b = -1;\ \ c = 4;\ a = 3$

Koeffizienten: $a = 3;\ b = -1;\ c = 4$

c)

$$\begin{array}{rcrl} 3x & - & by & = a \\ -2x & + & by & = 1 \quad + \\ \hline x & & & = a + 1 \end{array} \qquad \Rightarrow\ y = \frac{2a+3}{b}\quad (b \neq 0)$$

genau eine Lösung für $a, b \in \mathbb{R}$ $(b \neq 0)$: $L = \{(a + 1;\ \frac{2a+3}{b})\}$

keine Lösung für $b = 0$ und $a \neq -\frac{3}{2}$

unendlich viele Lösungen für $b = 0$ und $a = -\frac{3}{2}$

Bewertungsvorschlag:

a) Ansatz; ein Koeffizient; Funktionsgleichung; Koordinaten aller Schnittpunkte — 4 BE

b) Ansatz; ein Koeffizient; alle Koeffizienten — 3 BE

c) Bedingung für genau eine Lösung; Bedingung für keine Lösung; Bedingung für unendlich viele Lösungen — 3 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 7: Stochastik

a) Ereignis A: Bauteil ist nicht maßgerecht.
Ereignis B: Bauteil ist nicht funktionsfähig.

Ereignis C: Bauteil weist keinen der beiden Fehler auf.
$P(C) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))$
$\quad = 0{,}95 \cdot 0{,}925 = 0{,}8788$

b) X... Anzahl der Bauteile, die nicht maßgerecht sind.
X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,05.
$P(X = 0) = 0{,}95^{10} = 0{,}5987$
$P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^{9} = 0{,}3151$
$P(X > 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 0{,}0861$

c) Ereignis D: Die 4 fehlerhaften Teile werden zuerst geprüft.
$P(D) = \frac{4}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{2}{48} \cdot \frac{1}{47} = 4{,}3 \cdot 10^{6}$

d) Es kann bei 0 bis 4 Bauteilen eine zweite Überprüfung notwendig werden.

Anzahl der Zweitprüfungen	0	1	2	3	4
Wert der Zufallsgröße Z	40	70	100	130	160

Y... Anzahl der Bauteile, die einer zweiten Prüfung unterzogen werden
Y... ist binomialverteilt mit n = 4 und p = 0,5
Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y:

Anzahl der Zweitprüfungen y_i	0	1	2	3	4
$P(Y = y_i)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z:

Anzahl der Zweitprüfungen	0	1	2	3	4
Wert z_i der Zufallsgröße Z	40	70	100	130	160
$P(Z = z_i)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

Erwartungswert: $E(Z) = 40 \cdot 0{,}0625 + 70 \cdot 0{,}25 + 100 \cdot 0{,}375 + 130 \cdot 0{,}25$
$\quad + 160 \cdot 0{,}0625$
$\quad = 100$

Bewertungsvorschlag:

a)	Ansatz für Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit	2 BE
b)	Ansatz für Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit	2 BE
c)	Ansatz für Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit	2 BE
c)	alle Werte der Zufallsgröße Z; Ansatz zur Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten; Wahrscheinlichkeiten; Erwartungswert	4 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 8: Stochastik

a) $\binom{4}{2} \cdot \binom{10}{8} = 6 \cdot 45 = 270$: Es gibt 270 Möglichkeiten.

b) P(„Ausschuß“) $= 0{,}4 \cdot 0{,}03 + 0{,}6 \cdot 0{,}04 = 0{,}0360$

c) Z ... Anzahl der Wegfahrsperren, die Ausschuß sind
Z ist binomialverteilt mit n = 50 und p = 0,04.
$P(A) = P(Z = 1) = \binom{50}{1} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96^{49} = 0{,}2706$

$P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$= 1 - [0{,}96^{50} + 0{,}2706 + \binom{50}{2} \cdot 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^{48}] = 0{,}3233$

$E(Z) = n \cdot p = 2$: Im Durchschnitt sind 2 Wegfahrsperren Ausschuß.

Kosten: $48 \cdot 250$ DM = 12 000 DM

Die Werkstatt hat im Durchschnitt 12 000 DM zu zahlen.

d) Y... Anzahl der befragten Kunden

y_i	1	2	3	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8}$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8}$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^4$
	=	=	=	=
	0,3750	0,2344	0,1465	0,2441

$E(Y) = 1 \cdot 0{,}3750 + 2 \cdot 0{,}2344 + 3 \cdot 0{,}1465 + 4 \cdot 0{,}2441 = 2{,}26$
Durchschnittlich führt die Werkstatt an einem Tag 2,26 Befragungen durch.

Bewertungsvorschlag:

a)	Ergebnis	1 BE
b)	Ansatz für Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit	2 BE
c)	Wahrscheinlichkeit P(A); Ansatz für Wahrscheinlichkeit P(B); Wahrscheinlichkeit P(B); Ansatz für Kosten; Durchschnittskosten für 50 Wegfahrsperren	5 BE
d)	Wahrscheinlichkeitsverteilung; Erwartungswert	2 BE
		10 BE

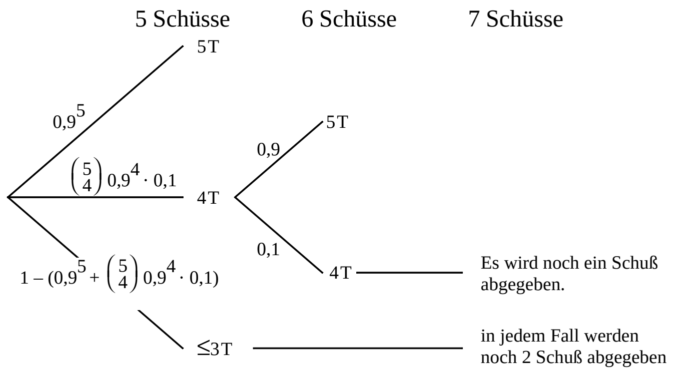
Erwartungsbild zu Aufgabe C 9: Stochastik

a) $\binom{6}{2} = 15$. Das heißt: Es gibt 15 verschiedene Mannschaftsaufstellungen, wenn die Startreihenfolge nicht berücksichtigt wird.
Bei Beachtung der vorgegebenen Bedingungen gibt es zu jeder der 15 Möglichkeiten 4 verschiedene Anordnungen $(2! \cdot 2!)$.
$\Rightarrow$ Gesamtzahl der möglichen Mannschaftsaufstellungen: $15 \cdot 4 = 60$

b) X ... Anzahl der Treffer bei 20 Schuß
X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}95$.
$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}95 = 19$
Der Sportler kann im Durchschnitt 19 Treffer erwarten.
$P(A) = P(X = 20) = 0{,}95^{20} = 0{,}3585$
$P(B) = P(X \geq 18) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20)$
$= \binom{20}{18} 0{,}95^{18} \cdot 0{,}05^2 + \binom{20}{19} 0{,}95^{19} \cdot 0{,}05 + 0{,}3585 = 0{,}9245$

c) K ist das Ereignis: Die Scheibe kippt um.
$P(K) = 0{,}9 \cdot 0{,}98 + 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}883$

d)



$\Rightarrow$ Für 5 Schüsse benötigt der Sportler im Durchschnitt 15 s, für 6 Schüsse 25 s und für 7 Schüsse 35 s.

z_i in s	15	25	35
$P(Z = z_i)$	$0{,}9^5$	$5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9$	$5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1$
			$+(1-(0{,}9^5 + 5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1))$
	$= 0{,}5905$	$= 0{,}2952$	$= 0{,}1143$

$$E(Z) = 15\text{ s} \cdot 0{,}5905 + 25\text{ s} \cdot 0{,}2952 + 35\text{ s} \cdot 0{,}1143 = 20{,}2\text{ s}$$

Bewertungsvorschlag:

a) Anzahl ohne Beachtung der Reihenfolge; Anzahl mit Bedingungen — 2 BE

b) Erwartungswert; Ergebnis für P(A); Ergebnis für P(B) — 3 BE

c) Ansatz; Ergebnis — 2 BE

d) Werte der Zufallsgröße; Wahrscheinlichkeitsverteilung; Erwartungswert — 3 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 10: Stochastik

a) Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer 2 beträgt $\frac{1}{3}$; für das Ziehen einer 3 beträgt sie $\frac{1}{6}$, und für das Ziehen einer 6 beträgt sie $\frac{1}{2}$.

Daraus erhält man z. B. für das Eintreten der Augensumme 8:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$

x_i	4	5	6	8	9	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

b) $A = \{4; 6; 12\}$

$P(A) = P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 12) = \frac{7}{18}$

$B = \{4; 5; 6\}$

$P(B) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{1}{4}$

$A \cap B = \{4; 6\} \Rightarrow \overline{A \cap B} = \{5; 8; 9; 12\}$

c) C sei das Ereignis: Bei 3 Ziehungen tritt mindestens einmal die Zahl 6 auf.

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}5^3 = 0{,}8750$

d) $1 - 0{,}5^n > 0{,}99$, also $0{,}01 > 0{,}5^n$
$\lg 0{,}01 > n \cdot \lg 0{,}5$
$\frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}5} < n$
$n > 6{,}64$
Die Ziehung muß mindestens 7 mal durchgeführt werden.

e) Y... Auftreten der Zahl 6 bei sechs Ziehungen
Y... ist binomialverteilt mit $n = 6$ und $p = 0{,}5$
$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)$
$= 1 - 0{,}5^6 - 6 \cdot 0{,}5^6 = 1 - 0{,}1094$
$= 0{,}8906$
$\Rightarrow P(Y \geq 2) > P(C)$

f) P(„zweimal 6“) $= P(2; 6; 6) + P(3; 6; 6) + P(6; 2; 6) + P(6; 3; 6) + P(6; 6; 2) + P(6; 6; 3)$
$= 3 \cdot (\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}) + 3 \cdot (\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4})$
$= 0{,}4500$

Bewertungsvorschlag:

a)	Werte für X; Wahrscheinlichkeiten	2 BE
b)	Wahrscheinlichkeit für A; Wahrscheinlichkeit für B; Ereignis für $\overline{A \cap B}$	3 BE
c)	Wahrscheinlichkeit	1 BE
d)	notwendige Ziehungsanzahl	1 BE
e)	Ansatz; Ergebnis	2 BE
f)	Wahrscheinlichkeit	1 BE
		10 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1996 / 97

Gymnasium

Sachsen

Hinweis:
Für die Abiturprüfungen Mathematik/Grundkurs galt im Schuljahr 1996/97 folgende Regelung:
– Jeder Schüler bearbeitet je eine Pflichtaufgabe aus den Teilen A (Analysis), B (Analytische Geometrie und lineare Algebra) und C (Stochastik). Außerdem bearbeitet er eine von zwei Wahlaufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad. Dabei entscheidet er sich im Grundkurs entweder für die Wahlaufgabe zur Analysis oder die Wahlaufgabe zur Geometrie/linearen Algebra.
– Die Wahlaufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad sind in dieser Aufgabensammlung für den Grundkurs jeweils die 3. und 4. Aufgabe der Teile A (Analysis) und B (Geometrie/lineare Algebra).

Nachfolgend sind die Aufgaben für den Ersttermin und den Nachtermin zusammengefaßt.

Aufgabe A1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 - x - 2) \quad (x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an, und führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen mit der y-Achse, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema).
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-1{,}5 \le x \le 4$.

b) Die Funktion F mit $y = F(x) = e^{-x} \cdot (-x^2 - x + 1) \quad (x \in \mathbb{R})$ ist eine Stammfunktion der Funktion f.
Die x-Achse und der Graph der Funktion f begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

c) Die Gerade t ist eine Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt B(0; f(0)). Die Gerade s ist die zur Geraden t senkrechte Gerade im Punkt B.
Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung der Geraden s und t.
Die Gerade s schneidet die x-Achse im Punkt S, die Gerade t schneidet die x-Achse im Punkt T.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte S und T, und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BST.

d) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g mit $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$, die die gleichen Nullstellen wie die Funktion f besitzt und deren Graph durch den Punkt Q(0; 4) verläuft.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion g und der x-Achse vollständig begrenzt wird.

Aufgabe A2: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{x^2 - x}{2x - 4}$ $(x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an, und führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Polstellen, Verhalten im Unendlichen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema).
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-4 \leq x \leq 5$.

b) Die Gerade t ist Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt P(4; f(4)).
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t.
Es existieren auch Tangenten an den Graphen der Funktion f, die senkrecht zur Tangente t verlaufen.
Ermitteln Sie die Anzahl dieser zur Geraden t senkrechten Tangenten.
Berechnen Sie die Abszissen der Berührungspunkte dieser Tangenten mit dem Graphen der Funktion f.

Gegeben sind die Funktionen g_a und h durch $y = g_a(x) = -x^2 + 2a^2$ $(a \in \mathbb{R}, a > 0; x \in \mathbb{R})$ und $y = h(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$.

c) Für jedes a begrenzen der Graph der Funktion g_a und der Graph der Funktion h eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche für $a = \sqrt[3]{3}$.

d) Bestimmen Sie den Wert a so, daß die von den Graphen der Funktionen g_a und h eingeschlossene Fläche den Inhalt 72 hat.

Aufgabe A3: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Gegeben sind Funktionen f_k durch $y = f_k(x) = 2kx^2 - k^2x$ $(k \in \mathbb{R}, k \neq 0; x \in \mathbb{R})$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen f_k sowie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Graphen dieser Funktionen.
Untersuchen Sie die Art der Extrema in Abhängigkeit von k.
Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_{-3} und f_2.

b) Alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_k liegen auf dem Graphen der Funktion h.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion h.

c) Für jedes k begrenzen der Graph der Funktion f_k und die x-Achse eine Fläche vollständig.
Für welche Werte k ist der Inhalt dieser Fläche $\frac{27}{8}$?

Aufgabe A4: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Gegeben sind die Funktionen f_k durch $y = f_k(x) = e^{-x} \cdot (x^2 - x + k) \quad (k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$.

a) Die Gerade s ist Tangente an den Graphen der Funktion $f_{-\frac{4}{3}}$ im Punkt $S(0; f_{-\frac{4}{3}}(0))$.
Die Gerade t ist Tangente an den Graphen der Funktion f_2 im Punkt $T(0; f_2(0))$.
Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden s und t.

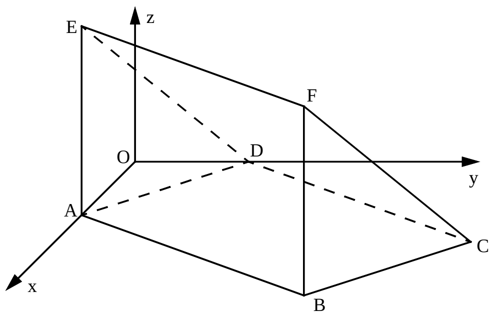
b) Untersuchen Sie, für welche Werte k die Funktionen f_k Nullstellen haben.

c) Durch den Punkt $P_k(0; f_k(0))$ des Graphen der Funktion f_k verläuft die Tangente t_k.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t_k.
Für jeden Wert $k < -1$ bilden der Koordinatenursprung O, der Punkt P_k sowie der Schnittpunkt Q_k der Tangente t_k mit der x-Achse ein Dreieck OP_kQ_k.
Ermitteln Sie den Wert k, für den das zugehörige Dreieck OP_kQ_k den kleinstmöglichen Flächeninhalt aller dieser Dreiecke hat.

Aufgabe B1: Analytische Geometrie und lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Prisma ABCDEF durch die Koordinaten der Eckpunkte
A(4; 0; 0), B(10; 8; 0),
C(6; 11; 0), D(0; 3; 0),
E(4; 0; 5) gegeben (siehe Skizze).

(Skizze nicht maßstäblich)



a) Zeigen Sie, daß das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes F.

c) Zeigen Sie, daß das Prisma ABCDEF ein gerades Prisma ist, und berechnen Sie dessen Volumen.

d) Die Diagonalenschnittpunkte der viereckigen Seitenflächen des Prismas sind die Punkte P, Q und R.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Berechnen Sie das Verhältnis des Flächeninhaltes der Dreiecks PQR zum Flächeninhalt des Dreiecks ADE.

e) In der x-y-Koordinatenebene existiert ein Kreis k, auf dem die Punkte A, B, C und D liegen.
Ermitteln Sie eine Gleichung des Kreises k.
An den Kreis k existieren Tangenten, die parallel zur Sehne $\overline{AB}$ verlaufen.
Berechnen Sie die Koordinaten der Berührungspunkte dieser Tangenten mit dem Kreis k.

Aufgabe B2: Analytische Geometrie und lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(3; 2; 1), B(4; 6; 7), C(1; –6; –11), D(1; 3; 4), F(6; 5; 4) und S($\frac{7}{2}$; 4; 4) gegeben.

a) Untersuchen Sie rechnerisch, ob die drei Punkte A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind.

b) Weisen Sie nach, daß das Dreieck ABD nicht rechtwinklig ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABD.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes T so, daß das Viereck ABDT ein Trapez mit $\overrightarrow{TD} = 2\overrightarrow{AB}$ ist.

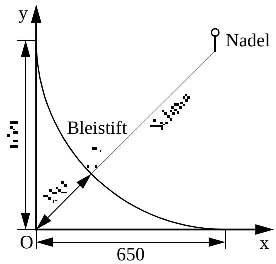
c) Durch die Punkte A und B wird eine Gerade g_1 und durch die Punkte D und F eine Gerade g_2 bestimmt.
Weisen Sie rechnerisch nach, daß der Punkt S der einzige gemeinsame Punkt dieser beiden Geraden ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g_2 mit der x-z-Koordinatenebene.

d) Das Dreieck ABD liegt in der Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form.
Es existieren Punkte $P_a(-\frac{1}{2}a^2; \frac{a}{3}; \frac{13}{9}a)$ $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$, die in der Ebene E liegen.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Aufgabe B3: Analytische Geometrie und lineare Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

a) In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(5; 3) und B(2; 4) sowie ein Kreis k durch die Gleichung $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 8 = 0$ gegeben. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius des Kreises k. Zeigen Sie rechnerisch, daß die Punkte A und B auf dem Kreis k liegen, und berechnen Sie den Abstand der Sehne $\overline{AB}$ vom Kreismittelpunkt.

b) Eine Familie richtet sich das Wohnzimmer neu ein und kauft sich eine Couchgarnitur, die in einer Ecke des Zimmers stehen soll. Das Eckteil der Couchgarnitur hat eine kreisförmig abgerundete Lehne, so daß in der Wohnzimmerecke hinter der Couch ein freier Raum bleibt.
Der Familienvater möchte einen Ablagetisch bauen, der den freien Raum in der Ecke ausnutzt. Zum Aussägen der Tischplatte möchte er eine Schablone herstellen.
Beim Abmessen erhielt er folgende Werte (vgl. Skizze):
Länge der senkrecht zueinander stehenden Schenkel: 650 mm,
Abstand Zimmerecke – Couch: 350 mm.
Um die Konstruktion auf einem hinreichend großen Zeichenkarton durchführen zu können, führt der Familienvater ein geeignetes Koordinatensystem ein und baut aus einer Nadel, einem Bleistift sowie einer Schnur einen geeigneten „Zirkel“.



(Skizze nicht maßstäblich)

Berechnen Sie den für die Konstruktion benötigten Radius sowie die Koordinaten des „Einstichpunktes“ für den vom Familienvater gebauten „Zirkel“. Runden Sie die Ergebnisse auf Millimeter.

Aufgabe B4: Analytische Geometrie und lineare Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(5; 0; 0), B(0; 6; 0), C(0; 0; 0), D(3; 2; 1), E(4; 6; 7), F(1; 3; 4) und G(2; 2; 3) gegeben.

a) Weiterhin sind die Punkte $P_a(8; a; 0)$ $(a \in \mathbb{R})$ gegeben.
Ermitteln Sie die Werte a, für die die zugehörigen Punkte P_a vom Punkt A den Abstand 5 haben.

b) In der x-y-Koordinatenebene wird durch die Punkte A, B und C ein Dreieck ABC bestimmt.
Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung des Umkreises k des Dreiecks ABC.
Es gibt Tangenten an den Kreis k, die parallel zur in der x-y-Koordinatenebene liegenden Geraden g mit der Gleichung $y = -\frac{5}{6}x + 3$ verlaufen.
Ermitteln Sie rechnerisch für jede dieser Tangenten je eine Gleichung.

c) Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ und $\overrightarrow{DG}$ linear unabhängig sind.

d) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten derjenigen Punkte Q, für die das Viereck DEFQ jeweils ein Trapez ist, bei dem das Verhältnis der Längen der parallelen Seiten 1 : 2 beträgt.

Aufgabe C1: Stochastik

Eine Urne enthält fünf blaue und eine gelbe Kugel. Für das Spiel „Ziehen und Ersetzen“ wird folgende Regel vereinbart:
Es wird jeweils genau eine Kugel gezogen. Ist die gezogene Kugel gelb, so wird sie in die Urne zurückgelegt, ist sie dagegen blau, wird sie beiseite gelegt und in der Urne durch eine gelbe ersetzt.

a) Das Spiel „Ziehen und Ersetzen“ wird dreimal durchgeführt und jeweils die Farbe der gezogenen Kugel festgestellt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
Ereignis A: Genau eine der gezogenen Kugeln ist gelb.
Ereignis B: Höchstens zwei der gezogenen Kugeln sind blau.
Ereignis C: Nur die dritte Kugel ist blau.
Ereignis D: Die zweite Kugel ist gelb.

b) Auf einem Rummelplatz wird an einem Stand das Spiel „Ziehen und Ersetzen“ als Glücksspiel angeboten. Nach einem Einsatz von x DM darf der Spieler dreimal ziehen. Er erhält bei
drei gezogenen gelben Kugeln 50 DM, bei
zwei gezogenen gelben Kugeln 5 DM und bei
einer gezogenen gelben Kugel 2 DM ausgezahlt.
Wie hoch muß der Einsatz mindestens sein, damit dieses Spiel dem Standbesitzer langfristig Gewinn bringt?

c) Wie viele Ziehungen sind bei dem beschriebenen Spiel mindestens durchzuführen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man mindestens eine blaue Kugel gezogen hat, größer als 0,98 ist?

Aufgabe C2: Stochastik

Eine Fußballmannschaft besitzt genau 20 Feldspieler und genau zwei Tormänner.

a) Eine Mannschaftsaufstellung besteht aus genau 10 Feldspielern und genau einem Tormann.
Wie viele Mannschaftsaufstellungen kann der Trainer bilden, wenn die Feldposition der Spieler nicht berücksichtigt wird?
Der Feldspieler Hansi soll unbedingt in der Mannschaft sein.
Wie viele Mannschaftsaufstellungen kann der Trainer unter dieser Bedingung bilden?

Tormann Thomas hält erfahrungsgemäß Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,15.

b) Ein Spieler schießt 20 Elfmeter auf das Tor von Thomas, wobei angenommen wird, daß er nicht am Tor vorbeischießt und auch nicht Latte bzw. Pfosten trifft.
Die Versuche sollen als voneinander unabhängig angenommen werden.
Wie viele gehaltene Elfmeter sind zu erwarten?
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Thomas genau zwei dieser Elfmeter hält.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Thomas mehr als zwei Elfmeter hält.

c) Ein Spieler, der erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 das Tor nicht trifft, d. h. am Tor vorbeischießt bzw. Latte oder Pfosten trifft, tritt gegen Thomas im Elfmeterschießen an.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Spieler einen Elfmeter erfolgreich verwandelt.

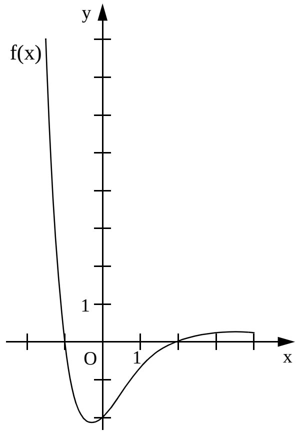
d) Tormann René, der erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 Elfmeter hält, trainiert mit Tormann Thomas und einem Feldspieler.
Der Feldspieler, der nicht am Tor vorbeischießt und auch nicht Latte bzw. Pfosten trifft, schießt zunächst 6 Elfmeter gegen Thomas. Die Versuche sind voneinander unabhängig.
Wie viele Elfmeter müßte der Feldspieler gegen René schießen, damit bei beiden Tormännern die gleiche Anzahl gehaltener Elfmeter zu erwarten ist?

Erwartungsbild zu Aufgabe A1:

a) Definitionsbereich: $\{x \in \mathbb{R}\}$

Nullstellen: $x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad x_{N1} = -1; \quad x_{N2} = 2$



Schnittpunkt mit der y-Achse:

$e^{-0}(0 - 0 - 2) = -2 \quad \Rightarrow \quad P_y(0; -2)$

Extrempunkte: $f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 3x + 1)$;

$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 5x + 2)$

$f'(x_E) = 0, \quad$ also $\quad (-x^2 + 3x + 1) = 0$

$\Rightarrow x_{E1} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \approx -0{,}3; \; x_{E2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}3$

Nachweis:

$f''(x_{E1}) = 4{,}84 > 0 \quad \Rightarrow$ lokales Minimum

$f''(x_{E2}) = -0{,}13 < 0 \quad \Rightarrow$ lokales Maximum

Koordinaten der lokalen Extrempunkte:

$P_{min}\,(\approx -0{,}3; \approx -2{,}2); \quad P_{max}\,(\approx 3{,}3; \approx 0{,}2)$

b) $$A = \left| \int_{-1}^{2} e^{-x}(x^2 - x - 2)\,dx \right| = \left| \left[e^{-x}(-x^2 - x + 1)\right]_{-1}^{2} \right|$$
$$= \left| e^{-2}(-4 - 2 + 1) - e^{1}(-1 + 1 + 1) \right|$$
$$= \left| -5e^{-2} - e \right| \approx 3{,}39$$

c) Gleichung der Geraden: $y = mx + n$

$B(0; -2) \quad \Rightarrow \quad n = -2$; Anstieg der Tangente t: $f'(0) = 1$;

Tangente t: $y = x - 2$; Senkrechte s: $y = -x - 2$;

$T(2; 0)$; $S(-2; 0)$; Flächeninhalt $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ (FE)

d) $y = ax^2 + bx + c$

Der Graph der Funktion g enthält die Punkte N(–1; 0), T(2; 0) und Q(0; 4).

Das daraus resultierende Gleichungssystem:

(I) $0 = a - b + c$

(II) $0 = 4a + 2b + c$

(II) $4 = c$ hat die Lösung $a = -2$; $b = 2$; $c = 4$.

$\Rightarrow \quad y = g(x) = -2x^2 + 2x + 4$

Lösungsvariante: $g(x) = d \cdot (x^2 - x - 2)$ (da gleiche Nullstellen wie f)

$4 = d \cdot (-2)$

$d = -2 \qquad \Rightarrow \quad y = g(x) = -2x^2 + 2x + 4$

Flächeninhalt: $A = \int\limits_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx = [-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x]_{-1}^{2} = 9$ (FE)

Bewertungsvorschlag:

a) Definitionsbereich; Nullstellen; Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen mit der y-Achse; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Extremstellen; Nachweis der Extrema; Koordinatender lokalen Extrempunkte; Graph — 9 BE

b) Ansatz; Flächeninhalt — 2 BE

c) Ansatz; Gleichung der Geraden t; Gleichung der Geraden s; Koordinaten von T und S; Flächeninhalt — 5 BE

d) Ansatz; Gleichung der Funktion g; Ansatz für Flächeninhalt; Flächeninhalt — 4 BE

30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A2:

a) Definitionsbereich: $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$

Nullstellen: $x^2 - x = 0$

$\Rightarrow \quad x_{N1} = 0; \quad x_{N2} = 1$

Polstelle: $x_P = 2$

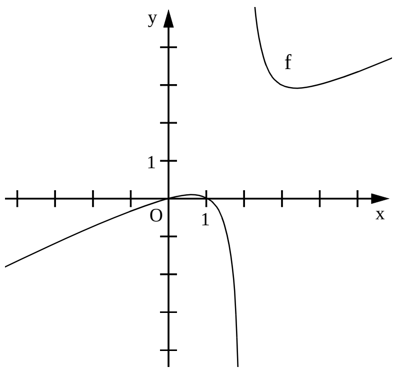
Verhalten im Unendlichen:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

Extrempunkte: $f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 4}{(2x-4)^2}$;

$f''(x) = \frac{16}{(2x-4)^3}$



$f'(x_E) = 0$, also $2x^2 - 8x + 4 = 0$
$\Rightarrow x_{E1} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}6$; $x_{E2} = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}4$
Nachweis: $f''(x_{E1}) = -0{,}73 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum
$f''(x_{E2}) = 0{,}73 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum
Koordinaten der lokalen Extrempunkte:
$P_{min}\,(2 + \sqrt{2}\,;\ \frac{3}{2} + \sqrt{2})$; $P_{max}\,(2 - \sqrt{2}\,;\ \frac{3}{2} - \sqrt{2})$

b) Tangente: $P(4; 3)$; $m = f'(4) = \frac{1}{4}$; $y = mx + n$ also $3 = \frac{1}{4} \cdot 4 + n \Rightarrow n = 2$;

Gleichung der Tangente t: $y = \frac{1}{4}x + 2$

Anstieg der Senkrechten zur Tangente t: $\overline{m} = -4$

Berührungsstellen: $f'(x) = -4 \Rightarrow -4(2x - 4)^2 = 2x^2 - 8x + 4$

$\Rightarrow x^2 - 4x + \frac{34}{9} = 0$ und damit $x_{B1} = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{2}$; $x_{B2} = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{2}$

Es existieren genau zwei zur Tangente t senkrechte Tangenten.

c) Schnittstellen: $x^2 = -x^2 + 2a^2 \Rightarrow x_{S1} = -a$; $x_{S2} = a$

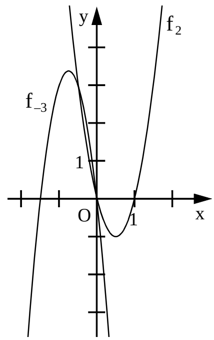
$$A(a) = \int_{-a}^{a} (-2x^2 + 2a^2)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2a^2x\right]_{-a}^{a} = \frac{8}{3}a^3 \Rightarrow A(\sqrt[3]{3}) = 8\ \text{(FE)}$$

d) $A(a) = 72 = \frac{8}{3}a^3 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Nullstellen; Polstellen; Verhalten im Unendlichen; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Extremstellen; Nachweis der Extrema; Koordinaten der Lokalen Extrempunkte; Graph	10 BE
b)	Anstieg der Tangente t; Gleichung der Tangente t; Anstieg der Senkrechten zur Tangente t; Anzahl der Senkrechten; Berührungsstellen	5 BE
c)	Integrationsgrenzen; Flächeninhalt in Abhängigkeit von a; Flächeninhalt für $a = \sqrt[3]{3}$	3 BE
d)	Ansatz; Wert für a	2 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A3:



a) Nullstellen: $0 = 2kx^2 - k^2x \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - \frac{k}{2}x$

$x_{N1} = 0; \quad x_{N2} = \frac{k}{2}$

Extremstellen: $f_k'(x) = 4kx - k^2; \quad f_k''(x) = 4k$

$f_k'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = \frac{k}{4}$

$f_k''(x_E) > 0$ für $k > 0 \quad \Rightarrow$ lokales Minimum

$f_k''(x_E) < 0$ für $k < 0 \quad \Rightarrow$ lokales Maximum

Koordinaten der lokalen Extrempunkte: $P_E(\frac{k}{4}; -\frac{k^3}{8})$

b) Aus $y = -\frac{k^3}{8}$ und $k = 4x$ folgt die Gleichung der Funktion h: $y = h(x) = -\frac{(4x)^3}{8} = -8x^3$

c) 1. Fall: $k < 0$

$$A(k) = \int_{\frac{k}{2}}^{0} (2kx^2 - k^2x)\,dx = \left[\frac{2}{3}kx^3 - \frac{k^2}{2}x^2\right]_{\frac{k}{2}}^{0} = -\frac{k^4}{12} + \frac{k^4}{8} = \frac{k^4}{24}$$

$A(k) = \frac{27}{8} \quad \Rightarrow \quad k^4 = 81$ und damit $k = -3$ (da $k < 0$)

2. Fall: $k > 0$ (analoge Betrachtung)

$A(k) = -\frac{27}{8} \quad \Rightarrow \quad k = 3$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nullstellen; 1. Ableitung; Koordinaten der lokalen Extrempunkte; 2. Ableitung; Art der Extrema in Abhängigkeit von k; Graphen	6 BE
b)	Gleichung der Funktion h	1 BE
c)	Ansatz für Flächeninhalt; Stammfunktion; Werte für k	3 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4:

a) $f_k'(x) = e^{-x} \cdot (-x^2 + 3x - k - 1) \quad \Rightarrow \quad f_2'(x) = e^{-x} \cdot (-x^2 + 3x - 3)$

$f_{-\frac{4}{3}}'(x) = e^{-x} \cdot (-x^2 + 3x + \frac{1}{3})$

$T(0; 2)$; $S(0; -\frac{4}{3})$

Gleichungen der Tangenten: $t: y = -3x + 2$; $s: y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

Schnittwinkel α: $\alpha = 90°$ (da $m_2 = -1 / m_{-\frac{4}{3}}$)

b) $f_k(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x + k = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k}$

Nullstellen existieren für $k \le \frac{1}{4}$.

c) Gleichung der Tangente t_k: $y = -(k + 1)x + k$

$P_k(0; k)$; $Q_k(\frac{k}{k+1}; 0)$

$A(k) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{k+1}$ ($k \in \mathbb{R}$, $k < -1$) (lt. Voraussetzung)

$A'(k) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2}$; $A'(k) = 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k = 0 \Rightarrow$ $k_1 = 0$ (entfällt)

$k_2 = -2$ (trifft zu)

$A''(k) = -\frac{1}{(k+1)^3}$; $A''(-2) = 1 > 0 \Rightarrow$ lokales (globales) Minimum

Der Flächeninhalt wird minimal für $k = -2$.

Bewertungsvorschlag:

a)	1. Ableitung; Anstiege der Tangenten; Schnittwinkel	3 BE
b)	Ansatz; Ergebnis	2 BE
c)	Gleichung der Tangente t_k; Zielfunktion; 1. Ableitung; Wertefür k; Nachweis	5 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B1:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (I)

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -24 + 24 + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ (II)

Aus (I) und (II) folgt, daß das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

b) $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ F(10; 8; 5)

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow$ Die Körperkante $\overline{AB}$ steht senkrecht auf der Grundfläche ADE des Prismas. Das Prisma ist also gerade.

Flächeninhalt A_{ADE} der Grundfläche ADE:

$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{25} = 5$ (LE); $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16 + 9} = 5$ (LE)

$\Rightarrow \quad A_{ADE} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$ (FE)

Volumen V des Prismas ABCDEF:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 64} = 10$ (LE); $V = A_G \cdot h = \frac{25}{2} \cdot 10 = 125$ (VE)

d) Die Diagonalen halbieren einander, da die Seitenflächen Rechtecke sind.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \quad \Rightarrow \quad$ P(7; 4; 2,5)

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad \Rightarrow \quad$ Q(5; 5,5; 0)

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} \quad \Rightarrow \quad$ R(5; 5,5; 2,5)

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR} \quad \Rightarrow$ Das Dreieck PQR ist rechtwinklig.

$|\overrightarrow{QR}| = 2{,}5$ (LE); $|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 + 2{,}25} = 2{,}5$ (LE)

Flächeninhalt: $A_{PQR} = \frac{2{,}5 \cdot 2{,}5}{2} = 3{,}125$ (FE); $A_{ADE} = \frac{25}{2} = 12{,}5$ (FE)

Verhältnis: $A_{PQR} : A_{ADE} = 1 : 4$

e) Der Mittelpunkt ist der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks ABCD, also der Punkt Q(5; 5,5; 0).

Radius r: $|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{1^2 + 5{,}5^2} = \frac{5}{2}\sqrt{5} \approx 5{,}59$ (LE)

Gleichung des Kreises k: $(x - 5)^2 + (y - 5{,}5)^2 = 31{,}25$

Die Senkrechte auf der Sehne $\overline{AB}$ durch den Kreismittelpunkt Q ist die Mittelsenkrechte auf der Sehne $\overline{AB}$.

Gleichung der Mittelsenkrechten $m_{\overline{AB}}$ auf $\overline{AB}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$

$m_{\overline{AB}} \cap k$: $(5 - 8t - 5)^2 + (5{,}5 + 6t - 5{,}5)^2 = 31{,}25$ also $100t^2 = 31{,}25$

$\Rightarrow \quad t_1 = 0{,}559; \quad t_2 = -0{,}559$

Einsetzen in die Gleichung der Mittelsenkrechten $m_{\overline{AB}}$ liefert die Koordinaten der Berührungspunkte B_1 und B_2 der Tangenten:

$B_1\left(\frac{10 - 4\sqrt{5}}{2};\ \frac{11 + 3\sqrt{5}}{2}\right)$; $B_2\left(\frac{10 + 4\sqrt{5}}{2};\ \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}\right)$

$(B_1(\approx 0{,}53; \approx 8{,}85)$; $B_2(\approx 9{,}47; \approx 2{,}15))$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis, daß das Viereck ein Parallelogramm ist; Nachweis, daß das Viereck ein Rechteck ist; Schlußfolgerung	3 BE
b)	Koordinaten des Punktes F	1 BE
c)	Nachweis für gerades Prisma; Ansatz für Inhalt der Grundfläche; Inhalt der Grundfläche; Höhe des Prismas; Volumen des Prismas	5 BE
d)	Koordinaten des Punktes P; Koordinaten der Punkte Q und R; Ansatz für Flächeninhalt des Dreiecks PQR; Flächeninhalt des Dreiecks PQR; Verhältnis	5 BE
e)	Koordinaten des Kreismittelpunktes; Gleichung des Kreises; Gleichung der Senkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ durch den Kreismittelpunkt; quadratische Gleichung; Lösungen der quadratischen Gleichung; Koordinaten der Berührungspunkte	6 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B2:

a) Gerade g(AB): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$; $t = -2 \quad \Rightarrow \quad C \in g(AB)$

Die Punkte A, B und C bilden kein Dreieck, sondern liegen auf einer Geraden.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{53}$; $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{14}$; $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{27}$

Weil $\overline{AB}$ die längste Seite des Dreiecks ABD ist, müßte der rechte Winkel der Winkel zwischen $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BD}$ sein.

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = -6 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Das Dreieck ABD ist nicht rechtwinklig.

Lösungsvariante: Wegen $53 \neq 14 + 27$ ist das Dreieck nicht rechtwinklig.
(Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS)

$$\cos \sphericalangle BAD = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{20}{\sqrt{53}\sqrt{14}} \approx 0{,}7342 \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BAD = 42{,}8°$$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sqrt{53}\sqrt{14} \cdot \sin\sphericalangle BAD$
$= 9{,}25$ (FE)

$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TD} = \overrightarrow{OD}$ mit $\overrightarrow{TD} = 2\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{OT} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(-1; -5; -8)$$

c) g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$; g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$

Schnittpunkt $S(\frac{7}{2}; 4; 4)$; $t = \frac{1}{2} \Rightarrow S \in g_1$; $s = \frac{1}{2} \Rightarrow S \in g_2$

Die Richtungsvektoren beider Geraden sind nicht linear abhängig, also schneiden die Geraden g_1 und g_2 einander nur im Punkt S.

x-z-Koordinatenebene: $y = 0$

Schnittpunkt mit g_2: $0 = y = 3 + 2s \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{3}{2}$

$x = 1 + 5s \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{13}{2}$; $z = 4$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt $Q(-\frac{13}{2}; 0; 4)$

d) Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(t, s \in \mathbb{R}) \Rightarrow$ $\begin{aligned} x &= 3 + t - 2s \\ y &= 2 + 4t + s \\ z &= 1 + 6t + 3s \end{aligned}$

allgemeine Form: $-2x + 5y - 3z = 1$

Einsetzen der Koordinaten von $P_a(-\frac{1}{2}a^2; \frac{a}{3}; \frac{13}{9}a)$ in die Ebenengleichung führt zu der Gleichung: $a^2 - \frac{8}{3}a - 1 = 0. \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{3}$; $a_2 = 3$

$P_{-\frac{1}{3}}(-\frac{1}{18}; -\frac{1}{9}; -\frac{13}{27})$; $P_3(-\frac{9}{2}; 1; \frac{13}{3})$

Bewertungsvorschlag:

a) Ansatz für Prüfung der Punkte A, B und C auf Kollinearität; Ergebnis — 2 BE

b) Ansatz für Prüfung der Orthogonalität; Ergebnis; Ansatz für Flächeninhalt; Flächeninhalt; Ansatz für Koordinaten des Punktes T;Koordinaten des Punktes T — 6 BE

c) beide Geradengleichungen; Nachweis, daß der Punkt S auf beiden Geraden liegt; Nachweis, daß S Schnittpunkt ist; Ansatz; Ermitteln eines Parameters; Koordinaten des Schnittpunktes — 6 BE

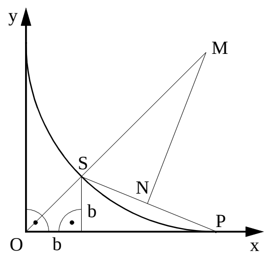
d) Gleichung der Ebene in Parameterform; Eliminieren eines Parameters; Ebenengleichung in allgemeiner Form; Ansatz für Koordinaten der Punkte P_A; quadratische Gleichung; Koordinaten der Punkte P_A — 6 BE

$\overline{\text{20 BE}}$

Erwartungsbild zu Aufgabe B3:

a) Umformen der Kreisgleichung mit quadratischer Ergänzung:
$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$
Kreismittelpunkt: $M(3; 2)$; Radius: $r = \sqrt{5}$ (LE)
Punktprobe für A: $(5-3)^2 + (3-2)^2 = 5$ wahre Aussage
Punktprobe für B: $(2-3)^2 + (4-2)^2 = 5$ wahre Aussage
Abstand:
Der Mittelpunkt M des Kreises k liegt auf der Mittelsenkrechten der Sehne $\overline{AB}$. Es genügt, den Abstand des Mittelpunktes M vom Mittelpunkt $M_{\overline{AB}}$ der Sehne AB zu berechnen.
$M_{\overline{AB}}(3{,}5; 3{,}5)$; $d(M, M_{\overline{AB}}) = \sqrt{0{,}5^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}5}$ (LE)

b) Der Koordinatenursprung ist der Schnittpunkt der senkrecht aufeinanderstehenden Schenkel; 1 Einheit $\triangleq$ 1 mm.
Mittelpunkt M des Kreises: $M(a; a)$
Punkt $S(b; b)$ (vgl. Skizze)
Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt:
$b^2 + b^2 = 350^2 \quad \Rightarrow \quad b = 247{,}5$; $S(247{,}5; 247{,}5)$
N ist der Mittelpunkt der Sehne $\overline{SP}$:



$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OP}) \quad \Rightarrow \quad N(448{,}8;\ 123{,}8)$

Anstieg m der Geraden g durch die Punkte S und N:

$m = \frac{123{,}8 - 247{,}5}{448{,}8 - 247{,}5} = -0{,}6145$

Anstieg m' der Geraden g' durch die Punkte M und N: $m' = -\frac{1}{m} = 1{,}627$

Gleichung der Geraden g' durch die Punkte M und N:

$y = 1{,}627x + n;$ mit $N(448{,}8;\ 123{,}8)$ folgt $n = -606{,}4$.

$y = 1{,}627x - 606{,}4$

Da der Mittelpunkt M auf der Geraden $y = x$ liegen muß (Symmetrie), gilt:

M ist Schnittpunkt der Gerade g und der Gerade mit der Gleichung $y = x$.

$x = 1{,}627x - 606{,}4,$ also $x \approx 968$ (Toleranzbereich ±3 mm)

Radius: $r = d(MP) = \sqrt{317^2 + 967^2} \approx 1\,018$ (Toleranzbereich ±5 mm)

Der „Einstichpunkt“ M hat die Koordinaten M(968; 968), der Radius beträgt 1 018 mm.

Bewertungsvorschlag:

a) Umformen der Gleichung des Kreises k; Koordinaten des Mittelpunkts und Radius des Kreises k; Nachweis der Lage der Punkte A und B; Ansatz für Abstand; Abstand — 5 BE

b) Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden y = x mit der Kreislinie; Koordinaten des Mittelpunkts einer Sehne; Gleichung der Mittelsenkrechten einer Sehne; Koordinaten des Kreismittelpunkts; Radius — 5 BE

$\overline{\text{10 BE}}$

Erwartungsbild zu Aufgabe B4:

a) $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{3^2 + a^2} = 5 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -4; \quad a_2 = 4$

b) Mittelsenkrechte m_1 auf $\overline{AC}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$

Mittelsenkrechte m_2 auf $\overline{BC}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$

Mittelpunkt M: $m_1 \cap m_2 \quad \Rightarrow \quad M(2{,}5;\ 3)$

Radius r: $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{61}{4}}$ (LE)

Gleichung des Kreises k: $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - 3)^2 = \frac{61}{4}$

Die Gerade g_1 sei eine zu g senkrechte Gerade durch den Mittelpunkt M des Kreises k.

Anstieg $m_1 = -\frac{1}{m} = \frac{6}{5}$ $\Rightarrow$ Gerade g_1: $y = \frac{6}{5}x$

$g_1 \cap k$: $(x - \frac{5}{2})^2 + (\frac{6}{5}x - 3)^2 = \frac{61}{4}$ $\Rightarrow$ $x^2 - 5x = 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 5$

Koordinaten der Schnittpunkte S_i der Geraden g_1 und des Kreises k:

$S_1(0; 0) \triangleq C$; $S_2(5; 6)$ (Berührungspunkte der gesuchten Tangenten)

Gleichung der Tangenten: $y = -\frac{5}{6}x + n$

Mit S_1 bzw. S_2 folgt: t_1: $y = -\frac{5}{6}x$; t_2: $y = -\frac{5}{6}x + \frac{61}{6}$.

c)
$$\begin{aligned} \mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3 &= 0 \\ 4\mu_1 + \mu_2 &= 0 \\ 6\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 &= 0 \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat nur die Lösung $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$.

$\Rightarrow$ Die Vektoren $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ und $\overrightarrow{DG}$ sind linear unabhängig.

d) $\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ $\Rightarrow$ $Q_1(\frac{1}{2}; 1; 1)$;

$\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OF} + 2\overrightarrow{ED}$ $\Rightarrow$ $Q_2(-1; -5; -8)$

$\overrightarrow{OQ_3} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ $\Rightarrow$ $Q_3(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$;

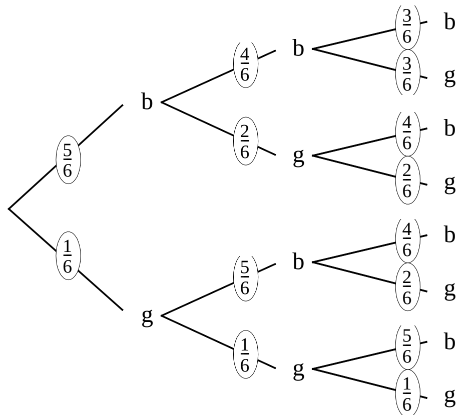
$\overrightarrow{OQ_4} = \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{EF}$ $\Rightarrow$ $Q_4(-3; -4; -5)$

Bewertungsvorschlag:

a)	Werte für a	1 BE
b)	Ansatz für Gleichung des Kreises k; Gleichung des Kreises k; Ansatz für Koordinaten der Berührungspunkte; Koordinaten der Berührungspunkte; Gleichungen der Tangenten	5 BE
c)	Ansatz für Navhweis; Nachweis der linearen Unabhängigkeit	2 BE
d)	Koordinaten eines Punktes Q; Koordinaten aller Punkte Q	2 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C1:

a)



$P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9} = 0{,}5556;$

$P(B) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{13}{18} = 0{,}7222;$ $P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216} = 0{,}0231$

$P(D) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36} = 0{,}3056$

b) Y sei die Höhe der Auszahlung.

y_i	50	5	2	0
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{120}{216}$	$\frac{60}{216}$

$E(Y) = 2{,}153$; Der Einsatz muß mindestens 2,16 DM betragen.

c) E_n: Bis zum n-ten Versuch wird mindestens eine blaue Kugel gezogen.

$P(E_n) = 1 - P(\overline{E}_n) = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n > 0{,}98 \quad \Rightarrow \quad n > 2{,}18$

Es muß mindestens dreimal gezogen werden.

Bewertungsvorschlag:

a) P(A), P(B), P(C), P(D) — 4 BE

b) ein Wertepaar der Wahrscheinlichkeitsverteilung; Wahrscheinlichkeitsverteilung; Erwartungswert; Mindesteinsatz — 4 BE

c) Ansatz; Ergebnis — 2 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C2:

a) Anzahl der Mannschaftsaufstellungen: $2 \cdot \binom{20}{10} = 369\,512$

unter Beachtung der Bedingung: $2 \cdot \binom{19}{9} = 184\,756$

b) X sei die Anzahl der gehaltenen Elfmeter.
X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}15$.
$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}15 = 3$; Man hat 3 gehaltene Elfmeter zu erwarten.

$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{18} = 0{,}2293$

$P(X > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$

$= 1 - [0{,}85^{20} + 20 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{18}] = 0{,}5951$

c) Ereignis A: Der Spieler verwandelt einen Elfmeter.
$P(A) = 0{,}85 \cdot 0{,}80 = 0{,}6800$

d) Y sei die Anzahl der von Thomas gehaltenen Elfmeter.
Y ist binomialverteilt mit $n_Y = 6$ und $p_Y = 0{,}15$.
Z sei die Anzahl der von René gehaltenen Elfmeter.
Z ist binomialverteilt mit n_Z und $p_Z = 0{,}10$.
$E(Y) = E(Z) \quad \Rightarrow \quad 6 \cdot 0{,}15 = n_Z \cdot 0{,}10 \quad \Rightarrow \quad n_Z = 9$
Der Spieler müßte 9 Elfmeter gegen René schießen.

Bewertungsvorschlag:

a)	Ansatz; Anzahl der Mannschaftsaufstellungen; Anzahl der Mannschaftsaufstellungen mit Beachtung des Kapitäns	3 BE
b)	Erwartungswert; Wahrscheinlichkeit für genau zwei Elfmeter; Ansatz; Wahrscheinlichkeit für mehr als zwei Elfmeter	4 BE
c)	Wahrscheinlichkeit	1 BE
d)	Ansatz; Ergebnis	2 BE
		10 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1995 / 96

Gymnasium

Sachsen-Anhalt

Hinweis: Jeder Prüfling des gleichen Kurses hatte die drei einheitlich für den Kurs von der Lehrkraft benannten Aufgaben zu bearbeiten. Diese Auswahl enthielt je eine Aufgabe aus den Gebieten G1, G2 und G3.

Gebiet G1: Analysis / Aufgabe 1.1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Schnittpunkte ihres Graphen mit den Koordinatenachsen.
Ermitteln Sie Art und Lage des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion f.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to \pm\infty$, und geben Sie eine Gleichung der Asymptote des Graphen dieser Funktion an.
Zeichnen Sie die Asymptote und den Graphen der Funktion f im Intervall $-4 \leq x \leq 4$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.
(Vorschlag: Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 2 cm.)

b) Die Tangenten an den Graphen der Funktion f in den Schnittpunkten dieses Graphen mit der x-Achse und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

Der Graph der Funktion f und die x-Achse begrenzen ebenfalls eine Fläche vollständig.
Zur Berechnung eines Näherungswertes für die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche wird der Graph der Funktion f durch den Graphen einer quadratischen Funktion g, der durch die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen verläuft, ersetzt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g, und berechnen Sie den Näherungswert für die Maßzahl des Inhalts der Fläche.
[Teilergebnis zur Kontrolle: $y = g(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5$]

Gebiet G1: Analysis / Aufgabe 1.2

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = 4 \cdot e^{-0{,}5x}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Weisen Sie nach, daß der Graph der Funktion f genau einen Schnittpunkt mit nur einer der beiden Koordinatenachsen hat.
Untersuchen Sie die Funktion f auf Monotonie.

Vervollständigen Sie die Wertetabelle:

x	–1			6
f(x)		6	3	

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-1 \leq x \leq 6$.

b) Der Graph der Funktion f, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

c) Im Punkt $P(2 \mid f(2))$ wird an den Graphen der Funktion f eine Tangente t gelegt.
Zeigen Sie, daß diese Tangente t die Gleichung $y = -2e^{-1}x + 8e^{-1}$ besitzt.

Die Tangente t zerlegt die Fläche aus Aufgabe b in zwei Teilflächen.
Berechnen Sie die Maßzahlen der Inhalte dieser Teilflächen.

Die Tangente t und die Koordinatenachsen begrenzen eine Dreiecksfläche. Bei Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht ein Kreiskegel.
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens dieses Kegels.

Gebiet G2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung O sind

die Punkte $A(6 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 12 \mid 0)$ und $C(0 \mid 0 \mid 10)$,

die Gerade g_1: $\vec{x} = \overrightarrow{OC} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

und die Ebene ε_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}$

gegeben.

a) Die Punkte A und B bestimmen die Gerade g_2.
Zeigen Sie, daß die Gerade g_2 echt parallel zur Geraden g_1 verläuft.

Durch die Geraden g_1 und g_2 ist die Ebene ε_2 bestimmt.
Stellen Sie eine Parametergleichung dieser Ebene auf.

b) Die Koordinatenachsen durchstoßen die Ebene ε_1 in den Punkten D, E und F.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Weisen Sie nach, daß die Punkte A, B, C, D, E, und F Eckpunkte eines dreiseitigen Pyramidenstumpfes sind, und zeichnen Sie diesen Pyramidenstumpf in einem Schrägriß eines räumlichen Koordinatensystems.

Gebiet G2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die
Punkte $A(0\,|\,2\,|\,4)$, $B(4\,|\,0\,|\,3)$, $C(8\,|\,2\,|\,4)$ und $M(4\,|\,4{,}2\,|\,5{,}1)$ gegeben.
Die Punkte A, B und C sind Eckpunkte eines Dreiecks.

a) Zeigen Sie, daß das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks.

Die Symmetrieachse des Dreiecks ABC sei die Gerade s.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden s.

b) Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene ε.
Stellen Sie eine Parametergleichung dieser Ebene auf.
Zeigen Sie, daß der Punkt M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC ist.

Gebiet G3: Wahrscheinlichkeitsrechung / Aufgabe 3.1

Es wird angenommen, daß entlang einer Fahrtroute drei Ampeln 1, 2 und 3, die unabhängig voneinander arbeiten, ausschließlich bei Grünschaltung passiert werden. Für die Grünschaltung der Ampeln sind folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

Ampel 1: $P(A_1) = \frac{2}{3}$, Ampel 2: $P(A_2) = \frac{3}{4}$, Ampel 3: $P(A_3) = \frac{1}{2}$.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für alle möglichen Ergebnisse bei einer Fahrt auf dieser Route.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten folgender Ereignisse:
A: Alle drei Ampeln können ohne Halt passiert werden (d.h., beim Erreichen einer Ampel ist sie jeweils auf Grün geschaltet).
B: Höchstens eine Ampel kann ohne Halt passiert werden.

b) Im folgenden wird untersucht, wie oft das Ereignis A (aus Aufgabe a) bei zehn Fahrten auftritt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei mindestens 3 von 10 Fahrten das Ereignis A eintritt.

c) Die Ampel 2 wird nun in Abhängigkeit von der Ampel 1 geschaltet. Die Wahrscheinlichkeit, Ampel 2 ohne Halt zu passieren, wenn Ampel 1 bereits passiert wurde, beträgt dann 90 %.
Berechnen Sie nunmehr die Wahrscheinlichkeit, die Ampeln 1 und 2 nacheinander ohne Halt zu passieren.

Gebiet G3: Analysis / Aufgabe 3.2

Ein Kelch hat die Form eines Rotationskörpers, dessen oberer Teil der Körper K sei (siehe Abbildung 1). Der Teilkörper K ist durch Rotation des Graphen k einer Funktion f um die x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems im Intervall $0 \le x \le 4$ entstanden (siehe Abbildung 2).
Eine Einheit des Koordinatensystems entspricht einem Zentimeter.

Die Funktion f ist gegeben durch f: $y = f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}\,(x + 2), \quad x \in \mathbb{R}$.

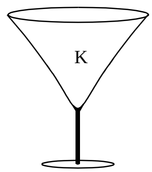


Abbildung 1

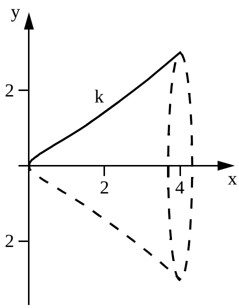


Abbildung 2

a) Berechnen Sie das Volumen des Teilkörpers K sowie den Inhalt der Fläche, die bei einem Schnitt des Teilkörpers mit einer Ebene entsteht, die die Rotationsachse enthält.

b) Der Teilkörper K des Kelches besteht aus genau einem konvexen und genau einem konkaven Bereich, dem jeweils analog gekrümmte Teile des Funktionsgraphen k zugrunde liegen. Der Übergang vom konvexen zum konkaven Teil des Funktionsgraphen wird durch die Lage des Wendepunktes charakterisiert.
Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.
Hinweis: Ein Nachweis der Existenz des Wendepunktes ist nicht erforderlich.

Gebiet G3: Analytische Geometrie / Aufgabe 3.3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4\,|\,0)$ und $B(0\,|\,2)$ gegeben.

a) Die Punkte A und B sind Scheitelpunkte einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist.
Geben Sie eine Gleichung dieser Ellipse an.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Brennpunkte der Ellipse.

b) Der Kreis k mit der Maßzahl der Länge des Radius $r = 5$ und dem Mittelpunkt $M(0\,|\,0)$ werde so verschoben, daß sich sein Mittelpunkt entlang nur einer der Koordinatenachsen bewegt. Bei einer solchen Verschiebung entsteht ein Kreis k', auf dem die Punkte A und B liegen.
Weisen Sie nach, daß es genau einen Kreis k' gibt, und ermitteln Sie eine Gleichung dieses Kreises.

c) Die Tangente an den Kreis k' (aus Aufgabe b) im Punkt A hat die Gleichung $4x + 3y = 16$.
Ermitteln Sie das Gradmaß des Winkels, unter dem sich die Tangente an den Kreis k' und die Tangente an die Ellipse im Punkt A schneiden.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkte mit der y-Achse: $f(0) = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_y(0\,|\,-\frac{1}{2})$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $0 = \frac{x^2-1}{x^2+2}$

Wegen $x^2 + 2 > 0$ für alle x folgt: $0 = x^2 - 1$, also $x_{0_1} = -1$; $x_{0_2} = 1$.

$\Rightarrow$ Schnittpunkte S_x: $N_1(-1\,|\,0)$, $N_2(1\,|\,0)$

Art und Lage des lokalen Extrempunktes von f:

Ableitungen: $f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2+2) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{6x}{(x^2+2)^2}$

$f''(x) = \frac{6\,(x^2+2)^2 - 6x \cdot 2\,(x^2+2) \cdot 2x}{(x^2+2)^4} = \frac{6\,(x^2+2) - 6x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+2)^3} = \frac{-18x^2+12}{(x^2+2)^3}$

$0 = \frac{6x}{(x^2+2)^2}$; wegen $(x^2+2)^2 > 0$ für alle x folgt: $0 = 6x \Rightarrow x_E = 0$.

$f''(0) = \frac{-18 \cdot 0 + 12}{(0+2)^3} = \frac{12}{8} > 0$; $f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow T(0\,|\,-\frac{1}{2})$

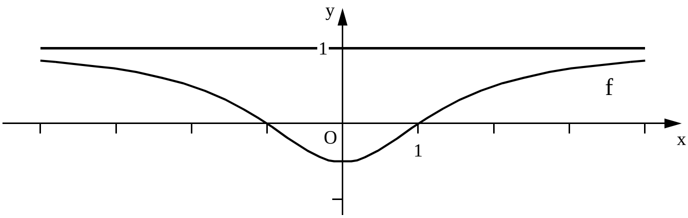
Verhalten der Funktion f für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x^2})} = 1; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x^2+2} = 1$$

Gleichung der Asymptoten des Graphen der Funktion:

Asymptote: $y = 1$

graphische Darstellung:

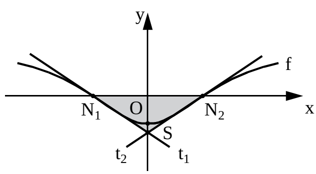


b) Maßzahl des Flächeninhalts der angegebenen Fläche:

Tangente t_2 im Punkt N_2 an den Graphen von f:

$\frac{y-0}{x-x_{0_2}} = f'(x_{0_2})$, also $y = \frac{6 \cdot 1}{(1^2+2)^2} \cdot (x-1)$

$\Rightarrow t_2$: $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$



Beide Tangenten schneiden einander wegen der Spiegelsymmetrie der Funktion f in einem gemeinsamen Punkt S auf der y-Achse.

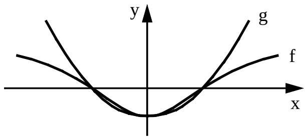
$\Rightarrow S(0 \,|\, t(0))$ mit $t(0) = -\frac{2}{3} \;\Rightarrow S(0 \,|\, -\frac{2}{3})$

Für den Dreiecksflächeninhalt gilt dann:

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ mit $g = 2 \cdot x_{0_2} = 2$; $h = |\,t(0)\,| = \frac{2}{3}$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Näherungswert für den Flächeninhalt unter der Kurve:



g(x) sei eine quadratische Funktion. Die Punkte N_1, N_2 und S_y des Graphen von f sind auch Punkte des Graphen der quadratischen Funktion g.

g(x) allgemein: $g(x) = ax^2 + bx + c$

Wegen der Spiegelsymmetrie von f(x) muß auch g(x) spiegelsymmetrisch sein, also ist b = 0.

Wegen $S_y(0 \,|\, -\frac{1}{2})$ gilt $c = -\frac{1}{2}$.

Da der Punkt $N_2(1 \,|\, 0)$ zum Graphen von g gehört, gilt:

$0 = a \cdot 1^2 + 0 - \frac{1}{2}$, also $a = \frac{1}{2} \;\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Flächeninhalt:

$$A = 2\,\left|\int_0^1 g(x)\,dx\right| = 2\,\left|\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)dx\right| = 2\,\left|\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\right]_0^1\right|$$

$$= 2\,\left|\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right| = 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Schnittpunkte	3 BE
	Art und Lage des lokalen Extrempunktes	6 BE
	Verhalten von f für $x \to \pm\infty$; Gleichung der Asymptote	3 BE
	Zeichnung	5 BE
b)	Flächeninhalt	7 BE
	Gleichung für g; Näherungswert für den Flächeninhalt	11 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Nachweis des Schnittpunktverhaltens:

Wegen $e^z \neq 0$ für alle z besitzt der Graph von f keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Schnittpunkt mit der y-Achse S_y: $y = f(0) = 4e^{-0,5 \cdot 0} = 4$

$\Rightarrow S_y(0\,|\,4)$ ist einziger Schnittpunkt mit einer Koordinatenachse.

Monotonieuntersuchung für die Funktion f:

$f'(x) = 4 \cdot (-0,5)e^{-0,5x} = -2e^{-0,5x}$

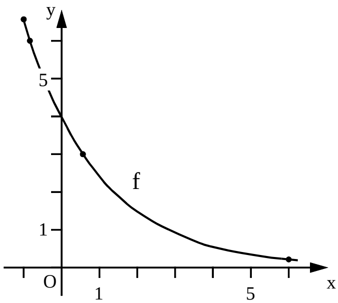
Wegen $e^{-0,5x} > 0$ für alle x ist $f'(x) < 0$ für alle x.

Die Funktion f ist also streng monoton fallend für alle x.

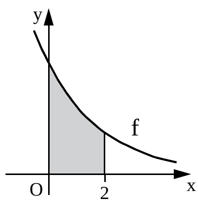
Wertetabelle: $y = 4e^{-0,5x}$; $\frac{y}{4} = e^{-0,5x} \Rightarrow x = \frac{\ln\frac{y}{4}}{-0,5}$

x	-1	$-2\ln\frac{3}{2} \approx -0,8$	$-2\ln\frac{3}{4} = 0,6$	6
f(x)	$4e^{0,5} \approx 6,6$	6	3	$4e^{-3} \approx 0,2$

Graph der Funktion f::



b) Maßzahl des Inhalts der angegeben Fläche



$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 4e^{-0,5x}\,dx$$

$$= \left[4 \cdot \frac{1}{-0,5}\,e^{-0,5x}\right]_0^2$$

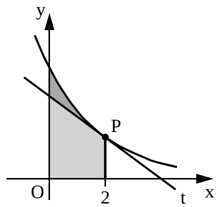
$$= -8 \cdot (e^{-1} - 1) = 8(1 - e^{-1}) \approx 5,06$$

c) Nachweis der Tangentengleichung:

$$\frac{y - 4e^{-0,5 \cdot 2}}{x - 2} = f'(2) \text{ mit } f'(x) = -2e^{-0,5x}$$

$$\frac{y - 4e^{-1}}{x - 2} = -2e^{-1} \Rightarrow y = -2e^{-1}(x - 2) + 4e^{-1}, \text{ also } y = -2e^{-1}x + 8e^{-1}$$

Maßzahlen des Inhalts der Teilflächen:
Flächeninhalt der trapezförmigen Teilfläche:



$$A_{Trapez} = \int_0^2 (-2e^{-1}x + 8e^{-1})\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{2}{2}\,e^{-1}x^2 + 8e^{-1}x\right]_0^2 = -e^{-1}\cdot 4 + 8e^{-1}\cdot 2 - 0$$

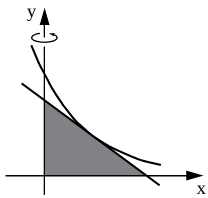
$$= 12e^{-1} \approx 4{,}41$$

$A_{Rest} \;= A - A_{Trapez} \approx 0{,}65$

Weiterer Lösungsweg: $A_{Trapez} = \frac{1}{2}\,(f(0) + f(2))\cdot 2 = \frac{8}{e} + \frac{4}{e} = \frac{12}{e}$

Volumen des Rotationskegels:
Volumen dieses Rotationskörpers als Kegelvolumen:

$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h$, wobei r die Nullstelle der Tangente und h der y-Wert des Schnittpunktes der Tangente mit der y-Achse ist.



Für t: $y = -2e^{-1}x + 8e^{-1}$ folgt:
$S_y(0\,|\,8e^{-1}) \Rightarrow h = 8e^{-1}$
und
$0 = -2e^{-1}(x - 4)$, also $x_0 = 4 \Rightarrow r = 4$

$$\Rightarrow V_{Kegel} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 16\cdot 8e^{-1} = \frac{128}{3}\,\pi\cdot e^{-1} \approx 49{,}31$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis für genau einen Schnittpunkt	3 BE
	Monotonie	4 BE
	Wertetabelle	6 BE
	Zeichnung	3 BE
b)	Flächeninhalt	5 BE
c)	Gleichung der Tangente	3 BE
	Inhalte der beiden Teilflächen	7 BE
	Volumen des Kegels	4 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Nachweis der Parallelität von g_1 und g_2:

g_2: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + u\,\overrightarrow{AB}$ | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegen $\overrightarrow{a_{g_1}} = k\overrightarrow{a_{g_2}}$, nämlich $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$, sind die Richtungsvektoren beider Geraden linear abhängig und damit g_1 und g_2 parallel oder identisch.

Falls A auf g_1 liegt, gilt $g_1 = g_2$: $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} \Rightarrow t_x = -6 \\ \Rightarrow t_y = 0 \\ \Rightarrow t_z \text{ n.d.} \end{array}$

Es gibt kein t, so daß $A \in g_1 \Rightarrow g_1 \parallel g_2$.

Parametergleichung für eine Ebene ε_2, die durch g_1 und g_2 bestimmt ist:

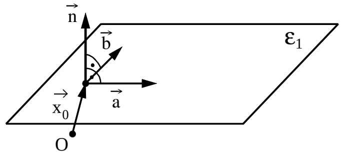
Ebene ε_2 durch drei Punkte A, B, C:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0-6 \\ 0-0 \\ 10-0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2\text{: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

b) Schnittpunkte der Ebene ε_1 mit den Koordinatenachsen:
Gleichung der Ebene ε_1 in Koordinatenform über die Normalenform:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$



$$= 20\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k} + 25\vec{j} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$0 = 20(x-3) + 10(y-0) + 12(z-0)$

ε_1: $60 = 20x + 10y + 12z$

Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen:

x-Achse: Bedingungen $y = z = 0 \Rightarrow S_x = D(3\,|\,0\,|\,0)$

y-Achse: Bedingungen $x = z = 0 \Rightarrow S_y = E(0\,|\,6\,|\,0)$

z-Achse: Bedingungen $x = y = 0 \Rightarrow S_z = F(0\,|\,0\,|\,5)$

Weiterer Lösungsweg: Schnittpunkt S_x mit der x-Achse:

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{S_x}\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow r_1 = 0,\ s_1 = 0, \text{ also } S_x(3\,|\,0\,|\,0)$$

$$S_y\text{: } \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\y_{S_y}\\0\end{pmatrix} \text{ führt zu (I) } 3 - 5r_2 - 3s_2 = 0, \text{ (II) } 5r_2 + 5s_2 = 0$$

$\Rightarrow s_2 = -\frac{3}{2}$, $r_2 = \frac{3}{2}$, also $S_y(0\,|\,6\,|\,0)$.

$$S_z\text{: } \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r_3\begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix} + s_3\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\z_{S_z}\end{pmatrix} \Rightarrow \text{(I) } 3 - 5r_3 - 3s_3 = 0, \text{ (II) } 4r_3 = 0$$

$\Rightarrow r_3 = 0$, $s_3 = 1$, also $S_z(0\,|\,0\,|\,5)$

Nachweis, daß A, B, C, D, E, F Eckpunkte eines dreiseitigen Pyramidenstumpfes sind:

(1) A, D liegen auf x-Achse, B, E auf y-Achse sowie C, F auf z-Achse.

(2) A, B, C bilden Ebene ε_2, und D, E, F liegen in Ebene ε_1.

$\Rightarrow$ Falls der Normalenvektor der Ebene ε_1 senkrecht auf den Richtungsvektoren der Ebene ε_2 steht, so gilt $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

$\Rightarrow$ A, B, C, D, E, F sind Eckpunkte eines dreiseitigen Pyramidenstumpfes.

$$\overrightarrow{n_{\varepsilon_1}} = \begin{pmatrix}20\\10\\12\end{pmatrix};\ \overrightarrow{a_{\varepsilon_2}} = \begin{pmatrix}-6\\12\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{b_{\varepsilon_2}} = \begin{pmatrix}-6\\0\\10\end{pmatrix}$$

$$\text{(I) } \overrightarrow{n_{\varepsilon_1}} \cdot \overrightarrow{a_{\varepsilon_2}} = 20 \cdot (-6) + 10 \cdot 12 + 12 \cdot 0 = 0$$

$$\text{(II) } \overrightarrow{n_{\varepsilon_1}} \cdot \overrightarrow{b_{\varepsilon_2}} = 20 \cdot (-6) + 10 \cdot 0 + 12 \cdot 10 = 0$$

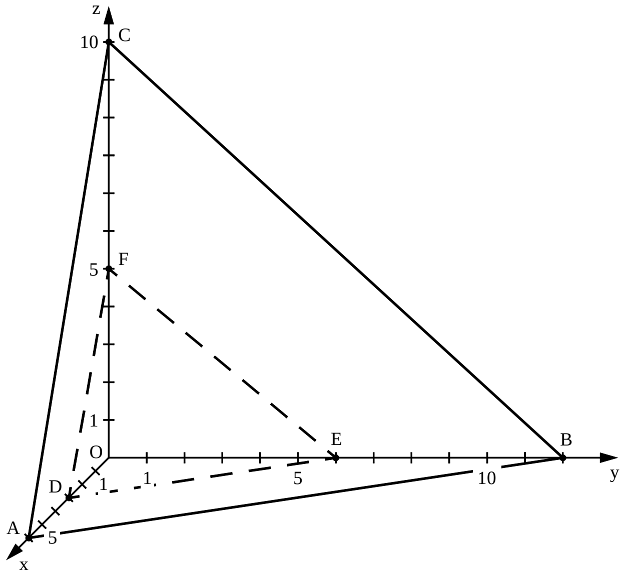
Der so entstandene Körper ist ein dreiseitiges Pyramidenstumpf.

Weiterer Lösungsweg: Es wird gezeigt, daß Seitenvektoren der Dreiecke ABC und DEF zueinander parallel sind:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-6\\12\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}:\ \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DE}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-6\\0\\10\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}:\ \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DF}$$

Schrägriß:



Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis für echte Parallelität von g_1 und g_2	3 BE
	Parametergleichung der Ebene	4 BE
b)	Koordinaten der Punkte	4 BE
	Nachweis des dreiseitigen Pyramidenstumpfes; Schrägriß	9 BE
		20 BE

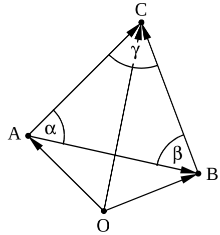
Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) Nachweis, daß ΔABC gleichschenklig ist:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 0-2 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{21} = c$$

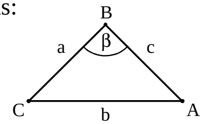
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 2-2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = 8 = b$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ 2-0 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{21} = a$$



Da zwei der Dreiecksseiten gleich lang sind, ist das ΔABC gleichschenklig.

Winkelgröße an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks:



$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BA}|} = \frac{4\cdot(-4)+2\cdot 2+1\cdot 1}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}}$$

$\Rightarrow \beta \approx 121{,}6°$

Gleichung für eine Gerade s, die Symmetrieachse des ΔABC ist:
Die Symmetrieachse des ΔABC muß durch den Mittelpunkt der Seite b sowie durch den Punkt B verlaufen:

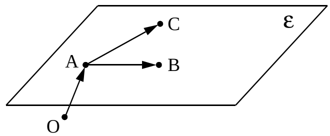
Mittelpunkt M_{AC}: $\overrightarrow{OM_{AC}} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}8\\2\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$

Symmetrieachse s: $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BM_{AC}} = \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4-4\\2-0\\4-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

b) Parametergleichung für eine Ebene ε durch A, B und C.

Ebene ε: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$

$= \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4-0\\0-2\\3-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}8-0\\2-2\\4-4\end{pmatrix}$



ε: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}$

Nachweis, daß der Punkt M Mittelpunkt des Umkreises des ΔABC ist:
Wenn M Mittelpunkt des Umkreises des ΔABC sein soll, so muß gelten:

$|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}|$ sowie $M \in \varepsilon(A, B, C)$

$|\overrightarrow{MA}| = \begin{vmatrix}0-4\\2-4{,}2\\4-5{,}1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-4\\-2{,}2\\-1{,}1\end{vmatrix}$; $|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{22{,}05}$

$|\overrightarrow{MB}| = \begin{vmatrix}4-4\\0-4{,}2\\3-5{,}1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\-4{,}2\\-2{,}1\end{vmatrix}$; $|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{22{,}05}$

$|\overrightarrow{MC}| = \begin{vmatrix}8-4\\2-4{,}2\\4-5{,}1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-4\\-2{,}2\\-1{,}1\end{vmatrix}$; $|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{22{,}05}$

$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}4\\4{,}2\\5{,}1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}$, d.h.

(I)	$4 = 4r + 8s$	$s = 1{,}05$
(II)	$4{,}2 = 2 - 2r$	$r = -1{,}1$
(III)	$5{,}1 = 4 - r$	$r = -1{,}1$

Die Abstände der Punkte A, B, C zu M sind alle gleich und M liegt in der Ebene $\varepsilon(A, B, C)$.
M ist also Mittelpunkt des Umkreises des ΔABC.

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis, daß ΔABC gleichschenklig ist	3 BE
	Gradmaß des Winkels an der Dreiecksspitze	3 BE
	Gleichung für s	4 BE
b)	Parametergleichung für die Ebene	3 BE
	Nachweis, daß M Mittelpunkt des Umkreises von ΔABC ist	7 BE
		20 BE

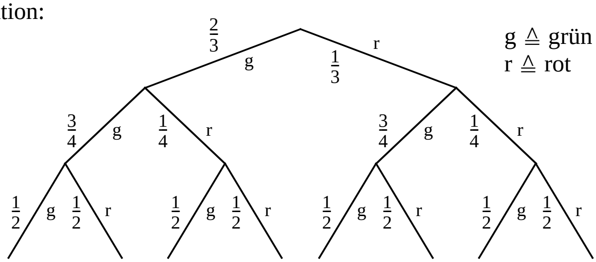
Erwartungsbild zu Aufgabe 3.1

a) Baumdiagramm für alle möglichen Ergebnisse bei einer Fahrt auf der Route:
Ausgangssituation:

1. Ampel

2. Ampel

3. Ampel



g ≙ grün
r ≙ rot

Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der gegebenen Ereignisse:

Ereignis A: alle Ampeln ohne Halt passierbar

Mit Pfadregel folgt: $P(A) = P(g, g, g) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ereignis B: höchstens eine Ampel kann ohne Halt passiert werden

$P(B) = P(r, r, r) + P(r, r, g) + P(r, g, r) + P(g, r, r)$

$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{7}{24}$

b) Wahrscheinlichkeit, daß bei mindestens 3 von 10 Fahrten Ereignis A eintritt:

Ereignis A ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = P(A) = \frac{1}{4}$

$P = 1 - P_1$(„A tritt bei keiner Fahrt ein“)
$- P_2$(„A tritt bei einer Fahrt ein“)
$- P_3$(„A tritt bei zwei Fahrten ein“)

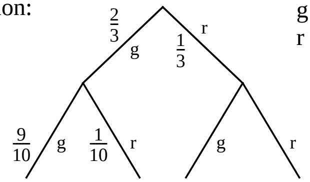
$P_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$; $P_2 = 10 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$; $P_3 = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 45 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$P = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 45 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = 0{,}47$

c) Wahrscheinlichkeit, die Ampeln 1 und 2 unter geänderten Bedingungen ohne Halt zu passieren:
Ausgangssituation:

1. Ampel

2. Ampel



g ≙ grün
r ≙ rot

P = P(„1. Ampel grün“) · P(„2. Ampel grün, falls 1. Ampel schon grün war“)

$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

Weiterer Lösungsweg:
Wahrscheinlichkeit, Ampel 2 zu passieren: $P(A_2)$
Wahrscheinlichkeit, Ampel 1 zu passieren: $P(A_1)$
Wahrscheinlichkeit, sowohl Ampel 1 als auch Ampel 2 ohne Halt zu passieren: $P(A_1 \cap A_2)$

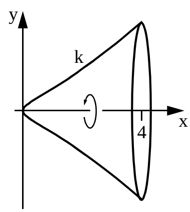
$P(A_2 \mid A_1) = \frac{9}{10} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = \frac{9}{10} \cdot P(A_1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Bewertungsvorschlag:

a)	Baumdiagramm;	3 BE
	Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse A und B	4 BE
b)	Wahrscheinlichkeit für gegebenes Ereignis	5 BE
c)	Wahrscheinlichkeit für gegebenes Ereignis	3 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.2

a) Volumen des Teilkörpers:
Volumen des Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse:



$$V_x = \int_0^4 \pi \cdot [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^4 \left[\frac{1}{4}\sqrt{x}\,(x+2)\right]^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_0^4 x(x+2)^2\,dx = \frac{\pi}{16}\int_0^4 (x^3+4x^2+4x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{16}\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4 = \frac{\pi}{16}\left(\frac{1}{4}\cdot 4^4 + \frac{4}{3}\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 - 0\right)$$

$$= \pi\cdot\frac{34}{3} \approx 35{,}6$$

Das Volumen des Kelches beträgt rund 35,6 cm^3.

Inhalt der Schnittfläche:

Der Flächeninhalt ist der doppelte Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f im Intervall [0; 4]:

$$A = 2\int_0^4 f(x)\,dx = 2\int_0^4 \frac{1}{4}\sqrt{x}\,(x+2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}(x+2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{4^5} + \frac{4}{3}\sqrt[2]{4^3} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\cdot 2^6 + \frac{1}{3}\cdot 2^5\right) = \frac{1}{2}\cdot 2^5\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{176}{15} \approx 11{,}7$$

Der Flächeninhalt der Schnittfläche beträgt rund 11,7 cm^2.

b) Koordinaten des Wendepunktes:

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+2) + \sqrt{x}\cdot 1\right] = \frac{1}{4}\cdot\frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \quad \left(= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$$

Mit Quotientenregel ergibt sich:

$$f''(x) = \frac{1}{8}\left[\frac{3\sqrt{x} - (3x+2)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right. = \frac{1}{8}\cdot\frac{6x-3x-2}{2\sqrt{x}\cdot x} = \frac{3x-2}{16\sqrt{x}\cdot x}$$

Oder: Gliedweise differenziert:

$$f''(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3x-2}{4\sqrt{x}\cdot x}$$

Wendepunkt:

$f''(x) = 0$, also $0 = \frac{3x-2}{16\sqrt{x}\cdot x}$, d.h. $0 = 3x - 2$, und damit ergibt sich: $x_W = \frac{2}{3}$

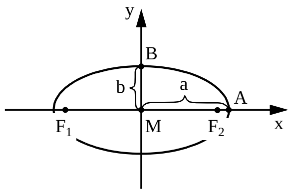
$$y_W = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}+2\right) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{8}{3} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow W\left(\frac{2}{3}\,\middle|\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Volumen des Teilkörpers K; Inhalt der Schnittfläche	9 BE
b)	Koordinaten des Wendepunktes	6 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.3

a) Ellipsengleichung:
Auf Grund der Kenntnis der Punkte A, B sind die Halbachsen ablesbar:



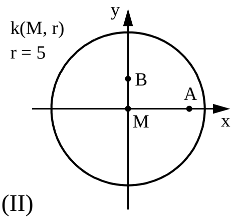
$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow E\colon \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

Koordinaten der Brennpunkte der Ellipse:

$e = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow e = \sqrt{12}$

Koordinaten der Brennpunkte: $F_1(-\sqrt{12} \mid 0)$, $F_2(\sqrt{12} \mid 0)$

b) Nachweis, daß es genau einen Kreis k' mit den geforderten Bedingungen gibt:
Bedingung: k so verschieben, daß M nur auf einer Koordinatenachse wandert; solange, bis $A, B \in k'$



$\Rightarrow$ Mittelpunkt M' des Kreises k' möge auf der y-Achse liegen, also: $M'(0 \mid y_M)$

Prüfen in Kreisgleichungen:

allg.: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

für A: $(4 - 0)^2 + (0 - y_M)^2 = 25 \Rightarrow y_M^2 = 9$ (I)

für B: $(0 - 0)^2 + (2 - y_M)^2 = 25 \Rightarrow 4 - 4y_M + y_M^2 = 25$ (II)

Aus (I) und (II) folgt: $4 - 4y_M + 9 = 25$, also $-4y_M = 12$

$\Rightarrow y_M = -3 \Rightarrow M'(0 \mid -3)$

Nachweis, daß es keinen Mittelpunkt M' auf der x-Achse geben kann, wenn gleichzeitig r = 5 gilt:

Angenommen, es gäbe ein $M''(x_M \mid 0)$:

Prüfen in Kreisgleichungen:

für A: $(4 - x_M)^2 + (0 - 0)^2 = 25 \Rightarrow 16 - 8x_M + x_M^2 = 25$ (I)

für B: $(0 - x_M)^2 + (2 - 0)^2 = 25 \Rightarrow x_M^2 + 4 = 25 \Rightarrow x_M^2 = 21$ (II)

Aus (I) und (II) folgt: $16 - 8x_M + 21 = 25$, also $-8x_M = -12$ und damit $x_M = 1{,}5$

$\Rightarrow M''(1{,}5 \mid 0)$

Nun gilt $\left|\overline{M''A}\right| = 2{,}5$ und $\left|\overline{M''B}\right| = \sqrt{1{,}5^2 + 2^2} = 2{,}5$. Wegen $2{,}5 \neq r = 5$ erfüllt nur der Kreis k' mit $k'\colon (x - 0)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$ die gestellten Bedingungen.

Weiterer Lösungsweg:

Der Mittelpunkt von k' muß auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegen. Wegen $M_{\overline{AB}}(2 \mid 1)$ und $m_{\overline{AB}} = -\frac{1}{2}$ folgt nach der Punkt-Richtungsgleichung für die Gleichung der Mittelsenkrechten: $2 = \frac{y - 1}{x - 2}$, also $y = 2x - 3$.

Diese Gerade schneidet die x-Achse in $S_x(\frac{3}{2} \mid 0)$ und die y-Achse in $S_y(0 \mid -3)$.

Nur S_y hat von A und B den Abstand 5.

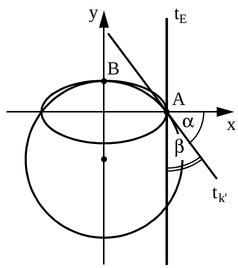
$\Rightarrow M_{k'}(0 \mid -3)$ und k': $x^2 + (y + 3)^2 = 25$

c) Gradmaß des Schnittwinkels:
Da die Tangente an die Ellipse in A senkrecht zur x-Achse verläuft, betrachtet man nur noch die Tangente an den Kreis in A:
Tangentengleichung an Kreis:

$(x - x_M)(x_A - x_M) + (y - y_M)(y_A - y_M) = r^2$, d.h.
für den vorliegenden Fall:
$(x - 0)(4 - 0) + (y + 3)(0 + 3) = 25$

$\Rightarrow$ Tangente an Kreis: $t_{k'}: y = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3}$

$\Rightarrow$ Anstieg $m_{t_{k'}} = -\frac{4}{3}$, also $\alpha = 53{,}1°$



Der gesuchte Schnittwinkel zwischen t_E und $t_{k'}$ ist somit $\beta = 90° - \alpha = 36{,}9°$

Bewertungsvorschlag:

a)	Gleichung der Ellipse	2 BE
	Koordinaten der Brennpunkte der Ellipse	2 BE
b)	Nachweis; Kreisgleichung	8 BE
c)	Gradmaß des Winkels	3 BE
		15 BE

Abiturprüfung Grundkurs

1996 / 97

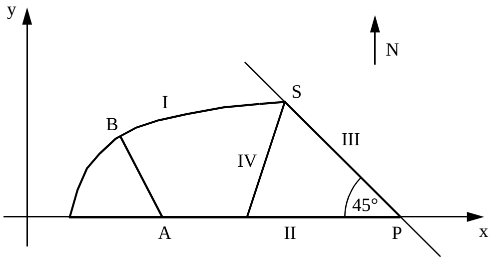
Gymnasium

Sachsen-Anhalt

Hinweis: Jeder Prüfling des gleichen Kurses hatte die drei einheitlich für den Kurs von der Lehrkraft benannten Aufgaben zu bearbeiten. Diese Auswahl enthielt je eine Aufgabe aus den Gebieten G1, G2 und G3.

Gebiet G1: Analysis / Aufgabe 1.1

Ein Gewerbegebiet wird von drei Straßen I, II und III vollständig begrenzt. Der Straßenverlauf wird in einem kartesischen Koordinatensystem durch Linien (ohne Berücksichtigung der Straßenbreite) beschrieben. Die y-Achse ist nach Norden ausgerichtet. Eine Einheit entspricht 100 m im Gelände (siehe Skizze).



Skizze
(nicht maßstabsgerecht)

Dabei liegt die Straße I auf dem Graphen der Funktion $y = f(x) = 4 - \frac{4}{x}$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, die Straße II auf der x-Achse. Die Straße III führt geradlinig in südöstliche Richtung und schneidet die Straße II im Punkt $P(11{,}5 \,|\, 0)$.

a) Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Straßen I und II schneiden. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung, die den Verlauf der Straße III beschreibt, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Straßen I und III.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gewerbegebietes in Hektar.

Von einem Punkt S aus ist eine geradlinige Straße IV zur Straße II geplant, die von dem Gewerbegebiet eine allseitig geradlinig begrenzte Teilfläche mit dem Inhalt von 10,5 ha abgrenzen soll.
Beschreiben Sie den Verlauf der Straße IV durch eine Gleichung.

c) Vom Punkt $A(4 \,|\, 0)$ aus soll ein geradlinig verlaufender Kanal gebaut werden und an das in der Straße I liegende Abwassersystem in einem Punkt B angeschlossen werden.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion d, die die Kanallänge $\overline{AB}$ beschreibt. (Die Kanalbreite bleibt unberücksichtigt.)

Für $x = 2$ wird die Kanallänge minimal.
Weisen Sie nach, daß an dieser Stelle die notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extrempunktes erfüllt ist.
Geben Sie die Koordinaten des Anschlußpunktes B und die minimale Kanallänge an.

Gebiet G1: Analysis / Aufgabe 1.2

Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen

$y = f(x) = \ln(-2x)$ und

$y = g(x) = \ln(-\frac{1}{2}x)$.

Der Graph der Funktion f sei mit G_1, der Graph der Funktion g sei mit G_2 bezeichnet.

a) Geben Sie den jeweils größten Definitionsbereich für die Funktionen f und g an, und untersuchen Sie beide Funktionen auf Monotonie.

Die Schnittpunkte der Graphen G_1 und G_2 mit der x-Achse seien S_1 bzw. S_2.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Weisen Sie nach, daß die Graphen G_1 und G_2 keinen gemeinsamen Punkt besitzen.
Zeichnen Sie die Graphen G_1 und G_2 für $x \geq -8$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.

b) Die Tangenten in den Punkten S_1 und S_2 (siehe Aufgabe a) an die Graphen G_1 bzw. G_2 schneiden einander in einem Punkt P.
Zeigen Sie, daß der Punkt P auf der y-Achse liegt, und berechnen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels der Tangenten.

c) Die Parallelen durch die Punkte S_1 und S_2 (siehe Aufgabe a) zur y-Achse und die Graphen G_1 und G_2 begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.
Weisen Sie nach, daß der Inhalt der Fläche, die von den Graphen G_1 und G_2 und zwei beliebigen Parallelen zur y-Achse begrenzt wird, nur vom Abstand der beiden Parallelen abhängt.

Gebiet G2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.1

In einem ebenen kartesischen xy-Koordinatensystem sind die Geraden g_1 und g_2 gegeben.

g_1 geht durch den Punkt A(1 | 0) und hat den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$,

g_2 geht durch den Punkt B(9 | 4) und hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Begründen Sie, daß sich g_1 und g_2 schneiden, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes C. [Ergebnis zur Kontrolle: C(0 | 7)]

b) A und B seien Punkte eines Kreises k, dessen Mittelpunkt M auf der Geraden mit der Gleichung y = x liegt.
Ermitteln Sie eine Gleichung für k.
[Ergebnis zur Kontrolle: z.B. $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$]
Untersuchen Sie, ob k der Umkreis des Dreiecks ABC (Punkt C aus Teilaufgabe a) ist.

c) Das bisher benutzte ebene Koordinatensystem wird zu einem räumlichen kartesischen xyz-Koordinatensystem erweitert. In diesem Koordinatensystem ist eine Ebene ε durch ε: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(r, s \in \mathbb{R})$ gegeben.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C und M in diesem Koordinatensystem an.

Der Kreis k (aus Teilaufgabe b) sei der Grundkreis eines geraden Kreiskegels, dessen Spitze S in der Ebene ε liegt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Kegelachse und die Koordinaten des Punktes S.

Gebiet G2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R},$$

sowie die Punkte A(5 | 4 | 2), B(6 | 2 | 4) und C(9 | 28,5 | 23) gegeben.

a) Die Punkte A und B bestimmen die Gerade g_3.
Weisen Sie nach, daß die Geraden g_3 und g_1 echt parallel zueinander sind.

Die Geraden g_1 und g_3 bestimmen die Ebene ε.
Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene auf.

b) Die Gerade g_2 durchstößt die Ebene ε (aus Aufgabe a) im Punkt D.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.
Zeigen Sie, daß der Punkt C auf der Geraden g_2 liegt und die Gerade g_2 senkrecht auf der Ebene ε steht.

Spiegelt man den Punkt C an der Ebene ε, so erhält man den Punkt C'.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C'.

Gebiet G3: Wahrscheinlichkeitsrechnung / Aufgabe 3.1

In einer Urne befinden sich genau 10 Kugeln, davon 6 rote und 3 weiße Kugeln sowie eine schwarze Kugel.

a) Der Urne werden ohne Zurücklegen nacheinander 2 Kugeln zufällig entnommen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: Die Kugeln haben verschiedene Farben.
B: Die zweite gezogene Kugel ist rot.

b) Das gleichzeitige Ziehen von drei Kugeln wird wie folgt als Spiel genutzt:
Der Einsatz beträgt 3 DM. Für jede weiße Kugel unter den gezogenen Kugeln werden 2 DM ausgezahlt. Die Zufallsgröße X beschreibe den Gewinn oder den Verlust bei diesem Spiel.
Ermitteln Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X.
Untersuchen Sie, ob ein Spieler bei diesem Spiel auf lange Sicht mit Gewinn oder mit Verlust zu rechnen hat.

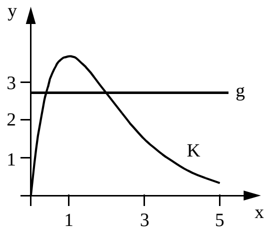
c) Ein Spiel heißt fair, wenn sich auf lange Sicht Gewinn und Verlust ausgleichen.
Untersuchen Sie, in welchem Verhältnis der Einsatz e (in DM) und der Auszahlbetrag a (in DM) bei dem in b) beschriebenen Spiel stehen müssen, damit es als fair gelten kann.

Gebiet G3: Analysis / Aufgabe 3.2

Gegeben sind in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

die Gerade g mit der Gleichung $y = 20 \cdot e^{-2}$ und

der Graph K der Funktion k mit $k(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 5$.



a) Der Graph K besitzt genau einen Wendepunkt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Wendepunktes.

b) Die Gerade g und der Graph K schneiden einander in den Punkten $A(x_A \mid y_A)$ und $B(x_B \mid y_B)$, $x_A < x_B$.
Ermitteln Sie die Schnittstelle x_A durch Anwenden des Newtonschen Näherungsverfahrens auf Hundertstel genau.

c) Auf dem Graphen K existiert genau ein Punkt $P(a \mid k(a))$, $a > 0$, der mit dem Punkt $Q(2a \mid 0)$ und dem Koordinatenursprung O ein gleichschenkliges Dreieck mit maximalem Flächeninhalt bildet.
Weisen Sie nach, daß der Punkt P der Wendepunkt des Graphen K ist.

Gebiet G3: Analytische Geometrie / Aufgabe 3.3

In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine Hyperbel durch die Gleichung
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ gegeben.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel.
Konstruieren Sie mindestens acht Punkte des Hyperbelastes, der im I. und IV. Quadranten liegt.
Zeichnen Sie die Hyperbel im Intervall $4 \leq x \leq 8$.

b) Konstruieren Sie die Tangente t im Hyperbelpunkt $P_0(6 \mid y_0 > 0)$ und begründen Sie Ihr Vorgehen.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangente t in der Normalform einer Geradengleichung und berechnen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels dieser Tangente und der Hyperbelasymptote positiven Anstieges.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Funktionsgleichungen zum Beschreiben der Straßen I, II, III:

I: $y_I = f_I(x) = 4 - \frac{4}{x}$

II: auf der x-Achse, d.h. $y = 0$

III: verläuft durch den Punkt $P(11{,}5 \mid 0)$ mit Steigung $\alpha = 135°$, d.h. $m = -1$

$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow -1 = \frac{y - 0}{x - 11{,}5}$, also $y = -x + 11{,}5$

Schnittwinkel zwischen den Straßen I und II:
Wegen $y_{II} = 0$ ist $m_{II} = 0$, der Schnittwinkel α ist also der Steigungswinkel von y_I im Schnittpunkt mit der x-Achse:

$0 = 4 - \frac{4}{x} \Rightarrow x_{0_I} = 1$

$f_I'(x) = \frac{4}{x^2}$; $f_I'(1) = m_I = 4 \Rightarrow \alpha = 75{,}9°$

Schnittpunkt S der Straßen I und III:

Straße I: $y_I = f_I(x) = 4 - \frac{4}{x}$

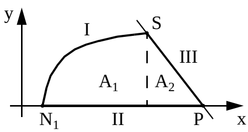
Straße III: $y_{III} = f_{III}(x) = -x + 11{,}5$

$4 - \frac{4}{x} = -x + 11{,}5$, also $0 = -x + 7{,}5 + \frac{4}{x}$ und damit $0 = x^2 - 7{,}5x - 4$

$x_{1,2} = \frac{15}{4} \pm \sqrt{\frac{225}{16} + 4} \Rightarrow x_1 = 8,\ x_2 = -\frac{1}{2}$ (entfällt laut Aufgabenstellung)

$\Rightarrow S(8 \mid f_I(8)) = S(8 \mid 3{,}5)$

b) Flächeninhalt des Gewerbegebietes, begrenzt von den Straßen I, II und III:
$A_{ges} = A_1 + A_2$



$A_1 = \int_{x_{N_I}}^{x_S} y_I \, dx$, wobei $y_I = 4 - 4 \cdot \frac{1}{x}$; $x_S = 8$; $x_{N_I} = 1$

$A_2 = A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$,

wobei $g = x_P - x_S = 11{,}5 - 8 = 3{,}5$; $h = y_S = 3{,}5$ (*).

$A_{ges} = \int_1^8 (4 - 4 \cdot \frac{1}{x})\, dx + \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5 = [4x - 4\ln x]_1^8 + 6{,}125$

$= 32 - 4\ln 8 - 4 + 6{,}125 \approx 25{,}8$

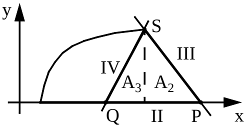
Wegen Maßstab 1 : 100 gilt: $1\ LE^2 \triangleq (100\ m)^2 = 1$ ha.
Also beträgt der Flächeninhalt ca. 25,8 ha.

Verlauf der Straße IV:

Bedingungen: – Gerade durch S(8 | 3,5)

– Fläche, begrenzt durch Straßen II, III und IV, beträgt 10,5 ha

Zu ermitteln ist also ein Punkt $Q(x_Q \mid 0)$, der sowohl auf Straße IV als auch auf Sraße II liegt:



A = 10,5

$A = A_3 + A_2$, wobei $A_2 = 6{,}125$ (siehe (*)) und

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ mit $g = x_S - x_Q$, also

$g = 8 - x_Q$ und $h = y_S = 3{,}5$.

$\Rightarrow 10{,}5 = \frac{1}{2}(8 - x_Q) \cdot 3{,}5 + 6{,}125$, also: $2{,}5 = (8 - x_Q) \Rightarrow x_Q = 5{,}5 \Rightarrow Q(5{,}5 \mid 0)$

Nach der Zweipunkteform gilt: $\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = \frac{y_S - y_Q}{x_S - x_Q}$, also $\frac{y - 0}{x - 5{,}5} = \frac{3{,}5 - 0}{8 - 5{,}5} = 1{,}4$

$\Rightarrow y_{IV} = 1{,}4 \cdot (x - 5{,}5)$, also: $y_{IV} = 1{,}4x - 7{,}7$

c) Kanallänge $|\overline{AB}|$ in Abhängigkeit von $B(x_B \mid f_I(x_B))$:

$A(4 \mid 0)$; $B(x_B \mid 4 - 4 \cdot \frac{1}{x_B})$

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - 4)^2 + \left(4 - 4 \cdot \frac{1}{x_B} - 0\right)^2} = \sqrt{(x_B - 4)^2 + 4^2\left(1 - \frac{1}{x_B}\right)^2}$$

Nachweis, daß für $x_B = 2$ die notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extrempunktes erfüllt ist

$$d'(x_B) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(x_B - 4)^2 + (4 - \frac{4}{x_B})^2}} \left[2(x_B - 4) \cdot 1 + 2(4 - \frac{4}{x_B}) \cdot \frac{4}{x_B^2}\right]$$

$$d'(2) = \frac{2(2 - 4) + 2(4 - \frac{4}{2}) \cdot 1}{2\sqrt{8}} = 0$$

Koordinaten des Anschlußpunktes B und minimale Kanallänge:

B: $x_B = 2$; $y_B = f_I(x_B) = 4 - \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow B(2 \mid 2)$

d: $d(2) = \sqrt{(2 - 4)^2 + \left(4 - \frac{4}{2}\right)^2} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$

Die Kanallänge beträgt etwa 283 m.

Bewertungsvorschlag:

a)	Winkel zwischen Straße I und II	4 BE
	Funktionsgleichung für Straße III; Koordinaten von S	6 BE
b)	Flächeninhalt	9 BE
	Gleichung, die Straße IV beschreibt	7 BE

c)	Gleichung der Funktion d	3 BE
	Nachweis der notwendigen Bedingung	4 BE
	Koordinaten des Punktes B; minimale Kanallänge	2 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Definitonsbereiche für die Funktionen f und g:
Der größte Definitionsbereich für $y = h(z) = \ln z$ ist $DB = \{z\colon z \in \mathbb{R}, z > 0\}$.
Daraus folgt für f und g: $DB_f = DB_g = \{x\colon x \in \mathbb{R}, x < 0\}$.
Monotonie:
Benutzen des Zusammenhangs zwischen Ableitungsfunktion und Monotonie:

$f'(x) = \frac{1}{x} < 0$, da $x < 0 \Rightarrow$ f streng monoton fallend;

$g'(x) = \frac{1}{x} < 0$, da $x < 0 \Rightarrow$ g streng monoton fallend.

Schnittpunkte der Graphen von f und g mit der x-Achse:

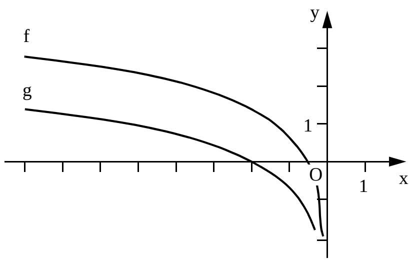
S_1: $0 = \ln(-2x)$, also $1 = -2x$ und damit $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_1(-\frac{1}{2} \mid 0)$;

S_2: $0 = \ln(-\frac{1}{2}x)$, also $1 = -\frac{1}{2}x$ und damit $x = -2 \Rightarrow S_2(-2 \mid 0)$.

Nachweis, daß die Graphen von f und g keinen Schnittpunkt besitzen:
Zu zeigen ist: Die Gleichung $f(x) = g(x)$ besitzt im DB von f und g keine Lösung.

$\ln(-2x) = \ln(-\frac{1}{2}x)$, also $-2x = -\frac{1}{2}x$, woraus $x = 0$ folgt.

Da $0 \notin DB_{f,g}$, haben f und g keinen gemeinsamen Punkt.
Graphen der Funktionen f und g:



b) Lage des Tangentenschnittpunktes:
Tangentengleichung: $(y - y_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$,
wobei $P(x_0 \mid y_0)$ Berührungspunkt und $f'(x_0)$ Anstieg von f im Punkt P.

f: $S_1(-\frac{1}{2}\,|\,0)$; $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(-\frac{1}{2}) = -2$

$\Rightarrow t_f = y - 0 = -2(x - (-\frac{1}{2})) \Rightarrow y = -2x - 1$

g: $S_2(-2\,|\,0)$; $g'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(-2) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow t_g = y - 0 = -\frac{1}{2}(x - (-2)) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$

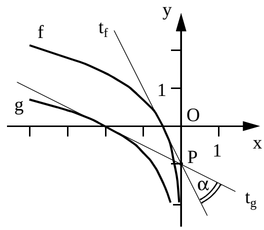
Tangentenschnittpunkt P:

$t_f = t_g$, also $-2x - 1 = -\frac{1}{2}x - 1$ und somit $x_P = 0$; $y_P = -1 \Rightarrow P(0\,|\,-1)$

Wegen $x_P = 0$ liegt P auf der y-Achse.

Schnittwinkel α der Tangenten:

$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$,

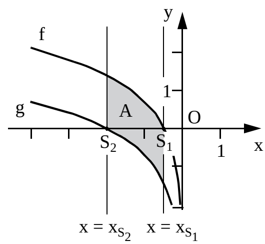


wobei $m_1 = m_{t_f} = -2$ und $m_1 = m_{t_g} = -\frac{1}{2}$

$\tan\alpha = \frac{-2-(-\frac{1}{2})}{1 + (-2)\cdot(-\frac{1}{2})} = -0{,}75 \Rightarrow \alpha = 36{,}9°$

c) Maßzahl des Inhalts einer Fläche:

$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$,



wobei $a = x_{S_2} = -2$ und $b = x_{S_1} = -\frac{1}{2}$

$A = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (\ln(-2x) - \ln(-\frac{1}{2}))\,dx = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{-2x}{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

$= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \ln 4\,dx = [(\ln 4)\cdot x]_{-2}^{-\frac{1}{2}} = \ln 4 \cdot ((-\frac{1}{2}) - (-2x)) \approx 2{,}08$

Nachweis, daß Flächeninhalt nur vom Abstand der Parallelen abhängt:

$A(x) = \left|\int_{x_2}^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx\right|$; $\Delta x = |x_1 - x_2|$

$$A(x) = \left| \int_{x_2}^{x_1} [\ln(-2x) - \ln(-\tfrac{1}{2})]\, dx \right| = \left| \int_{x_2}^{x_1} \ln 4\, dx \right|$$

$$= \left| [(\ln 4) \cdot x]_{x_2}^{x_1} \right| = \ln 4\, |x_1 - x_2| = \ln 4\, |\Delta x|$$

Bewertungsvorschlag:

a)	größte Definitonsbereiche für f und g	6 BE
	Koordinaten von S_1 und S_2	4 BE
	Nachweis, daß G_1 und G_2 keinen gemeinsamen Punkt haben	3 BE
	Zeichnung	4 BE
b)	Nachweis, daß P auf der y-Achse liegt; Schnittwinkel	8 BE
c)	Flächeninhalt	6 BE
	Nachweis	4 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Begründung, daß g_1 und g_2 einander schneiden; Schnittpunkt C:

– Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$ schneiden einander, wenn ihre Richtungsvektoren linear unabhängig voneinder sind:

$\vec{u} \neq k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = 7 \Rightarrow k_1 \neq k_2$

Also sind g_1 und g_2 weder identisch noch parallel zueinander.

– Schnittpunkt C:

$g_1 = g_2$ mit g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und g_2 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(I) $\quad 1 - r = 9 - 3s \qquad \Rightarrow r = -8 + 3s$
(II) $\quad 0 + 7r = 4 + s$

$\Rightarrow 7(-8 + 3s) = 4 + s$, also $-56 - 4 = -21s + s$ und somit $s = 3$, $r = 1$
Einsetzen in g_1 bzw. g_2 ergibt $C(0\,|\,7)$.

b) Kreisgleichung:

Kreisgleichung im $\mathbb{R}^2$ allgemein: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ (*)

mit $M(x_M\,|\,y_M)$; $r = |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$

I) A und M in (*): $(1 - x)^2 + (0 - x)^2 = r^2$ (wegen $y = x$)

II) B und M in (*): $(9 - x)^2 + (4 - x)^2 = r^2$

$\Rightarrow\ (1-x)^2 + (-x)^2 = (9-x)^2 + (4-x)^2$

$1 - 2x + x^2 + x^2 = 81 - 18x + x^2 + 16 - 8x + x^2$

Es folgt $24x = 96$ und damit $x = 4 \Rightarrow x_M = 4 \Rightarrow y_M = 4 \Rightarrow M(4\,|\,4)$.

$r = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2} = 5$

$\Rightarrow k\colon (x-4)^2 + (y-4)^2 = 5^2$

Untersuchung, ob Kreis k Umkreis für ΔABC ist:

Da $A, B \in k$ als Bedingung für k, ist nur noch zu prüfen, ob $C \in k$:

$(0-4)^2 + (7-4)^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$

A, B, C sind also Punkte des Kreises k, d.h., k ist Umkreis für das ΔABC.

c) Koordinaten der Punkte A, B, C und M in einem räumlichen Koordinatensystem $\mathbb{R}^3$:

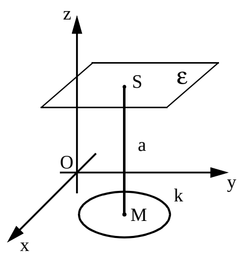
$A(1\,|\,0\,|\,0)$, $B(9\,|\,4\,|\,0)$, $C(0\,|\,7\,|\,0)$, $M(4\,|\,4\,|\,0)$

Gleichung der Kegelachse a; Koordinaten der Kegelspitze S:

Kreis k ist Grundkreis des geraden Kreiskegels; Spitze S liegt in ε.

$$\varepsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Weil k in der xy-Ebene liegt und der Kreiskegel gerade ist, liegt S senkrecht über M; die Kegelachse a läßt sich beschreiben durch



$$a\colon \vec{x} = \overrightarrow{OM} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S(4\,|\,4\,|\,z_S).$$

Wegen $S \in \varepsilon$ folgt

(I) $\quad 4 = -3 + 2r + 3s$

(II) $\quad 4 = -2 + r + 4s \qquad \Rightarrow r = 6 - 4s$

(III) $\quad z_S = 2 + r + 3s$

r in (I) $\quad 4 = -3 + 2(6 - 40) + 3s$

$\quad 4 = -3 + 12 - 80 + 3s \Rightarrow s = 1,\ r = 2$

Einsetzen von r, s in (III) liefert $z_S = 7$, also: $S(4\,|\,4\,|\,7)$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Begründung, daß g_1 und g_2 einander schneiden	
	Berechnung des Schnittpunktes C	4 BE
b)	Gleichung für k	6 BE
	Untersuchung, ob k Umkreis von ΔABC ist	2 BE

c) Koordinaten von A, B, C und M — 1 BE
Ermittlung einer Gleichung für die Kegelachse
Koordinaten des Punktes S — 7 BE
20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) Nachweis der Parallelität der Geraden g_1 und g_3:
– Geradengleichung für die Gerade $g_3(A, B)$:

$$g_3\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}\,;\ \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

– Nachweis der echten Parallelität zwischen g_1 und g_3:

Bedingungen: (1) $\overrightarrow{a_{g_1}} = k\overrightarrow{a_{g_3}}$; (2) $\overrightarrow{OA} \neq \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

zu (1): $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow g_1$ und g_3 sind parallel oder identisch

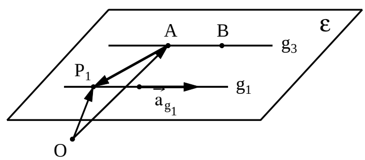
zu (2): Es ergibt sich $r_x = 4$, $r_y = \frac{1}{2}$ und $r_z = 0$, d.h., es gibt kein eindeutig bestimmtes r, also liegt der Punkt A nicht auf g_1. Daraus folgt: g_1 und g_3 sind nicht identisch, d.h., g_1 und g_3 sind echt parallel.

Gleichung einer Ebene ε, die durch g_1 und g_3 bestimmt ist:

$$\varepsilon\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + r\overrightarrow{a_{g_1}} + u(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OA})$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1-5\\5-4\\2-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$$



b) Koordinaten des Durchstoßpunktes:
Bedingungen: $D \in g_2$ und $D \in \varepsilon$
Ebenengleichung in Koordinatenform über den Normalenvektor:

$$\overrightarrow{n_\varepsilon} = \vec{a} \times \vec{b} = \text{mit } \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -8\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{i} - 8\vec{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\varepsilon \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OP_1}) = 0 \text{ für } \varepsilon \text{ in Koordinatenform}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0 \text{ führt zu } 2(x-1) + 8(y-5) + 7(z-2) = 0$$

$\Rightarrow \varepsilon: 2x + 8y + 7z = 56$

Schnittpunkt D zwischen g_2 und ε:

$2(5 + 2s) + 8(12{,}5 + 8s) + 7(9 + 7s) = 56$, also $117 + 117s = 0$ und somit $s = -1$

Einsetzen von $s = -1$ in die Geradengleichung von g_2 ergibt

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D(3\,|\,4{,}5\,|\,2).$$

Weiterer Lösungsweg:

Der Durchstoßpunkt muß den Gleichungen von ε und g_2 genügen:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 12{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ führt zu}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 2v - r + 4s = -4 \\ \text{(II)} & 8v + 2r - s = -7{,}5 \\ \text{(III)} & 7v - 2r = -7 \end{array}$$

mit der Lösung $r = 0$; $s = -0{,}5$ und $v = -1 \Rightarrow S(3\,|\,4{,}5\,|\,2)$.

Nachweis, daß der Punkt C auf g_2 liegt und g_2 senkrecht auf ε steht:

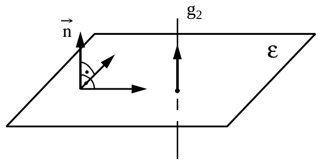
Es gilt $C \in g_2$, wenn s eindeutig bestimmbar ist:

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & 9 = & 5 + s \cdot 2 & \Rightarrow s_x = 2 \\ \text{(II)} & 28{,}5 = & 12{,}5 + s \cdot 8 & \Rightarrow s_y = 2 \\ \text{(III)} & 23 = & 9 + s \cdot 7 & \Rightarrow s_z = 2 \end{array}$$

$\Rightarrow s = 2$, also liegt C auf g_2.

Mit Hilfe des Normalenvektors läßt sich feststellen, ob g_2 senkrecht auf ε steht:

$$\overrightarrow{a_{g_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix};\ \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ (siehe oben)}$$



Wenn $\overrightarrow{a_{g_2}} = k\vec{n}_\varepsilon$, dann gilt: g_2 steht senkrecht auf ε. Nun ist $\overrightarrow{a_{g_2}} = (-1)\vec{n}_\varepsilon$.

Die Gerade g_2 steht also senkrecht auf der Ebene ε.

Koordinaten des Spiegelpunktes C':
Durchstoßpunkt D zwischen g_2 und ε aus vorangegangenem Aufgabenteil:

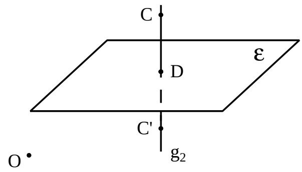
$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CD}$

(oder: $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CD}$)

mit C(9 | 28,5 | 23), D(3 | 4,5 | 2)

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 9 \\ 28{,}5 \\ 23 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3-9 \\ 4{,}5-28{,}5 \\ 2-23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -19{,}5 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ C'(–3 | –19,5 | –19)



Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis, daß g_1 und g_3 echt parallel zueinander	5 BE
	Gleichung der Ebene ε	3 BE
b)	Koordinaten von D;	5 BE
	Nachweis, daß C auf g_2 liegt und g_2 senkrecht auf ε steht	4 BE
	Koordinaten von C'	3 BE
		20 BE

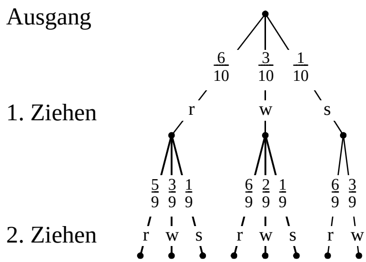
Erwartungsbild zu Aufgabe 3.1

a) Wahrscheinlichkeiten der angegebenen Ereignisse bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen:

Ereignisse:

A: Die Kugeln haben verschieden Farben.

B: Die zweite gezogene Kugel ist rot.



Gemäß der Pfadregel gilt:

$P(A) = 1 - P(r; r) - P(w; w)$

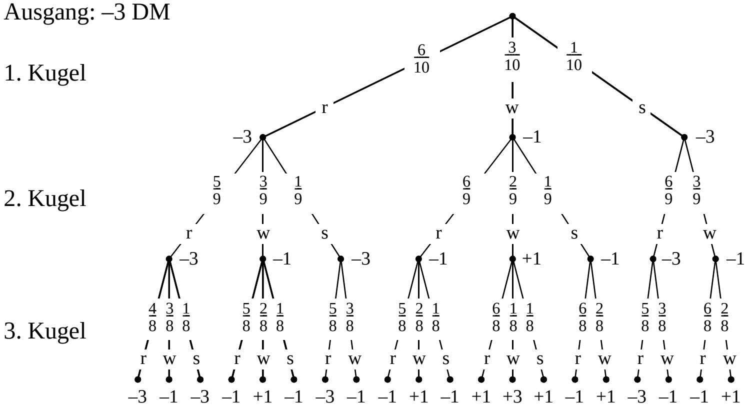
$= 1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} - \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$

$= \frac{90}{90} - \frac{36}{90} = 0{,}6$

$P(B) = P(r; r) + P(w; r) + P(s; r)$

$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{30}{90} + \frac{18}{90} + \frac{6}{90} = 0{,}6$

b) Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X:
Zufallsgröße X: Gewinn oder Verlust bei diesem Spiel
Ausgang: –3 DM



Zufallsgröße X in DM (Gewinn \ Verlust)	–3	–1	+1	+3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{35}{120} \approx 0{,}2917$	$\frac{63}{120} = 0{,}525$	$\frac{21}{120} = 0{,}175$	$\frac{1}{120} \approx 0{,}0083$

wobei nach Pfadregel gilt:

$$P(X=-3) = \frac{1}{10\cdot 9\cdot 8}(6\cdot 5\cdot 4 + 6\cdot 5\cdot 1 + 6\cdot 1\cdot 5 + 1\cdot 6\cdot 5) = \frac{210}{720} \approx 0{,}2917$$

$$P(X=-1) = \frac{1}{10\cdot 9\cdot 8}(6\cdot 5\cdot 3 + 6\cdot 3\cdot 5 + 6\cdot 3\cdot 1 + 6\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 6\cdot 5$$
$$+ 3\cdot 6\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 6 + 1\cdot 6\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 6) = \frac{378}{720} = 0{,}525$$

$$P(X=+1) = \frac{1}{10\cdot 9\cdot 8}(6\cdot 3\cdot 2 + 3\cdot 6\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 6 + 3\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 2)$$
$$= \frac{126}{720} = 0{,}175$$

$$P(X=+3) = \frac{1}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = \frac{6}{720} \approx 0{,}0083$$

Weiterer Lösungsweg: Aus kombinatorischen Überlegungen folgt für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X=-3) = \frac{\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{35}{120}\,;\; P(X=-1) = \frac{\binom{7}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{63}{120}\,;$$

$$P(X=+1) = \frac{\binom{7}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{120}\,;\; P(X=+3) = \frac{\binom{7}{0}\cdot\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}$$

Erwartungswert für die Zufallsvariable X:

Es gilt: $E(X) = \sum P(X = X_i) \cdot X_i$

$= (-3) \cdot P(X = -3) + (-1) \cdot P(X = -1) + (+1) \cdot P(X = +1)$
$+ (+3) \cdot P(X = +3) = -1{,}2$

Auf lange Sicht ist ein Verlust zu erwarten.
Verhältnis von Einsatz e und Auszahlungsbetrag a, damit das Spiel (siehe oben) ausgegleichen ist:
Es müßte gelten: E(X) = 0
X = –3, d.h. kein a, ein e $\Rightarrow X = -e + 0 \cdot a$;
X = –1, d.h. ein a, ein e $\Rightarrow X = -e + a$;
X = +1, d.h zwei a, ein e $\Rightarrow X = -e + 2a$;
X = +3, d.h. drei a, ein e $\Rightarrow X = -e + 3a$.

$E(X) = 0 \Rightarrow 0 = (-e)\frac{210}{720} + (a-e)\frac{378}{720} + (2a-e)\frac{126}{720} + (3a-e)\frac{6}{720}$

Es ergibt sich 0 = –720e + 648a, also 720e = 648 und somit e : a = 9 : 10.

Bewertungsvorschlag:

a)	Wahrscheinlichkeiten für die gegebenen Ereignisse	4 BE
b)	Wahrscheinlichkeitsverteilung für X;	4 BE
	Untersuchung auf Gewinn oder Verlust	2 BE
c)	Verhältnis von a zu e	5 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.2

a) Koordinaten des Wendepunktes:

$k'(x) = 10e^{-x} + 10xe^{-x} \cdot (-1) = 10e^{-x}(1-x)$

$k''(x) = 10e^{-x}(1-x) \cdot (-1) + 10e^{-x} \cdot (-1) = 10e^{-x}(-1 + x - 1) = 10e^{-x}(x-2)$

$k'''(x) = 10e^{-x}(x-2) \cdot (-1) + 10e^{-x} \cdot 1 = 10e^{-x}(-x + 2 + 1) = 10e^{-x}(3-x)$

$0 = 10e^{-x}(x-2) \Rightarrow x_W = 2;\ y_W = k(2) = 20e^{-2};\ k'''(2) = 10e^{-2}(3-2) \neq 0$

$\Rightarrow$ einziger Wendepunkt: $W(2 \mid 20e^{-2})$

b) Schnittstelle x_A zwischen g und dem Graphen von k:

$20e^{-2} = 10xe^{-x}$, also $0 = 10xe^{-x} - 20e^{-2}$

Newton-Verfahren mit Startwert x_1 und Näherungswert x_2:

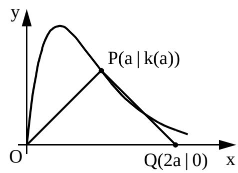
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ mit $f(x) = 10xe^{-x} - 20e^{-2}$ und

$f'(x) = 10e^{-x} + 10xe^{-x} \cdot (-1) = 10e^{-x}(1-x)$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}
0	–2,7067	10	0,27067
0,27067	–0,6418	5,5638	0,3860
0,3860	–0,0826	4,1734	0,4058
0,4058	–0,0021	3,9596	0,40637
0,40637	$-1{,}535 \cdot 10^{-6}$	3,9538	0,40637

Schnittstelle $x_A \approx 0{,}406$ (auf Hundertstel genau)

c) Nachweis der Extremwerteigenschaft:
Bedingung für den Punkt $P(a \mid k(a))$:
$A_{\Delta OPQ}$ ist maximal
Bedingung für den Flächeninhalt von ΔOPQ:



$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \quad \Big| \quad g = \Delta x = x_Q - 0 = 2a$

$h = [\text{Abstand } g(0, Q) \text{ zu } P] = k(a)$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 10 \cdot a \cdot e^{-a} = 10a^2e^{-a}$

A_Δ ist maximal, wenn $A'_\Delta(a) = 0$.

$A'_\Delta(a) = 20a \cdot e^{-a} + 10a^2e^{-a} \cdot (-1) = 10ae^{-a}(2 - a)$

$\Rightarrow A'_\Delta(a) = 0$ für $a = 2$ ($a = 0$ entfällt wegen Bedingung $a > 0$.)

Wegen $x = a = 2 = x_W$ hat das gleichschenklige Dreieck maximalen Flächeninhalt, wenn P der Wendepunkt von K ist.

Bewertungsvorschlag:

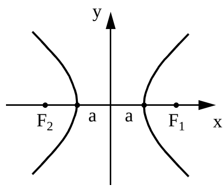
a)	Koordinaten des Wendepunktes	6 BE
b)	Ermittlung der Schnittstelle x_A	5 BE
c)	Nachweis, daß P Wendepunkt des Graphen K ist	4 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.3

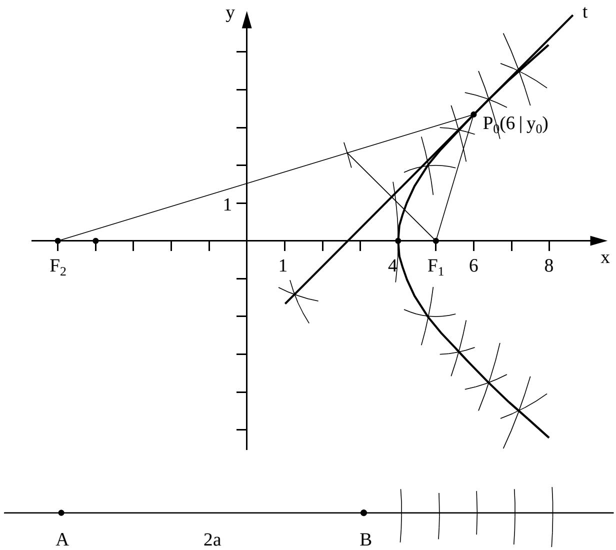
a) Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel:
Für die Brennpunkte $F_2(-e \mid 0)$ und $F_1(e \mid 0)$

einer Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gilt:

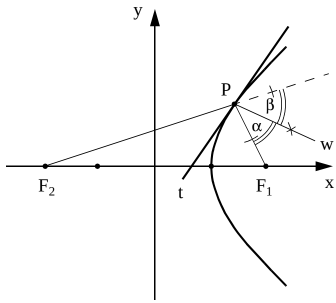
$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \Rightarrow F_2(-5 \mid 0), F_1(5 \mid 0)$



Konstruktion von mindestens 8 Punkten des Hyperbelastes aus dem 1. und 4. Quadranten:



b) Konstruktion der Tangente im Hyperbelpunkt $P_0(6 \mid y_0 > 0)$:
Konstruktion in vorangegangener Zeichnung
Begründung der Vorgehensweise:
Gemäß der Brennpunkteigenschaft einer Hyperbel gilt: Geht ein Lichtstrahl in der Ebene einer Hyperbel durch einen Brennpunkt, so wird er beim Auftreffen auf die Hyperbel so reflektiert, daß die rückwärtige Verlängerung des reflektierten Strahls durch den anderen Brennpunkt verläuft.
Eine dazwischen angelegte Winkelhalbierende ist das Einfallslot für den Lichtstrahl.
Senkrecht dazu verläuft die Tangente.



Gleichung für die Tangente t in der Normalform einer Geradengleichung:
Die Tangente t verläuft durch $P_0(6 \mid y_0)$, $y_0 > 0$. Einsetzen ergibt:

$\frac{6^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1$, also $y_0^2 = 9 \cdot (\frac{36}{16} - 1) = 9 \cdot \frac{20}{16}$ und weiter $y_0 = 3 \cdot \frac{2}{4} \cdot \sqrt{5}$ (einzige Lösung, da $y_0 > 0$) $\Rightarrow P_0(6 \mid \frac{3}{2}\sqrt{5})$

Für eine Hyperbeltangente in Mittelpunktslage gilt:

$\frac{x \cdot x_P}{a^2} - \frac{y \cdot y_P}{b^2} = 1$, also $\frac{6x}{16} - \frac{\frac{3}{2}\sqrt{5}y}{9} = 1$ und somit $54x - 24\sqrt{5}\,y = 144$

$\Rightarrow y = \frac{1}{24 \cdot \sqrt{5}} \cdot 54x - \frac{144}{24\sqrt{5}}$, t: $y = 0{,}45\sqrt{5}\,x - 1{,}2\sqrt{5}$

Gradmaß des Schnittwinkels zwischen Tangente und Hyperbelasymptote:

Hyperbelasymptote allgemein: $y = +\frac{b}{a}x$, konkret: $y = \frac{3}{4}x \Rightarrow m_1 = 0{,}75$

Tangente: $y = 0{,}45\sqrt{5}\,x - 1{,}2\sqrt{5} \Rightarrow m_2 = 0{,}45\sqrt{5}$

Schnittwinkel zweier Geraden:

allgemein: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

konkret: $\tan\alpha = \frac{0{,}75 - 0{,}45\sqrt{5}}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}45 \cdot \sqrt{5}} \approx -0{,}146 \Rightarrow \alpha \approx -8{,}3°$

Der Schnittwinkel zwischen den Geraden beträgt 8,3°.

Bewertungsvorschlag:

a)	Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel	2 BE
	Konstruktion der Punkte	2 BE
	Zeichnung	1 BE
b)	Konstruktion; Begründung für das Vorgehen	4 BE
	Gleichung der Tangente; Schnittwinkel	6 BE
		15 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1995 / 96

Gymnasium

Thüringen

Hinweis: Der Prüfungsteilnehmer wählt von den Aufgaben 1.1 und 1.2 ***eine*** *und von den Aufgaben 2.1 und 2.2 und 2.3* ***zwei*** *zur Bearbeitung aus.*

Aufgabe 1.1

Für jede reelle Zahl t ($t \neq 0$) ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$y = f_t(x) = \frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{t}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot t \cdot x, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Der Graph von f_t werde mit G_t bezeichnet.

a) Es sei $t = -3$.
Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_{-3} mit der x-Achse, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und des Wendepunktes von G_{-3}!

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f_{-3} für $x \to \pm\infty$.

c) Skizzieren Sie G_{-3} im Intervall $-1 \leq x \leq 8$!

d) Der Koordinatenursprung O, der lokale Maximumpunkt und der Wendepunkt des Graphen G_{-3} sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

e) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_{-3} im Punkt $A(4;\, f_{-3}(4))$!
Unter welchem Winkel α schneidet diese Tangente die x-Achse?

f) Der Graph G_{-3} und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

g) Für welche Werte des Parameters t hat der zugehörige Graph G_t im Wendepunkt W den Anstieg $m = -\frac{3}{2}$?
Kontrollergebnis: $W(-\frac{4}{3}t;\, f_t(-\frac{4}{3}t))$

h) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_1 und G_2, und zeigen Sie, daß für jedes t ($t \neq 0$) der Graph G_t durch diese Punkte verläuft!

Aufgabe 1.2

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = x(2 - \ln x), \quad (x \in \mathbb{R};\, x > 0)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte!

b) Berechnen Sie f(1) und f(8), und skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $1 \leq x \leq 8$!

c) Gegeben ist eine Funktion F durch $F(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x$, $(x \in \mathbb{R};\ x > 0)$.
Zeigen Sie, daß F eine Stammfunktion von f ist!

d) Der Graph der Funktion f und die Gerade g, die durch die Punkte M(1; f(1)) und $N(e^2;\ f(e^2))$ verläuft, begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!
(e bezeichnet die Eulersche Zahl.)

e) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f, deren Anstieg $m = -0{,}5$ beträgt!

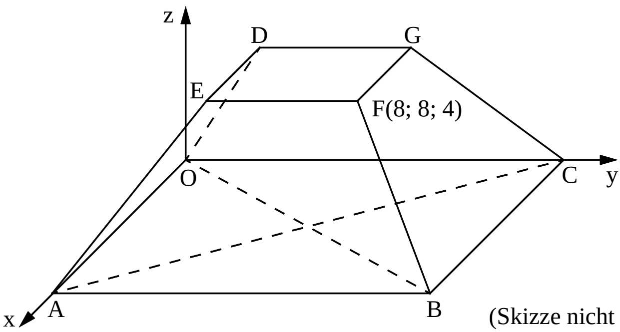
f) Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Gerade g (aus Teilaufgabe d) die Tangente an den Graphen von f im Punkt $N(e^2;\ f(e^2))$ schneidet!

g) Es existiert genau eine quadratische Funktion h mit
$h(x) = -x^2 + bx + c$, $(b, c, x \in \mathbb{R})$, die in H(e; e) einen lokalen Maximumpunkt hat.
Geben Sie die Gleichung dieser quadratischen Funktion an!

h) Für jede reelle Zahl a $(a \neq 0)$ ist eine Funktion f_a durch
$f_a(x) = x(a - \ln x)$, $(x \in \mathbb{R},\ x > 0)$ gegeben.
P(1; a) ist ein Punkt des Graphen der Funktion f_a.
Ermitteln Sie den Parameter a für den Fall, daß die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt P den Anstieg $m = 2$ hat!

Aufgabe 2.1

Gegeben sei ein gerader Pyramidenstumpf, dessen Grund- und Deckfläche Quadrate mit den Seitenlängen 10 Längeneinheiten (LE) und 6 LE sind.
Die Körperhöhe beträgt 4 LE.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Pyramidenstumpfes an (siehe Skizze)!

b) Durch die Punkte A und G verläuft die Gerade g_1 und durch die Punkte C und E die Gerade g_2. Geben Sie je eine Gleichung für g_1 und g_2 an! Berechnen Sie den Schnittpunkt S_1 und den Schnittwinkel der beiden Geraden!

c) Durch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{OA}$ geht die Gerade g_3,

deren Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g_3 an!

Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε an, die die Punkte B, C und F enthält!

Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes S_2 der Geraden g_3 mit der Ebene ε!

d) Auf der Kante $\overline{DE}$ liegen zwei Punkte P_1 und P_2 so, daß die Winkel $\sphericalangle AP_1O$ bzw. $\sphericalangle AP_2O$ rechte Winkel sind.
Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_2!

Aufgabe 2.2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(3; –1; 2), B(11; –5; 10), C(5; 1; 13) und D(–1; 3; 4) gegeben.

a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε an, in der die Punkte A, B und C liegen!

b) Weisen Sie nach, daß das Viereck ABCD ein Trapez ist!

c) Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle BAD$!
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Trapezes ABCD!

d) Bestimmen Sie einen weiteren Punkt E in der Ebene ε so, daß die Punkte A, B, C und E (in dieser Reihenfolge) ein Parallelogramm bilden!
Der Punkt D liegt auf der Strecke $\overline{AE}$.
In welchem Verhältnis teilt der Punkt D die Strecke $\overline{AE}$?

e) Gegeben ist eine Ebene durch die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R}).$$

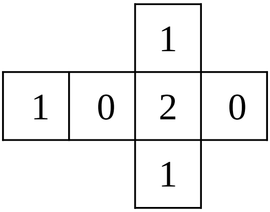
Diese Ebene schneidet die drei Koordinatenachsen in den Punkten
$S_1(x_1; 0; 0)$, $S_2(0; \frac{5}{6}; 0)$ und $S_3(0; 0; -\frac{5}{2})$.

Berechnen Sie die Koordinate x_1 des Punktes S_1!

Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide $OS_1S_2S_3$ (O bezeichnet den Koordinatenursprung)!

Aufgabe 2.3

Betrachtet wird ein idealer Würfel mit folgendem Würfelnetz:



Ein Versuch besteht aus einmaligem Würfeln. Die oben liegende Zahl gilt als gewürfelt. Die Zahlen 1 und 2 gelten als Treffer, die Zahl 0 als Niete.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A := „Bei fünf Versuchen gibt es genau zwei oder drei Treffer."
B := „Bei fünf Versuchen gibt es mindestens einen und höchstens vier Treffer."
C := „Beim fünften Versuch erhält man den zweiten Treffer."

b) Wie oft muß mindestens gewürfelt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens einmal die Zahl 1 auftritt?

Es wird folgendes Gewinnspiel vereinbart. Zuerst wird mit obigem Würfel gewürfelt und anschließend wird mit einer beschädigten 5 DM Münze geworfen. Bei dieser Münze fällt Wappen mit einer Wahrscheinlichkeit w.

Als Treffer gelten die Zahlen 1 oder 2 des Würfels zusammen mit der Zahl 5 der Münze. In diesen Fällen wird als Gewinn die Differenz zwischen zweiter und erster Zahl ausgezahlt. Der Einsatz beträgt für jedes Spiel 1 DM.

c) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und geben Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Versuchsausgänge an!
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit z müßte die Zahl 5 fallen, damit das Spiel auf lange Sicht fair ist?

Mit obigem Würfel wird zweimal hintereinander gewürfelt. Der erste Wurf liefert die Zahl b und der zweite Wurf die Zahl c als Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 + bx + c = 0$.

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p ergeben sich quadratische Gleichungen mit mindestens einer (reellen) Lösung?

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Schnittpunkte von G_{-3} mit der x-Achse:

$f_{-3}(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x = \frac{1}{8}x(x^2 - 12x + 36) = \frac{1}{8}x(x-6)^2$

$f_{-3}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0;\ x_2 = 6, \quad$ also $\quad P_1(0;\ 0);\ P_2(6;\ 0)$

Lokale Extrempunkte:

$f_{-3}'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}; \quad f_{-3}''(x) = \frac{3}{4}x - 3$

$f_{-3}'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6;\ x_2 = 2$

$f_{-3}''(6) = 1{,}5 \ > 0 \quad \Rightarrow$ lokale Minimumstelle: $f_{-3}(6) = 0$, also $P_{min}(6;\ 0)$

$f_{-3}''(2) = -1{,}5 \ < 0 \quad \Rightarrow$ lokale Maximumstelle: $f_{-3}(2) = 4$, also $P_{max}(2;\ 4)$

Wendepunkte:

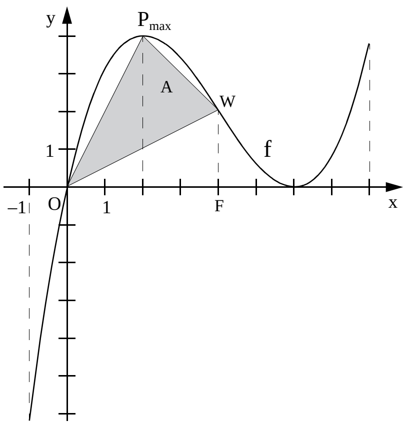
$f_{-3}'''(x) = \frac{3}{4}; \quad f_{-3}''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

$f_{-3}'''(4) = \frac{3}{4} \neq 0 \quad \Rightarrow$ Wendestelle: $f_{-3}(4) = 2$, also $W(4;\ 2)$

b) Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_{-3}(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{2x} + \frac{9}{2x^2}\right) = \pm\infty \cdot \frac{1}{8} = \pm\infty$$

c)



d) $|\overline{OP}_{max}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

$|\overline{OW}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$\sphericalangle WOP_{max} = \sphericalangle FOP_{max} - \sphericalangle FOW$

$\approx 63{,}43° - 26{,}57°$

$= 36{,}86°$

$A = \frac{1}{2}\,|\overline{OP}_{max}| \cdot |\overline{OW}| \cdot \sin\sphericalangle WOP_{max}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{20}\,\sqrt{20} \cdot \sin 36{,}86°$

≈ 6 (FE)

e) Gleichung der Tangente: t: $y = mx + n$

$A(4;\,2)$; $m = f_{-3}'(4) = -1{,}5$;

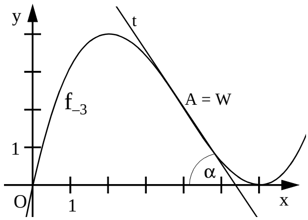
$2 = -1{,}5 \cdot 4 + n$ also $n = 8$;

t: $y = -1{,}5x + 8$

Schnittwinkel α:

$\tan\alpha_0 = -1{,}5 \;\Rightarrow\; \alpha_0 \approx 123{,}7°$

$\alpha = 180° - \alpha_0 \approx 56{,}3°$



f) Inhalt der eingeschlossenen Fläche:

$$A = \int_0^6 f_{-3}(x)\,dx = \int_0^6 \left(\tfrac{1}{8}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{2}x\right)dx = \left[\tfrac{1}{32}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{9}{4}x^2\right]_0^6 \approx 13{,}5 \text{ (FE)}$$

g) $f_t'(x) = \frac{3}{8}x^2 + tx - \frac{3}{2}t$; $f_t''(x) = \frac{3}{4}x + t$; $f_t'''(x) = \frac{3}{4}$

Wendepunkt: $f_t''(x) = 0$, also $\frac{3}{4}x + t = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{4}{3}t$

$f_t'''(-\frac{4}{3}t) = \frac{3}{4} \neq 0 \;\Rightarrow\; W(-\frac{4}{3}t;\, f_t(-\frac{4}{3}t))$

$m = -\frac{3}{2} = f_t'(-\frac{4}{3}t) = \frac{3}{8}(-\frac{4}{3}t)^2 + t(-\frac{4}{3}t) - \frac{3}{2}t$

Damit muß gelten: $0 = t^2 + \frac{9}{4}t - \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{3}{4}$; $t_2 = -3$

h) Schnittpunkte von G_1 und G_2:

$f_1(x) = f_2(x)$, also $\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{8}x^3 + x^2 - 3x \;\Rightarrow\; 0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

$x_1 = 0$; $x_2 = 3 \;\Rightarrow\; S_1(0;\,0)$; $S_2(3;\,3{,}375)$

allgemeiner Nachweis ($t \neq 0$):

$f_t(0) = 0$, also: $S_1(0;\,0) \in G_t$; $f_t(3) = 3{,}375$, also: $S_2(3;\,3{,}375) \in G_t$

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x) = 0 = x(2 - \ln x) \;\Rightarrow\; x_1 = 0$ (entfällt, da $x > 0$); $x_2 = e^2 \Rightarrow P_x(e^2 \approx 7{,}39;\, 0)$

Lokale Extrempunkte:

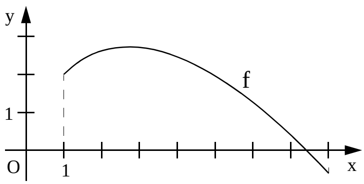
$f'(x) = 1 - \ln x$; $f''(x) = -\frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 1 \;\Rightarrow\; x = e$;

$f''(e) = -\frac{1}{e} < 0 \;\Rightarrow$ lokale Maximumstelle: $f(e) = e$, also $P_{max}(e;\, e)$

Wendepunkte:

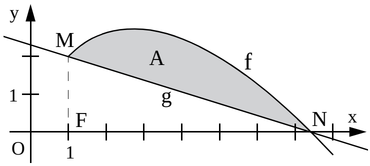
$f''(x) \neq 0$ für alle $x \in$ Db, also gibt es keine Wendepunkte.

b) 

$f(1) = 2;$
$f(8) \approx -0{,}64$

c) Nachweis der Stammfunktion:
Es muß gelten: $F'(x) = f(x)$
$F'(x) = (\frac{5}{4}x^2 - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x)' = \frac{5}{2}x - (x \cdot \ln x + \frac{x^2}{2x}) = 2x - x\ln x = x(2 - \ln x) = f(x)$

d) Inhalt der eingeschlossenen Fläche:



$A = \int_1^{e^2} f(x)\,dx - A_{\Delta FNM}$

$A_{\Delta FNM} = \frac{1}{2}\,|\overline{FN}| \cdot |\overline{FM}|$
$= \frac{1}{2}(e^2 - 1) \cdot 2 = e^2 - 1$

$A = [\frac{5}{4}x^2 - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x]_1^{e^2} - (e^2 - 1) = \frac{1}{4}e^4 - \frac{5}{4} - e^2 + 1 \approx 6{,}01$ (FE)

e) Gleichung der Tangente: t: $y = mx + n$
$m = -0{,}5 = f'(x_t) \quad \Rightarrow \quad 1 - \ln x_t = -0{,}5, \quad$ also $\quad x_t = e^{1,5}$
$f(e^{1,5}) = 0{,}5 \cdot e^{1,5} \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 \cdot e^{1,5} = -0{,}5 \cdot e^{1,5} + n, \quad$ also $\quad n = e^{1,5} \approx 4{,}48$
t: $y = -0{,}5x + e^{1,5}$ (bzw. $y \approx -0{,}5x + 4{,}48$)

f) Schnittwinkel α_1 der Geraden g und der x-Achse:
$\tan\alpha_1 = m_g = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{2}{e^2 - 1} \qquad \Rightarrow \quad \alpha_1 \approx 17{,}38°$
Schnittwinkel α_2 der Tangente t und der x-Achse:
$\tan\alpha_2 = m_t = f'(x_t) = 1 - \ln e^2 = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \Rightarrow \quad \alpha_2 = 135°$
Schnittwinkel α der Gerade g und der Tangente t:
$\alpha = 180° - \alpha_1 - \alpha_2 \approx 27{,}62°$

g) Quadratische Funktion:
$h'(e) = 0$: $\qquad 0 = -2e + b \qquad \Rightarrow \quad b = 2e$
$H(e; e) \in h$: $\qquad e = -e^2 + e \cdot b + c \qquad \Rightarrow \quad c = e - e^2$
$h(x) = -x^2 + 2ex + e - e^2$

h) Parameter a: $f_a'(x) = a - \ln x + x \cdot (-\frac{1}{x}) = a - \ln x - 1$
$m = 2 = f_a'(1) = a - \ln 1 - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 3$

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Koordinaten der Eckpunkte:
$A(10; 0; 0)$; $B(10; 10; 0)$; $C(0; 10; 0)$; $O(0; 0; 0)$;
$E(8; 2; 4)$; $G(2; 8; 4)$; $D(2; 2; 4)$

b) Geradengleichungen:

$$g_1:\quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (r \in \mathbb{R})$$

$$g_2:\quad \vec{x} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Schnittpunkt S_1:

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 10 - 8r & = 8s \\ \text{(II)} & 8r & = 10 - 8s \\ \text{(III)} & 4r & = 4s \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad r = s = \tfrac{5}{8} \quad \text{und damit} \quad S_1(5; 5; \tfrac{5}{2})$$

Schnittwinkel $\alpha = \sphericalangle(g_1, g_2)$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE}\right|}{\left|\overrightarrow{AG}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CE}\right|} = \frac{112}{144} = 0{,}\overline{7} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 38{,}9°$$

c) $M(5; 0; 0)$

$$g_3:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$$\varepsilon:\quad \vec{x} = \overrightarrow{OB} + u \cdot \overrightarrow{BC} + v\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

Durchstoßpunkt:

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 5 + t & = 10 - 10u - 2v \\ \text{(II)} & 2t & = 10 \qquad -2v \\ \text{(III)} & t & = \qquad\qquad 4v \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \Rightarrow v = 1;\ t = 4;\ u = -\tfrac{1}{10} \\ \text{und damit} \quad S_2(9; 8; 4) \end{array}$$

d) Koordinaten von P_1 und P_2:
$P_{1/2}(x_{1/2}; 2; 4)$ mit $2 \le x_{1/2} \le 8$ (da $P_{1/2} \in \overline{DE}$)

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = 0 \quad (\text{da} \sphericalangle APO = 90°) \quad \Rightarrow \quad 0 = \begin{pmatrix} 10 - x \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = x^2 - 10x + 20$$

$x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{5}$, also $P_1(5 + \sqrt{5} \approx 7{,}24; 2; 4)$; $P_2(5 - \sqrt{5} \approx 2{,}76; 2; 4)$

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) ε: $\quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \quad (u, v \in \mathbb{R})$

b) Nachweis, daß ABCD ein Trapez ist:

$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$, da $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$ ABCD ist ein Trapez.

c) Winkel $\sphericalangle$BAD:

$\cos\sphericalangle BAD = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} \approx -0{,}444 \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BAD \approx 116{,}4°$

Inhalt der Trapezfläche:

$A = A_{ABD} + A_{BCD} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \sin\gamma$

$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot \sin 116{,}4° + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 11 \cdot \sin 102{,}2° \approx 80{,}6$ (FE)

d) Parallelogramm ABCE:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - x_E \\ 1 - y_E \\ 13 - z_E \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(-3; 5; 5)$

Teilungsverhältnis:

$|\overrightarrow{AD}| : |\overrightarrow{DE}| = 6 : 3 = 2 : 1$

e) Koordinate x_1:

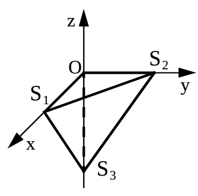
$S_1(x_1; 0; 0) \in \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & x_1 = 3 + 2r + 2s \\ \text{(II)} & 0 = -1 - r + 2s \\ \text{(III)} & 0 = 2 + 2r + 11s \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} s = 0;\ r = -1; \\ x_1 = 1 \end{array}$$

Volumen der Pyramide $OS_1S_2S_3$:

$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OS_1}| \cdot |\overrightarrow{OS_2}| \cdot |\overrightarrow{OS_3}|$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{72} \approx 0{,}35$ (VE)



Erwartungsbild zu Aufgabe 2.3

a) Ereigniswahrscheinlichkeiten: $X \triangleq$ Anzahl der Treffer

$P(\text{Treffer}) = \frac{2}{3}$; $P(\text{Niete}) = \frac{1}{3}$; $n = 5$

$P(A) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \approx 0{,}4938$

$P(B) = P(1 \le X \le 4) = 1 - P(X = 0) - P(X = 5)$

$= 1 - \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \approx 0{,}8642$

C bedeutet: 1 Treffer bei den Würfen 1 bis 4 und 1 Treffer beim 5. Wurf. Beide Ereignisse sind unabhängig:

$P(C) = \left[\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3\right] \cdot \frac{2}{3} \approx 0{,}0658$

b) $Y \triangleq$ Anzahl der Einsen; P(„1") = 0,5; n – Anzahl der Würfe

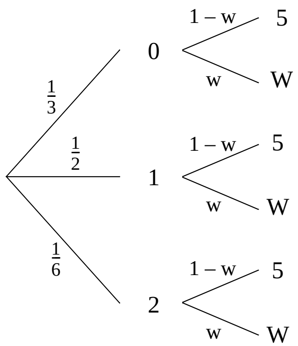
$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}5^n \cdot 0{,}5^0 = 1 - 0{,}5^n$

$P(Y \ge 1) > 0{,}9$, also $1 - 0{,}5^n > 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad 0{,}1 > 0{,}5^n$

$\Rightarrow \ln 0{,}1 > n \cdot \ln 0{,}5$ und damit (wegen $\ln 0{,}5 < 0$) $\quad n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}5} \approx 3{,}32$

Es muß also mindestens 4mal gewürfelt werden.

c) Baumdiagramm:



e_i	$P(e_i)$
(0, 5)	$\frac{1}{3} \cdot (1 - w)$
(0, W)	$\frac{1}{3} \cdot w$
(1, 5)	$\frac{1}{2} \cdot (1 - w)$
(1, W)	$\frac{1}{2} \cdot w$
(2, 5)	$\frac{1}{6} \cdot (1 - w)$
(2, W)	$\frac{1}{6} \cdot w$

d) Faires Spiel, d. h., $E(X) = 0$: $X \triangleq$ Gewinnhöhe

$P(\text{Treffer}) = \frac{1}{2}(1 - w) + \frac{1}{6}(1 - w) = \frac{2}{3}(1 - w)$; $P(\text{Niete}) = 1 - P(\text{Treffer}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}w$

x_i	-1	3	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}w$	$\frac{1}{2}(1-w)$	$\frac{1}{6}(1-w)$

$E(X) = -1 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}w) + 3 \cdot \frac{1}{2}(1-w) + 2 \cdot \frac{1}{6}(1-w) = \frac{9}{6} - \frac{15}{6}w$

$E(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0{,}6; \quad z = P(\text{Münze zeigt 5}) = 1 - w = 0{,}4$

e) Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + bx + c = 0; \quad D = \frac{b^2}{4} - c \geq 0$

b	c	D	Bedingung erfüllt
0	**0**	0	**ja**
0	1	-1	nein
0	2	-2	nein
1	**0**	$\frac{1}{4}$	**ja**
1	1	$-\frac{3}{4}$	nein
1	2	$-\frac{7}{4}$	nein
2	**0**	1	**ja**
2	**1**	0	**ja**
2	2	-1	nein

$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}41\overline{6}$

Bewertungsvorschlag

Aufgabe	Teilaufgabe								Summe
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	
1.1	9	2	2	3	4	3	4	3	30
1.2	7	2	2	4	4	4	4	3	30
2.1	2	6	4	3					15
2.2	1	2	5	4	3				15
2.3	5	2	3	2	3				15

Abiturprüfung
Grundkurs

1996 / 97

Gymnasium

Thüringen

Hinweis: Der Prüfungsteilnehmer wählt von den Aufgaben 1.1 und 1.2 ***eine*** *und von den Aufgaben 2.1 und 2.2 und 2.3* ***zwei*** *zur Bearbeitung aus.*

Aufgabe 1.1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$ $(x \in \mathbb{R};\ x \neq 2)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, lokale Extrempunkte und Wendepunkte!
Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte!
Ermitteln Sie die Polstelle der Funktion f!

b) Berechnen Sie f(–2) und f(6)!
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-2 \leq x \leq 6$!

c) Geben Sie den Wertebereich der Funktion f an!

d) Gegeben ist die Funktion F durch $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln(x - 2)$ $(x > 2)$.
Zeigen Sie, daß F eine Stammfunktion von f für $x > 2$ ist!
Der Graph der Funktion f und die Geraden mit den Gleichungen $x = 3$, $x = 5$ und $y = -2$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

e) Gegeben ist die lineare Funktion g durch $g(x) = \frac{8}{9}x + \frac{1}{2}$.
Berechnen Sie diejenige Stelle x $(x > 2)$, für die die Differenz $d(x) = f(x) - g(x)$ minimal wird!
Berechnen Sie die minimale Differenz!

f) Für jedes a ist eine Gerade h_a durch $y = h_a(x) = \frac{3}{4}x + a$ $(a \in \mathbb{R})$ gegeben.
Für welche a ist die Gerade h_a Tangente an den Graphen von f?

Aufgabe 1.2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-0{,}5x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, daß der Graph der Funktion f zur y-Achse symmetrisch ist!
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte!
Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte!

b) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-3 \leq x \leq 3$!
(Koordinateneinheiten: x-Achse: 1 cm; y-Achse: 5 cm)

c) Die Punkte P(–1; f(–1)), Q(1; f(1)) und R(0; f(0)) bilden ein gleichschenkliges Dreieck.
Berechnen Sie das Volumen des Kegels, der bei Rotation des Dreiecks ΔPQR um die y-Achse entsteht!

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt Q(1; f(1))!
Unter welchem Winkel α schneidet diese Tangente die x-Achse?

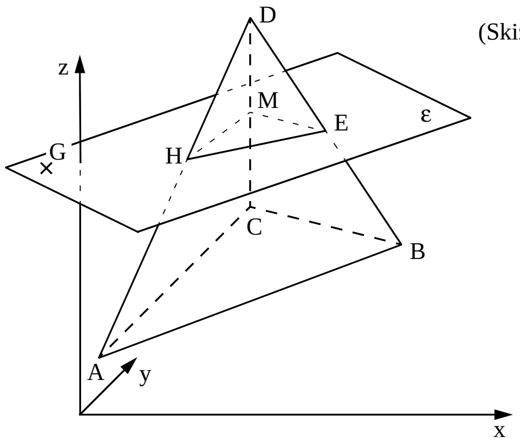
e) Die Punkte Q(1; f(1)), R(0; f(0)) und ein Punkt S auf der x-Achse bestimmen ein Dreieck.
Bilden Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{SQ}$ und $\overrightarrow{SR}$!
Für welche Koordinaten des Punktes S wird das Skalarprodukt minimal?

f) Es gibt eine quadratische Funktion q mit $q(x) = ax^2 + c \quad (a \neq 0;\, a, c \in \mathbb{R})$ so, daß die Parabel den Graphen von f in seinen Wendepunkten berührt, d. h., die beiden Graphen haben an diesen Stellen je eine gemeinsame Tangente.
Berechnen Sie die Koeffizienten a und c!

g) Für welche reelle Zahl r ist die Gleichung $r \cdot f'(x) + x \cdot f''(x) + f'''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt?

Aufgabe 2.1

Die Punkte A(3; 1; 1), B(9; 7; 1), C(3; 7; 1) und D(3; 7; 7) sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide (siehe Skizze):



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Weisen Sie nach, daß die Seitenkanten $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ und $\overline{DC}$ gleich lang und paarweise orthogonal sind!
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCD!

b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Seitenkante $\overline{DC}$!
Zeigen Sie, daß der Punkt E(7; 7; 3) auf der Seitenkante $\overline{BD}$ liegt!

c) Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε an, die durch die Punkte E, M und G(–1; 3; 4) verläuft!

d) Die Seitenkante $\overline{AD}$ wird von ε im Punkt H geschnitten.
Berechnen Sie die Koordinaten von H.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur ΔHEM!

Aufgabe 2.2

Gegeben sind die Punkte A(1; 6; –5), B(7; 9; 1) und $C_t(t; 7; -t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ sowie ein Vekor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$.

a) C_4 sei der Punkt C_t für t = 4.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D so, daß die Punkte A, B, C_4, D in dieser Reihenfolge ein Parallelogramm bilden!
Ermitteln Sie den Inhalt der Parallelogrammfläche!

b) Zeigen Sie, daß der Punkt C_3 auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt!
In welchem Verhältnis teilt der Punkt C_3 die Strecke $\overline{AB}$?

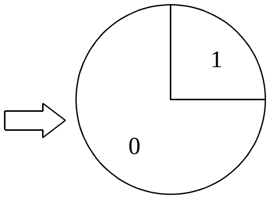
c) Die Gerade g ist gegeben durch den Punkt C_2 und den Richtungsvektor $\vec{a}$. Eine Gerade h verläuft durch die Punkte C_0 und C_{-1}.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und h!

d) Die Ebene ε enthält die Punkte A, B und C_1.
Untersuchen Sie die Lage der Geraden g (aus Teilaufgabe c) bezüglich der Ebene ε!

e) Für welche Werte t ($t \neq 3$) besitzt das Dreieck ΔABC_t bei C_t einen rechten Winkel?

Aufgabe 2.3

Beim Drehen eines Glücksrades treten die Ziffern 0 und 1 mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{4}$ auf.



1. Das Glücksrad wird dreimal gedreht.

   a) Geben Sie die Ergebnismenge und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten unter Verwendung eines Baumdiagramms an!

   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse!
   A := „Die Null tritt mehr als einmal auf."
   B := „Jede der beiden Ziffern 0 und 1 tritt mindestens einmal auf."
   C := „Es treten genau 2 Einsen, und zwar hintereinander, auf."
   D := „Die erste oder die dritte Ziffer ist eine 1."

2. Wie oft muß das Glücksrad mindestens gedreht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal die Ziffer 1 erscheint?

3. Spieler I und II vereinbaren folgendes Spiel: Jeder dreht das Glücksrad einmal. Ist die Summe beider Ziffern ungerade, gewinnt der Spieler II vom Spieler I die Ziffernsumme in DM, andernfalls zahlt der Spieler II an den Spieler I die Ziffernsumme in DM.

   a) Bestimmen Sie die Gewinnerwartung für Spieler II in drei Spielen!

   Spieler II verwendet nun ein anderes Glücksrad, bei dem die Ziffer 1 mit der Wahrscheinlichkeit p und die Ziffer 0 mit der Wahrscheinlichkeit (1 – p) erdreht werden.

   b) Der Spieler I verwendet weiterhin das ursprüngliche Glücksrad.
   Zeigen Sie, daß für beliebige Wahl von p das Spiel für den Spieler II günstig ist!

   c) Für welches p wird das Spiel fair, wenn der Spieler I nun ebenfalls das andere Glücksrad benutzt?

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$0 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 1$, also $P_x(1; 0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = -\frac{1}{2}$, also $P_y(0; -\frac{1}{2})$

Lokale Extrempunkte:

$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3; x_2 = 1$

$f''(3) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ lokale Minimumstelle: $f(3) = 4$, also $P_{min}(3; 4)$

$f''(1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ lokale Maximumstelle: $f(1) = 0$, also $P_{max}(1; 0)$

Wendepunkte:

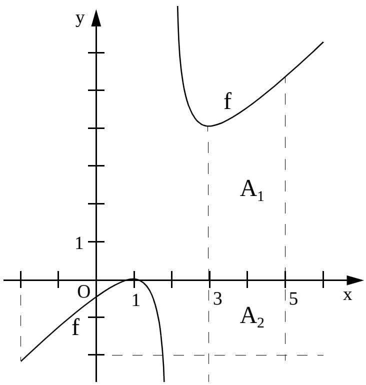
$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$ für alle $x \in Db \quad \Rightarrow$ Es existieren keine Wendepunkte.

Polstelle:

$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_p = 2$ (da 2 keine Nullstelle der Zählerfunktion)

b) Funktionswerte und Skizze:

$f(-2) = -2{,}25$; $f(6) = 6{,}25$



c) Wertebereich:

$W_f = \{y \mid y \in \mathbb{R} \setminus]0; 4[\}$

d) Nachweis der Stammfunktion:

Es muß gelten: $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = x + \frac{1}{x-2} = \frac{x \cdot (x-2) + 1}{x-2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1}{x-2} = f(x)$$

Inhalt der Fläche:

$A = A_1 + A_2$; $A_2 = 4$

$$A_1 = \int_3^5 f(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln(x-2)\right]_3^5 = 8 + \ln 3$$

$A = 8 + \ln 3 + 4 = (12 + \ln 3)$ (FE)

$\approx 13{,}1$ (FE)

e) Minimale Differenz:

$d(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} - \frac{8}{9}x - \frac{1}{2}$; $d'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} - \frac{8}{9}$; $d''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$

$d'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5; x_2 = -1$ (entfällt, da $x > 2$)

$d''(5) = \frac{2}{27} > 0 \Rightarrow$ lokale Minimumstelle: $d(5) = 0{,}3\overline{8}$

f) Parameter a:

$h_a = \frac{3}{4}x + a \Rightarrow m = \frac{3}{4}$

$f'(x) = m$, also $\frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 4$ (Berührungsstellen)

$h_a(0) = f(0) \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$; $h_a(4) = f(4) \Rightarrow a_2 = 1{,}5$

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Symmetrie zur y-Achse:

$f(x) = f(-x)$, also $e^{-0{,}5x^2} = e^{-0{,}5(-x)^2} \Leftrightarrow e^{-0{,}5x^2} = e^{-0{,}5x^2}$ (wahre Aussage)

Damit ist f symmetrisch zur y-Achse.

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x) = e^{-0{,}5x^2} \neq 0$ für alle $x \in Db \Rightarrow$ Es existieren keine Schnittpunkte.

Schnittpunkte mit der y-Achse:

$f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0; 1)$

Lokale Extrempunkte:

$f'(x) = -x \cdot e^{-0{,}5x^2}$; $f''(x) = (x^2 - 1)\, e^{-0{,}5x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ lokale Maximumstelle; $f(0) = 1$, also $P_{max}(0; 1)$

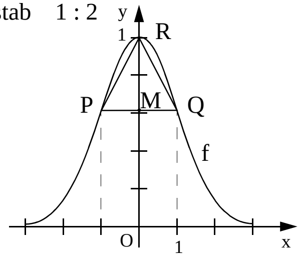
Wendepunkte:

$f'''(x) = (3x - x^3)e^{-0{,}5x^2}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$

$f'''(1) = \frac{2}{e^{0{,}5}} \neq 0$; $f'''(-1) = \frac{-2}{e^{0{,}5}} \neq 0 \Rightarrow W_1(1; \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}61)$; $W_2(-1; \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}61)$

b) Maßstab 1 : 2



c) $V_{Kegel} = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$

$r = |\overline{MQ}| = 1$ (LE);

$h = |\overline{RM}| = 1 - f(1)$

$= (1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$ (LE)

$V_{Kegel} = \frac{\pi}{3} \cdot 1^2 \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$

$\approx 0{,}412$ (VE)

d) Gleichung der Tangente: t: $y = mx + n$

$m = f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$; $Q(1; \frac{1}{\sqrt{e}}) \in t$

$\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 1 + n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 0{,}61,$ also t: $y = -\frac{1}{\sqrt{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$

Schnittwinkel α:

$\tan\alpha = m = -\frac{1}{\sqrt{e}} \approx -0{,}61 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 31{,}24°$

e) Minimales Skalarprodukt:

$\overrightarrow{SQ} = \begin{pmatrix} 1-x \\ \frac{1}{\sqrt{e}} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{SR} = x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{e}}; \quad (\overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{SR})' = 2x - 1$

$2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

$(\overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{SR})'' = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ lokale Minimumstelle $S(\frac{1}{2}; 0)$

f) Koeffizienten der quadratischen Funktion:
q und f haben in W_1 und W_2 gemeinsame Tangenten.

$\Rightarrow \quad q'(x_W) = f'(x_W),$ also $a = -\frac{1}{2} \cdot e^{-0{,}5x_W^2}$

$W_1(1; \frac{1}{\sqrt{e}}) \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{2\sqrt{e}}; \quad W_2(-1; \frac{1}{\sqrt{e}}) \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$

also: $a_1 = a_2 = a = -\frac{1}{2\sqrt{e}} \approx -0{,}30$

$q(1) = -\frac{1}{2\sqrt{e}} + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{3}{2\sqrt{e}}; \quad q(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{e}} + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{3}{2\sqrt{e}}$

also: $c_1 = c_2 = c = \frac{3}{2\sqrt{e}} \approx 0{,}91$

g) reelle Zahl r:
$0 = r \cdot (-x \cdot e^{-0{,}5x^2}) + x \cdot (e^{-0{,}5x^2}(x^2 - 1)) + e^{-0{,}5x^2}(3x - x^3)$
Es folgt: $0 = 2x - xr = x(2 - r)$ und damit $r = 2$.

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Nachweis der gleichen Länge der Seitenkanten:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DC}| = 6\ (\text{LE}) \quad \Rightarrow \quad |\overline{AC}| = |\overline{BC}| = |\overline{DC}| = 6\ (\text{LE})$$

Orthogonalität:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DC}$$

Volumen der Pyramide:

$$V = \tfrac{1}{3} A_G \cdot h = \tfrac{1}{3} A_{\Delta ABC} \cdot |\overline{DC}| = \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}|) \cdot |\overline{DC}|$$

(da $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ und $\overline{DC} \perp \Delta ABC$)

$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{6} \cdot 6^3 = 36\ (\text{VE})$

b) Mittelpunkt M:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad M(3; 7; 4).$$

Nachweis, daß E(7; 7; 3) auf $\overline{BD}$ liegt:

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + r\,\overrightarrow{BD}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{d. h.,}$$

(I)	$9 - 6r = 7$	wahre Aussage für $r = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ E liegt auf g_{BD};
(II)	$7 = 7$	$0 < r < 1$ $\Rightarrow$ E liegt zwischen B und D;
(III)	$1 + 6r = 3$	Also liegt E auf der Seitenkante $\overline{BD}$.

c) Ebenengleichung:

$$\varepsilon_{EHG}:\ \vec{x} = \overrightarrow{OE} + u\,\overrightarrow{EM} + v\,\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

d) Koordinaten des Punktes H:

g_{AD}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $(w \in \mathbb{R})$

$g_{AD} \cap \varepsilon_{EHG}$:

$$\left.\begin{array}{llcl} \text{(I)} & 3 & = & 7 - 4u - 8v \\ \text{(II)} & 1 + 6w & = & 7 - 4v \\ \text{(III)} & 1 + 6w & = & 3 + u + v \end{array}\right| \Rightarrow \quad v = 1;\ u = -1;\ w = \tfrac{1}{3}$$

und damit H(3; 3; 3)

e) Flächeninhalt der Schnittfigur ΔHEM:

$\overrightarrow{HE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{HE}| = \sqrt{32}$ (LE); $|\overrightarrow{HM}| = \sqrt{17}$ (LE)

$\cos\sphericalangle EHM = \dfrac{\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HM}}{|\overrightarrow{HE}| \cdot |\overrightarrow{HM}|} = \dfrac{16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{17}} \approx 0{,}686 \Rightarrow \sphericalangle EHM \approx 46{,}69°$

$A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{HE}| \cdot |\overline{HM}| \cdot \sin\sphericalangle EHM = \frac{1}{2}\sqrt{32}\sqrt{17} \cdot \sin 46{,}69° \approx 8{,}49$ (FE)

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) Koordinaten des Punktes D:

Aus $C_4(4; 7; -4)$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC_4}$ folgt:

$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x_D \\ 7 - y_D \\ -4 - z_D \end{pmatrix} \Rightarrow x_D = -2;\ y_D = 4;\ z_D = -10$, also D(–2; 4; –10)

Inhalt der Parallelogrammfläche:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overline{AB}| = 9$ (LE); $|\overline{BC_4}| = \sqrt{38}$ (LE)

$\cos\sphericalangle ABC_4 = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC_4}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC_4}|} = \dfrac{-54}{9 \cdot \sqrt{38}} \approx -0{,}9733 \Rightarrow \sphericalangle ABC_4 \approx 166{,}74°$

$A_{ABC_4D} = 2 \cdot A_{ABC_4} = 2(\frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC_4}| \cdot \sin\sphericalangle ABC_4)$

$= 9 \cdot \sqrt{38} \cdot \sin 166{,}74° \approx 12{,}73$ (FE)

b) Nachweis, daß $C_3(3; 7; -3)$ auf $\overline{AB}$ liegt:

$$\overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ d. h.,}$$

(I)	$1 + 6r = 3$	wahre Aussage für $r = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ C_3 liegt auf g_{AB};
(II)	$6 + 3r = 7$	$0 < r < 1$ $\Rightarrow$ E liegt zwischen A und B;
(III)	$-5 + 6r = -3$	Also liegt C_3 auf der Strecke $\overline{AB}$.

Teilungsverhältnis:

$$\overrightarrow{AC_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{C_3B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AC_3}}{\overline{C_3B}} = \frac{\left|\overrightarrow{AC_3}\right|}{\left|\overrightarrow{C_3B}\right|} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}} = \frac{1}{2}$$

c) Schnittpunkt S:

$C_2(2; 7; -2)$; $C_0(0; 7; 0)$; $C_{-1}(-1; 7; 1)$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}; \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) $2 + 6s = 3$

(II) $7 - s = 7$ $\quad\Rightarrow\quad s = 0;\ t = -2$, also $S(2; 7; -2)$

(III) $-2 - 10s = t$

d) Lagebeziehung g und ε:

$$\varepsilon_{ABG}: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OC_1} + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(I) $2 + 6s = 1 + 6u$ $\quad\Rightarrow u = s + \frac{1}{6}$

(II) $7 - s = 6 + 3u + v$ $\quad\Rightarrow v = \frac{1}{2} - 4s$

(III) $-2 - 10s = -5 + 6u + 4v$

Das heißt: Für alle $s \in \mathbb{R}$ gibt es reelle Zahlen $u = s + \frac{1}{6}$ und $v = \frac{1}{2} - 4s$, so daß das resultierende Gleichungssystem $(g \cap \varepsilon)$ erfüllt wird. $\quad\Rightarrow\quad g \in \varepsilon$

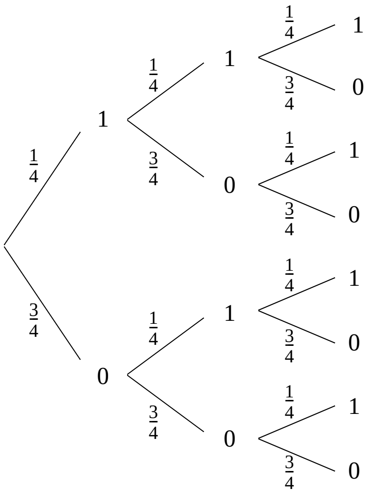
e) Parameter t:

$$\overrightarrow{C_tA} \cdot \overrightarrow{C_tB} = 0, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 1-t \\ -1 \\ -5+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7-t \\ 2 \\ 1+t \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $t^2 - 6t = 0$ $\quad\Rightarrow\quad t_1 = 0;\quad t_2 = 6$

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.3

1. a) Baumdiagramm:



e_i	$P(e_i)$
(1, 1, 1)	$(\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$
(1, 1, 0)	$(\frac{1}{4})^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$
(1, 0, 1)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$
(1, 0, 0)	$\frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{64}$
(0, 1, 1)	$\frac{3}{4} \cdot (\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{64}$
(0, 1, 0)	$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$
(0, 0, 1)	$(\frac{3}{4})^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$
(0, 0, 0)	$(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$

Ergebnismenge:
$\Omega = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 1); (1, 0, 0); (0, 1, 1); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (0, 0, 0)\}$

b) Ereigniswahrscheinlichkeiten:
$\Omega_A = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (0, 0, 0)\}$
$P(A) = \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} = \frac{54}{64} = \frac{27}{32}$

$\Omega_B = \{(1, 1, 0); (1, 0, 1); (1, 0, 0); (0, 1, 1); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$
$P(B) = \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{9}{64} + \frac{3}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

$\Omega_C = \{(1, 1, 0); (0, 1, 1)\}$
$P(C) = \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

$\Omega_D = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 1); (1, 0, 0); (0, 1, 1); (0, 0, 1)\}$
$P(D) = \frac{1}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{9}{64} + \frac{3}{64} + \frac{9}{64} = \frac{28}{64} = \frac{7}{16}$

2. X ≙ Anzahl der Einsen; n = Anzahl der Drehungen

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot (\frac{3}{4})^n \cdot (\frac{1}{4})^0 = 1 - (\frac{3}{4})^n$

$P(X \geq 1) = 1 - (\frac{3}{4})^n > 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad 0{,}05 > (\frac{3}{4})^n \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln(3/4)} \approx 10{,}41$

$n \geq 11$, d.h.: Das Glücksrad muß mindestens 11mal gedreht werden.

3. a) Gewinnerwartung für Spieler II

Mögliche Ergebnisse beim Drehen des Glücksrades durch Spieler I und II:

$\Omega = \{(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)\}$:

Ziffernsumme	0	1	1	2
Gewinn in DM	0	+1	+1	–2

x_i	0	+1	–2
$P(X = x_i)$	$(\frac{3}{4})^2$	$2 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4})$	$(\frac{1}{4})^2$

$E(X) = (0 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 2 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}) - 2 \cdot (\frac{1}{4})^2) \cdot 3 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Da E(x) > 0, lohnt sich das Spiel für Spieler II.

b) beliebige p:

x_i	0	+1	+1	–2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{4}(1 - p)$	$\frac{3}{4}p$	$\frac{1}{4}(1 - p)$	$\frac{1}{4}p$

$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{4}(1 - p) + \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}(1 - p) - 2 \cdot \frac{1}{4}p = \frac{1}{4} > 0$

Da E(X) > 0 für beliebige p gilt, ist das Spiel für Spieler II immer günstig.

c) Faires Spiel, d. h. E(X) = 0:

x_i	0	+1	+1	–2
$P(X = x_i)$	$(1 - p)^2$	$(1 - p)p$	$p(1 - p)$	p^2

$E(X) = 0 \cdot (1 - p)^2 + (1 - p)p + p(1 - p) - 2p^2 = 0$

$\Rightarrow \quad p^2 - \frac{1}{2}p = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0$ (entfällt); $\quad p_2 = \frac{1}{2}$

Bewertungsvorschlag

Aufgabe	Teilaufgabe							Summe
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
1.1	10	3	1	5	6	5		30
1.2	12	2	2	4	4	4	2	30
2.1	4	3	1	4	3			15
2.2	4	2	3	4	2			15
	1. a)	1. b)	2.	3. a)	3. b)	3. c)		
2.3	2	4	2	3	2	2		15

Abiturprüfung Grundkurs

1996 / 97

Gymnasium

Berlin / Camille-Claudel-Gymnasium

Aufgabe 1

Gegeben seien die Punkte A(–1 | –2 | 3), B(1 | 0 | 1) und die Gerade

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ für $r \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden h durch A und B an.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel von g und h.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h_1, die parallel zu h durch den Punkt P(–1 | –2 | –3) verläuft.
Begründen Sie Ihre Wahl.

d) Zeigen Sie, daß die Geraden h_1 und g zueinander windschief liegen.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = \frac{4x + 6}{(x + 2)^2}$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an, bestimmen Sie die Nullstelle und die Polstelle der Funktion.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von f.
Untersuchen Sie die Art des Extremums.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

d) Für genau einen Wert von a ist $F(x) = \frac{a}{x + 2} + 4 \cdot \ln(x + 2)$ eine Stammfunktion von f mit $a \in \mathbb{R}$, $x > -2$.
Ermitteln Sie a

Aufgabe 3

Eine Funktion f ist gegeben durch die Gleichung $f(x) = (1 - e^{-x})^2$ und $D_f = \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte von f.
[mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$]

b) Wie verhält sich die Funktion f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$?

c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-1 \leq x \leq 5$ (1 LE = 2 cm).

d) Durch die Gleichung $g(x) = -(1 - e^{-x})^2 + 2$ ist eine Funktion g gegeben.
Begründen Sie, daß die Graphen von f und g symmetrisch bezüglich der Geraden mit der Gleichung $y = 1$ liegen.

e) Die Graphen der Funktionen f und g schneiden einander im Punkt $S(-\ln 2 \mid 1)$.
Sie begrenzen im zweiten Quadranten eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie deren Inhalt.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1

a) Geradengleichung: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ für $s \in \mathbb{R}$

b) Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(I) $-1 + 2s = 3 + r$
(II) $-2 + 2s = -r$
(III) $3 - 2s = 2 + 2r$

$$\begin{aligned} 2s - r &= 4 \quad (-) \\ 2s + r &= 2 \quad (+) \\ -2s - 2r &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s - r &= 4 \\ -2r &= 2 \quad \cdot 3 \\ -3r &= 3 \quad \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s - r &= 4 \\ -2r &= 2 \end{aligned}$$

$$r = -1,\ s = \tfrac{3}{2}$$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h.: S(2 | 1 | 0) ist Schnittpunkt.

Schnittwinkel:

$\cos\gamma = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}$ für $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\vec{m}| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $|\vec{n}| = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}$

$\cos\gamma = \frac{|2 - 2 - 4|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}} = 0{,}4719 \Rightarrow \gamma = 61{,}9°$

c) Parallele h_1 zu h:

h_1 ist parallel zu h, wenn die zugehörigen Richtungsvektoren $\vec{a}_1$ bzw. $\vec{a}$ kollinear sind, z.B:

$\vec{a}_1 = k\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $k = -1 \Rightarrow \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; mit P(–1 | –2 | –3) ergibt sich:

$h_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

d) h_1 ist windschief zu g, denn

– h_1 ist nicht parallel zu g, da $\vec{a}_1$ nicht kollinear zum Richtungsvektor

$\vec{m} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ von g, , weil $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

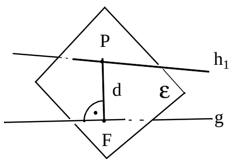
– h_1 und g besitzen keinen Schnittpunkt:

Aus $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & -1 - 2t = 3 + r \\ \text{(II)} & -2 - 2t = -r \\ \text{(III)} & -3 + 2t = 2 + 2r \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -2t - r &=& 4 \\ -2t + r &=& 2 \\ +2t - 2r &=& 5 \\ \hline -2t - r &=& 4 \\ -4t &=& 6 \quad \Rightarrow t = -\frac{3}{2} \\ -3r &=& 9 \quad \Rightarrow r = -3 \\ \hline \end{array} \quad (+)\ (+)$$

t und r eingesetzt in (I): $3 + 3 \neq 4$

Abstand Punkt P – Gerade g:



$P(-1\,|\,-2\,|\,-3)$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Betrachtet wird eine Ebene ε, die P enthält und senkrecht zu g verläuft.

$\Rightarrow$ Normalenvektor von ε entspricht Richtungsvektor von g:

$\varepsilon\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Man ermittelt den Lotfußpunkt F von P auf g als Schnittpunkt von g und ε:

$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} r + 4 \\ -r + 2 \\ 2r + 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (r + 4) - (-r + 2) + 2(2r + 5) = 0$, also $6r + 12 = 0 \Rightarrow r = -2$

$F(1\,|\,2\,|\,-2)$; Abstand $|\overrightarrow{PF}| = \left|\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{21} \approx 4{,}58$ (LE)

Bewertungsvorschlag:

a)	Gleichung der Geraden h	2 BE
b)	Lösung des Gleichungssystems; Schnittpunkt S	6 BE
	Anwendung der Kosinusformel; Schnittwinkel	5 BE
c)	Gleichung der Geraden h_1; Begründung	4 BE
d)	Nachweis: Lage von g und h_1 windschief	6 BE
	Bestimmung des Lotfußpunktes von P auf g	6 BE
	Abstand von P zu g	3 BE
		32 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2

a) Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Nullstelle: $4x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ ist Nullstelle.

Polstellen: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$, d.h. $x = -2$ ist Polstelle.

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(\frac{4}{x} + \frac{6}{x^2})}{x^2(1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2})} = \frac{0}{1} = 0$

b) Extrempunkt:

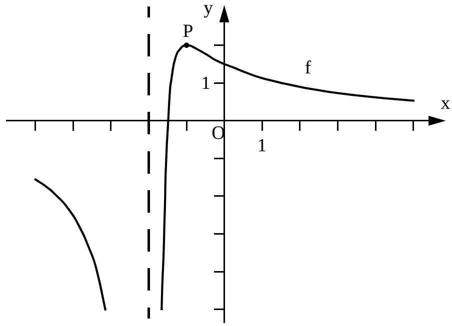
$f'(x) = \frac{4(x+2)^2 - (4x+6)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-4x-4}{(x+2)^3}$

$f''(x) = \frac{-4(x+2)^3 - (-4x-4)\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{8x+4}{(x+2)^4}$

Extrempunkt: $-4x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1$; $f''(1) = -4 < 0 \Rightarrow P_{Max}(-1\,|\,2)$

c)

x	–5	–4	–3	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	–1,56	–2,5	–6	2	1,5	1,08	0,88	0,72	0,61	0,53



d) $F(x) = \frac{a}{x+2} + 4\ln(x+2)$ ist eine Stammfunktion.

$\Rightarrow F'(x) = \frac{-a \cdot 1}{(x+2)^2} + 4 \cdot \frac{1}{x+2} = f(x)$

$\frac{-a}{(x+2)^2} + \frac{4}{x+2} = \frac{4x+6}{(x+2)^2}$, also $\frac{-a+4(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{4x+6}{(x+2)^2} \Rightarrow -a + 4x + 8 = 4x + 6$

$\Rightarrow a = 2$

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Nullstelle	3 BE
	Polstelle	2 BE
	Verhalten im Unendlichen	4 BE
b)	Erste und zweite Ableitung	6 BE
	Extrempunkt; Art des Extrempunktes	5 BE
c)	Wertetabelle	2 BE
	Zeichnung	4 BE
d)	Ableitung der Stammfunktion; Gleichsetzung mit f(x); Berechnung von a	4 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3

a) $f'(x) = 2(1 - e^{-x}) \cdot (-e^{-x}) \cdot (-1) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$

$f''(x) = -2e^{-x} - 4e^{-2x}$; $f'''(x) = 2e^{-x} - 8e^{-2x}$

Nullstellen: $(1 - e^{-x})^2 = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1$, also $x = 0$

Extrempunkte:

$2e^{-x} + 2e^{-2x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = e^{-2x} \Rightarrow -x = -2x$, also $x = 0$

$f''(0) = -2 + 4 = 2 > 0 \Rightarrow$ Minimumpunkt $P_{Min}(0\,|\,0)$

Wendepunkte:

$-2e^{-x} - 4e^{-2x} = 0$, also $e^{-x}(-1 + 2e^{-x}) = 0$

Wegen $e^{-x} > 0$ folgt: $2e^{-x} = 1$, also $e^{-x} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -x = \ln\frac{1}{2}$ und somit $x = \ln 2 \approx 0{,}69$

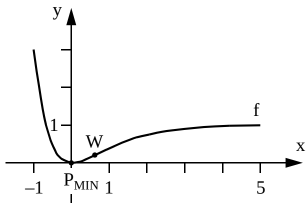
$f'''(0{,}69) = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W(0{,}69\,|\,0{,}25)$

b) Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - e^{-x})^2 = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^2 = \lim_{x \to -\infty} (1 - e^{x})^2 = +\infty$$

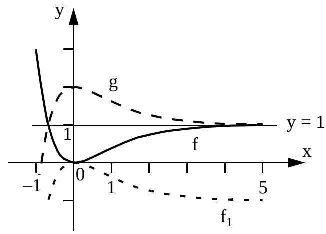
c)



x	–1	1	2	3	4	5
f(x)	2,95	0,40	0,75	0,90	0,96	0,99

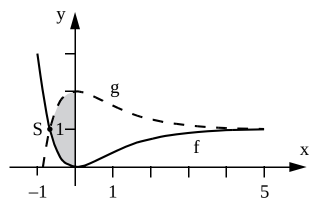
d) Spiegelt man den Graphen von f an der x-Achse, so erhält man das Bild von $f_1(x) = -(1 - e^{-x})^2$ mit $\lim\limits_{x \to \infty} f_1(x) = -1$.

Verschiebung um +2 längs der y-Achse ergibt den Graphen von g, der symmetrisch zu y = 1 liegt.



e) Flächeninhalt

$$A = \int_{-\ln 2}^{0} [g(x) - f(x)]\,dx$$



$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (-1 + 2e^{-x} - e^{-2x} + 2) \\ &\quad - (1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= 4e^{-x} - 2e^{-2x} \end{aligned}$$

$$A = \int_{-\ln 2}^{0} (4e^{-x} - 2e^{-2x})\,dx = \left[-4e^{-x} + \frac{2}{2}e^{-2x}\right]_{-\ln 2}^{0}$$

$$= (-4 + 1) - (-8 + 4) = 1 \text{ (FE)}$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nullstelle;	3 BE
	Erste, zweite und dritte Ableitung	6 BE
	Berechnung und Nachweis des lokales Minimums	4 BE
	Berechnung und Nachweis des Wendepunktes	4 BE
b)	Verhalten im Unendlichen	6 BE
c)	Wertetabelle; Zeichnung des Graphen und der Ergebnisse aus a) und b)	6 BE
d)	Begründung der Symmetrie	4 BE
e)	Differenzfunktion g(x) – f(x);	2 BE
	Stammfunktion und Fläche	3 BE
		38 BE