Abiturprüfung Grundkurs 1997/98

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern
Sachsen
Sachsen-Anhalt
Thüringen
Berlin
Brandenburg

PAETEC

paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH Berlin

Autoren für die einzelnen Bundesländer bzw. die ausgewählten Schulen:

Margit Liskow (Mecklenburg-Vorpommern)
Dr. Rainer Heinrich (Sachsen)
Birgit Maier (Sachsen-Anhalt)
Siegbert Hülle (Thüringen)
Christian Blume (Bertha-v.-Suttner-OS Berlin)
Benno Winkler (Ernst-Friedrich-Oberschule Berlin)
Sylvia Wehrmeister/Ursel Ziems (Gesamtschule Bernau)

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier.

1. Auflage

1 5 4 3 2 1 | 2002 2001 2000 1999 98

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes.

Redaktion: Prof. Dr. habil. Karlheinz Weber
Layout: Matthias Nerling, Heiko Schlichting
Umschlaggestaltung: Britta Scharffenberg
Druck: OSTHAVELLAND-DRUCK GmbH VELTEN

ISBN 3-89517-271-5

Inhalt

Vorwort

Das vorliegende Heft enthält die Aufgaben, die in den zentralen Abiturprüfungen des Schuljahrs 1997/98 für Mathematik-Grundkurse in den Bundesländern Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen gestellt wurden. Da es in Berlin und Brandenburg kein Zentralabitur für das Fach Mathematik gibt, wurden als Beispiele weiterhin die Abiturprüfungsarbeiten von zwei Berliner und einer Brandenburger Schule in das Heft aufgenommen.

Die Erwartungsbilder skizzieren in der Regel einen möglichen Lösungsweg, wobei stets auch wesentliche Zwischenschritte Aufnahme fanden, um den Nachvollzug des Gedankengangs zu erleichtern und für den Lernenden die Möglichkeiten zur Selbstkontrolle zu erhöhen. Die angegebenen Bewertungsvorschläge haben empfehlenden Charakter. Einigen Arbeiten vorangestellte *Hinweise* informieren über länderspezifische Modalitäten der Prüfungsdurchführung.

Hinsichtlich der Symbolik und Zeichensetzung wie auch der Beachtung der reformierten Rechtschreibung folgen die Aufgabentexte den Originalfassungen, woraus teilweise Unterschiede zwischen den Vorgehensweisen in den einzelnen Arbeiten resultieren. Aus Platzgründen war es erforderlich, mitunter „fortlaufende" Gleichungen oder „Schlußketten" zu verwenden. Das Zeichen „$\Rightarrow$" wird dabei als Abkürzung für „daraus folgt", „daraus ergibt sich" u. ä. genutzt, also nicht allein zur Kennzeichnung einer Implikation im strengen Sinne.

Der PAETEC Schulbuchverlag hofft, mit dieser Aufgabensammlung den Lehrkräften Anregungen für die Gestaltung eigener Klausur- und Prüfungsarbeiten sowie den Schülerinnen und Schülern Hilfe bei der Vorbereitung auf das Abitur zu geben. Darüber hinaus erlaubt die geschlossene Veröffentlichung der Prüfungsaufgaben aus einem Schuljahr gewiß interessante Vergleiche bezüglich Schwerpunktsetzung, Anforderungsniveau, Aufgabengestaltung usw. in den verschiedenen Bundesländern, woraus wiederum Ansätze für eigenes Nachdenken erwachsen können.

Die Redaktion

Berlin, Juli 1998

Abiturprüfung Grundkurs

1997 / 98

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern

Hinweis:
Die Schüler erhielten zwei Arbeiten, bestehend aus dem übereinstimmenden Pflichtteil P und den Wahlteilen A und B, von denen einer auszuwählen war.
Der Pflichtteil war vollständig, von den Wahlaufgaben waren zwei aus dem Teil A oder zwei aus dem Teil B zu bearbeiten.

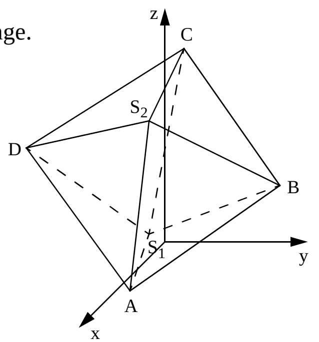
Aufgabe P1: Analysis

a) Gegeben ist eine Folge (a_n) durch $a_n = \frac{n^2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
Stellen Sie diese Folge für $n \leq 5$ graphisch dar.
Beweisen Sie, daß die Folge (a_n) monoton wächst.
Von welchem n ab ist a_n größer als 36?

b) Gegeben ist eine Funktion f durch die Gleichung $y = f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$.
Ihr Graph im kartesischen Koordinatensystem sei G.
Im Punkt $P(9 \mid f(9))$ sei eine Tangente t an G gelegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung für t und die Größe des Winkels, unter dem t die x-Achse schneidet.
Untersuchen Sie, ob f für alle $x > 0$ monoton wächst.

Aufgabe P2: Geometrie

Die Punkte $A(7 \mid 1 \mid 1)$, $B(3 \mid 5 \mid 3)$, $C(1 \mid 1 \mid 7)$ D, $S_1(0 \mid -1 \mid 0)$ und S_2 bestimmen als Eckpunkte eine gerade Doppelpyramide mit dem Parallelogramm ABCD als gemeinsamer Grundfläche (siehe Abb.).
Beide Einzelpyramiden haben Höhen gleicher Länge.



a) Zeigen Sie, daß das Parallelogramm ABCD ein Quadrat ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten von D.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M des Quadrates ABCD.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S_2.

c) Auf der Strecke $\overline{AC}$ existiert genau ein Punkt E, der den Abstand 3 Längeneinheiten zur x-y-Ebene hat.
Bestimmen Sie die Koordinaten von E.

Aufgabe P3: Stochastik

Ein Fahrgast benutzt einmal täglich bis zu einem Umsteigepunkt die Straßenbahn und danach den Bus. Erfahrungsgemäß verspätet sich die Straßenbahn bei 9% der Fahrten und erreicht dadurch den Umsteigepunkt nicht pünktlich. Der stets pünktlich abfahrende Bus wird dann nicht mehr erreicht, und der Fahrgast gelangt verspätet an sein Ziel. Der Bus wiederum verspätet sich unterwegs bei 12% seiner Fahrten und erreicht dadurch sein Ziel nicht pünktlich.

a) Zeigen Sie, daß der Fahrgast sein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,8 pünktlich erreicht.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein Fahrgast nur wegen einer Busverspätung unpünktlich zum Ziel?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt ein Fahrgast an 5 Tagen
   – genau dreimal pünktlich,
   – mindestens dreimal pünktlich an sein Ziel?

d) Wie viele pünktliche Ankünfte am Ziel sind an 5 Tagen zu erwarten?

Aufgabe A4: Analysis

Gegeben ist eine Funktionenschar f_a durch die Gleichung

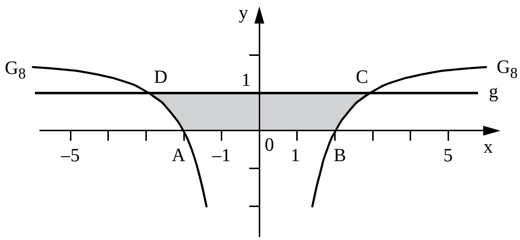
$$y = f_a(x) = 2 - \frac{a}{x^2}\,,\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f_a.
   Geben Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten von G_a an.
   Weisen Sie nach, daß G_a weder lokale Extrempunkte noch Wendepunkte hat.

b) Es sei nun a = 8. Die Skizze zeigt den Verlauf von G_8. Der Graph G_8 schneidet die Gerade g mit der Gleichung y = 1 in den Punkten C und D, die x-Achse in den Punkten A und B.
   Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte C und D.

   Die gefärbte Fläche habe den Inhalt I, das Trapez ABCD den Flächeninhalt I_T.
   Berechnen Sie I und I_T.
   Um wieviel Prozent ist I_T größer als I?



Aufgabe A5: Analysis

Gegeben sei eine Funktion f durch die Gleichung $y = f(x) = \frac{x}{\ln x}$. Ihr Graph sei G.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die Polstelle von f.
b) Ermitteln Sie die Koordinaten des lokalen Minimumpunktes von G.
Skizzieren Sie G für $x \leq e^2$.
Verwenden Sie u.a. die Funktionswerte f(0,2), f(0,8), f(1,2) und $f(e^2)$.
b) Bestimmen Sie die Anstiege von f an den Stellen e^2 und e^{-2}.
c) Zeigen Sie, daß die Funktion g, für die $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ gilt, an derselben Stelle ein Extremum hat wie f.

Aufgabe A6: Geometrie

Gegeben ist eine Gerade g durch die beiden Punkte A(0 | 0 | 2), B(–4 | 3 | 2) und eine Schar von Geraden h_t durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Stellen Sie g, h_2, h_4 in einem räumlichen Koordinatensystem dar.
Weisen Sie nach, daß $g \parallel h_t$ für alle t gilt.
b) Auf welcher Geraden h_t liegt der Punkt P(2 | 6 | 0)?
Jede Gerade h_t schneidet die x-Achse im Punkt T_x, die y-Achse im Punkt T_y.
Für welche Werte von t gilt: $\left|\overrightarrow{T_xT_y}\right| = 10$?
c) Für jeden Wert von t liegen g und h_t in einer Ebene ε_t.
Stellen Sie für ε_4 und ε_t je eine Gleichung auf.
Untersuchen Sie, ob der Punkt Q(2 | 6 | 1) in der Ebene ε_{20} liegt.

Aufgabe B4: Analysis

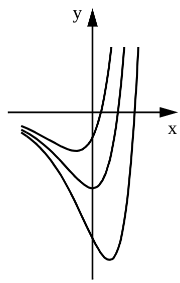
Eine alte Gebührenordnung der Post sieht für Sendungen in Form von Rollen vor, daß Länge und doppelter Durchmesser zusammen nicht 100 cm überschreiten dürfen. Diese Höchstvorgabe (100 cm) soll bei den folgenden Teilaufgaben genutzt werden.

a) Berechnen Sie die Volumina solcher Rollen für die Durchmesser $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 30$ cm und $d_3 = 40$ cm.
b) Bestimmen Sie Durchmesser und Länge der Rolle, deren Volumen maximal ist. Berechnen Sie dieses maximale Volumen.
c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion V = f(d) in ihrem gesamten Definitionsbereich (V – Volumen der Rolle, d – Durchmesser der Rolle).

d) Bestimmen Sie näherungsweise (auf Zentimeter genau) einen Wert für d so, daß $V = 27\ dm^3$.
Begründen Sie, warum die Funktion $V = f(d)$ keine Umkehrfunktion besitzt.

Aufgabe B5: Analysis

Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung
$y = f_a(x) = (3x - a)e^x,\ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0.$
Die zugehörige Kurvenschar sei G_a. Die Skizze zeigt drei ausgewählte Graphen der Schar G_a.



a) Zeigen Sie, daß durch $F(x) = 3(x - 2)e^x$ eine Stammfunktion von f_3 gegeben ist.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im vierten Quadranten vom Graphen G_3, der x-Achse und der y-Achse vollständig begrenzt wird.

b) Jeder Graph G_a hat genau einen Extrempunkt und genau einen Wendepunkt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte für G_3.

c) Es gibt genau einen Graphen von G_a, in dessen Schnittpunkt mit der x-Achse die Tangente den Anstieg 3e hat.
Berechnen Sie für diesen Fall den Wert von a, und geben Sie die Gleichung der Tangente an.

Aufgabe B6: Geometrie

Ein geometrisches „Projekt“ wird geplant und berechnet.
Von einem Punkt $A(0 \mid 0 \mid 1)$ aus sollen der Reihe nach Schnüre zu den Punkten $P(2t \mid 9 - t^2 \mid 0),\ t \in \mathbb{N}$, gespannt werden (1 Längeneinheit $\triangleq$ 1 m).

a) Stellen Sie den Sachverhalt für $t \leq 3$ graphisch dar.

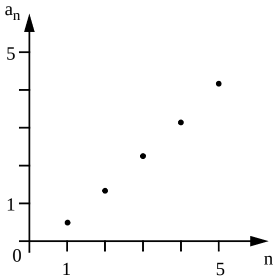
b) Berechnen Sie den Winkel, den die Strecken $\overline{AP_0}$ und $\overline{AP_1}$ einschließen.
Für welche Werte t gilt: $\sphericalangle(\overline{AP_0} \mid \overline{AP_t}) \geq 90°$?

c) Berechnen Sie die Gesamtlänge der Strecken $\overline{AP_0}$, $\overline{AP_1}$, $\overline{AP_2}$ und $\overline{AP_3}$.

d) Für jeden Wert von t liegen A und P_t auf einer Geraden g_t, sowie A, P_t und P_{t+1} in einer Ebene ε_t.
Geben Sie eine für g_t an.
Stellen Sie eine Gleichung für ε_t auf.
Untersuchen Sie, ob der Punkt $Q(5 \mid 2{,}5 \mid 0)$ in der Ebene ε_2 liegt.

Erwartungsbild zu Aufgabe P1: Analysis

a) Graph der Folge:



n	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$	$\frac{9}{4} = 2{,}25$	$\frac{16}{5} = 3{,}2$	$\frac{25}{6} = 4{,}1\overline{6}$

Monotonie:

Beh.: (a_n) ist monoton wachsend

Nachweis: $a_n = \frac{n^2}{n+1}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n+2}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^3 - (n^3 + 2n^2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 2n^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)}$$

$a_{n+1} - a_n > 0$ für alle n mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$, woraus die Beh. folgt

Bestimmung von n ($n \in \mathbb{N}$), so daß $a_n > 36$ gilt:

$\frac{n^2}{n+1} > 36$, also $n^2 - 36n - 36 > 0$

$m^2 - 36m - 36 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = 18 \pm \sqrt{324 + 36}$, also $m_1 = 36{,}97$; $m_2 = -0{,}97$

$(n - 36{,}97)(n + 0{,}97) > 0 \Rightarrow n > 36{,}97$ und $n > -0{,}97$, also $n > 36{,}97$ oder

$n < 36{,}97$ und $n < -0{,}97$, also $n < -0{,}97$ entf.

Ab $n = 37$ gilt: $a_n > 36$.

b) Gleichung der Tangente t:

$P(9 \mid f(9))$, d.h. $P(9 \mid 8{,}1)$

$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(9) = \frac{99}{100} = 0{,}99$, also $m = 0{,}99$

$8{,}1 = 0{,}99 \cdot 9 + n$, also $n = -0{,}81$. Somit ergibt sich: t: $y = 0{,}99x - 0{,}81$

Winkel:

$m = 0{,}99 \Rightarrow \tan\alpha = 0{,}99$, also $\alpha = 44{,}7°$

Monotonie:

Beh: f ist für alle x, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ monoton wachsend.

Nachweis: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} > 0$ für alle x, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0 \Rightarrow$ Beh.

Bewertungsvorschlag:

a)	Graph; Nachweis, daß (a_n) monoton wächst; Bestimmung von n, so daß $a_n > 36$	8 BE
b)	Gleichung für t; Bestimmung des Winkels; Untersuchung, ob f für alle x > 0 monoton wächst	7 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P2: Geometrie

a) Nachweis, daß ABCD ein Quadrat ist:
Da ABCD ein Parallelogramm ist, ist nur noch zu zeigen:

I) $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ und II) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

zu I) $|\overline{AB}| = \sqrt{(3-7)^2 + (5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+16+4} = 6$

$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-3)^2 + (1-5)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$

zu II) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 - 16 + 8 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$$

ABCD ist ein Quadrat.

b) Koordinaten von D:

Es gilt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (da ABCD Quadrat), also $\begin{pmatrix} d_x - 7 \\ d_y - 1 \\ d_z - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow D(5\,|\,-3\,|\,5)$

Koordinaten von M:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,;\ \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M(4\,|\,1\,|\,4)$$

Koordinaten von S_2:

$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OS_1} + 2\overrightarrow{S_1M}\,;\ \overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2(8\,|\,3\,|\,8)$$

c) Koordinaten von E:

$\overline{AC}$: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AC}$; $r \in \mathbb{R}, 0 \le r \le 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} x = 7 - 6r & \Rightarrow x = 5 \\ y = 1 & \\ 3 = 1 + 6r & \Rightarrow r = \frac{1}{3} \end{array}$$

Es ergibt sich für E: E(5 | 1 | 3).

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis, daß ABCD ein Quadrat ist	3 BE
b)	Koordinaten von D, M und S_2	6 BE
c)	Koordinaten von E	2 BE
		11 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P3: Stochastik

A: Straßenbahn hat Verspätung; P(A) = 0,09
B: Bus hat Verspätung; P(B) = 0,12
Die Ereignisse A und B sind unabhängig.

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}91 \cdot 0{,}88 = 0{,}8008$
Der Fahrgast erreicht also sein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,8 pünktlich.

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}91 \cdot 0{,}12 = 0{,}1092 \approx 0{,}11$
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fahrgast nur wegen einer Busverspätung unpünktlich sein Ziel erreicht, ist ungefähr 0,11.

b) X: Anzahl der Tage (unter 5), an denen der Fahrgast sein Ziel erreicht
B(5 | 0,8)-verteilt

$P(X = 3) = \binom{5}{3}(0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^2 = 10 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}04 = 0{,}2048 \approx 0{,}205$
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fahrgast an 5 Tagen genau dreimal pünktlich ans Ziel gelangt, ist 0,205.

$$\begin{aligned} P(X \ge 3) &= 1 - P(X \le 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - [\tbinom{5}{0}(0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^5 + \tbinom{5}{1}(0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^4 + \tbinom{5}{2}(0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^3] \\ &= 1 - (0{,}00032 + 0{,}0064 + 0{,}0512) = 0{,}94208 \approx 0{,}94 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fahrgast an 5 Tagen mindestens dreimal pünktlich ans Ziel gelangt, ist 0,94.

c) Wie in Teilaufgabe a) nachgewiesen, beträgt die Wahrscheinlichkeit für Pünktlichkeit 80%. An 5 Tagen sind also 4 pünktliche Ankünfte zu erwarten.

Bewertungsvorschlag:

a)	Berechnung der gefragten Wahrscheinlichkeiten	3 BE
b)	Berechnung der gefragten Wahrscheinlichkeiten	2 BE
c)	Berechnung der pünktlichen Ankünfte	1 BE
		6 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4: Analysis

a) Nullstellen von f_a:

Aus $2 - \frac{a}{x^2} = 0$ folgt $2x^2 = a$ und somit $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}a}$.

Die Nullstellen lauten: $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}a}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}a}$.

Asymptoten von G_a:

Aus $f_a(x) = \frac{2x^2 - a}{x^2}$ folgt $x_P = 0$ als Polstelle und $x = 0$ als Asymptote von G_a.

Aus $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (2 - \frac{a}{x^2}) = 2$ folgt: $y = 2$ ist eine Asymptote von G_a.

Nachweis, daß G_a keine Extrempunkte besitzt:

$f_a'(x) = \frac{2a}{x^3} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0 \Rightarrow$ keine Extrempunkte möglich

Nachweis, daß G_a keine Wendepunkte besitzt:

$f_a''(x) = \frac{-6a}{x^4} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0 \Rightarrow$ keine Wendepunkte möglich

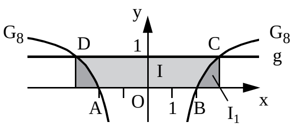
b) Koordinaten der Schnittpunkte C und D:

G_8: $f_8(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$; g: $y = 1$

Aus $2 - \frac{8}{x^2} = 1$ folgt $x^2 - 8 = 0$ und somit $x_1 = 2\sqrt{2}$ und $x_2 = -2\sqrt{2}$.

Daraus ergeben sich die Koordinaten der Punkte: $C(2\sqrt{2} \mid 1)$, $D(-2\sqrt{2} \mid 1)$.

Flächeninhalt I:



Lösungsidee:
Sei $I_{Rechteck} = I + 2I_1$. Dann ergibt sich I mittels $I = I_{Rechteck} - 2I_1$.

$$I_1 = \int_2^{2\sqrt{2}} (2 - \frac{8}{x^2})\,dx = [2x + \frac{8}{x}]_2^{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} - 4 - 4 = 6\sqrt{2} - 8$$

$I_{Rechteck} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow I = [4\sqrt{2} - 2(6\sqrt{2} - 8)]$ (FE) $= 8(2 - \sqrt{2})$ (FE) $\approx 4{,}69$ (FE)

Flächeninhalt I_T:

$I_T = \frac{1}{2}(4 + 4\sqrt{2}) \cdot 1$ (FE) $= (2 + 2\sqrt{2})$ (FE) $\approx 4{,}83$ (FE)

Vergleich von I und I_T:
$I \triangleq 100\% \Rightarrow I_T \triangleq 102{,}94\%$, d.h., I_T ist ca. 3% größer als I

Bewertungsvorschlag:

a)	Nullstellen; Gleichungen der Asymptoten; Nachweis der Nichtexistenz von Extrem- und Wendepunkten	6 BE
b)	Koordinaten von C und D; Berechnung von I und I_T; prozentuales Verhältnis von I und I_T	8 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A5: Analysis

a) Definitionsbereich von f:

$y = f(x) = \frac{x}{\ln x}$; $x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq 1$

Polstelle von f:
x_P ist Polstelle von f $\Leftrightarrow$ I) $\ln x_P = 0$ und II) $x_P \neq 0$
$x_P = 1$ erfüllt die Bedingungen I) und II), ist also Polstelle von f.

Koordinaten des lokalen Minimumpunktes von G:
x_E ist lokaler Minimumpunkt von G $\Leftrightarrow$ I) $f'(x_E) = 0$ und II) $f''(x_E) > 0$

zu I) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

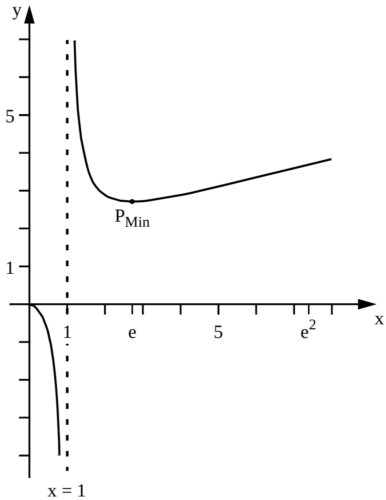
$f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow \ln x_E - 1 = 0$ und $\ln^2 x_E \neq 0$
$\Rightarrow x_E = e$ ist also eine mögliche lokale Minimumstelle von G.

zu II) $f''(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - 1) \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \dfrac{2 - \ln x}{x \cdot \ln^3 x}$

$f''(e) = \dfrac{2 - \ln e}{e \cdot \ln^3 e} = \dfrac{1}{e} > 0 \Rightarrow x_E = e$ ist lokale Minimumstelle von G.

$f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$, also $P_{Min}(e \mid e)$.

Graph der Funktion f:



x	0,2	0,8	1,2
f(x)	≈ –0,12	≈ –3,58	≈ 6,58

1,5	2	e	3
≈ 3,7	≈ 2,89	≈ 2,71	≈ 3,73

4,5	5	5,5	e^2
≈ 2,99	≈ 3,34	≈ 3,22	≈ 3,69

b) Anstiege von f an den Stellen e^2 und e^{-2}:

$$f'(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{\ln^2 e^2} = \frac{2-1}{4} = 0{,}25;\; f'(e^{-2}) = \frac{\ln e^{-2} - 1}{\ln^2 e^{-2}} = \frac{-2-1}{4} = -0{,}75$$

c) Nachweis, daß f und g an derselben Stelle ein Extremum besitzen:
In Teilaufgabe a) wurde bereits gezeigt, daß f an der Stelle $x_E = e$ ein Extremum besitzt; nachzuweisen ist also, daß auch g an der Stelle $x_E = e$ ein Extremum hat.

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{\ln x}{x}$$

x_E ist Extremstelle von g $\iff$ I) $g'(x_E) = 0$ und II) $g''(x_E) \neq 0$

zu I) $$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$g'(x_E) = 0 \iff 1 - \ln x_E = 0$ und $x_E^2 \neq 0$

$x_E = e$ erfüllt diese Bedingungen.

zu II) $$g''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$$g''(e) = \frac{2\ln e - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} \neq 0$$

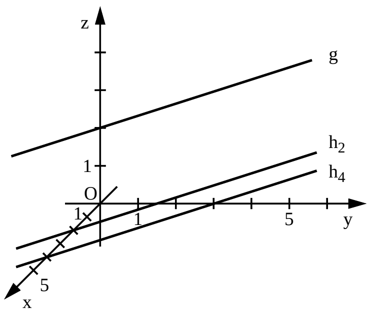
x_E ist also Extremstelle von g, woraus die Behauptung folgt.

Bewertungsvorschlag:

a)	maximaler Definitionsbereich von f; Polstelle von f; Koordinaten des lokalen Minimumpunktes von G; Graph	8 BE
b)	Anstiege von f an den Stellen e^2 und e^{-2}	2 BE
c)	Nachweis, daß g an derselben Stelle ein Extremum hat wie f	4 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A6: Geometrie

a) Graphische Darstellung von g, h_2 und h_4:



$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$h_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (p \in \mathbb{R})$$

$$h_4: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (q \in \mathbb{R})$$

Nachweis, daß $g \parallel h_t$ gilt:
h_t und g haben denselben Richtungsvektor, also gilt $g \parallel h_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen von t mit $P(2 \mid 6 \mid 0) \in h_t$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2 &= t - 4r \\ 6 &= 3r \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow r = 2;\ t = 10$, also: $P \in h_{10}$

Bestimmen von t mit $\left|\overrightarrow{T_x T_y}\right| = 10$ (LE):

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ führt auf

$$\begin{aligned} &(I) && x = t - 4r && \mid \cdot 3 \\ &(II) && y = 3r && \mid \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(I') && 3x = 3t - 12r \\ &(II') && 4y = 12r \end{aligned}$$

(I') + (II'): $3x + 4y = 3t \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}t$

Schnittpunkt T_x: $0 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}t$, also $x = t$ und somit: $T_x(t\,|\,0)$

Schnittpunkt T_y: $y = -\frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4}t \Rightarrow y = \frac{3}{4}t$ und damit: $T_x(0\,|\,\frac{3}{4}t)$

Aus $t^2 + (\frac{3}{4}t)^2 = 100$ folgt $\frac{25}{16}t^2 = 100$, also $t^2 = 64$ und somit $t_1 = 8$, $t_2 = -8$.

Für $t_1 = 8$ und $t_2 = -8$ gilt also: $\left|\overrightarrow{T_xT_y}\right| = 10$ (LE).

c) Gleichungen für ε_t und ε_4:

$$\varepsilon_t: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad r, q \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon_4: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \ (r, q \in \mathbb{R}) \ \text{oder} \ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$$

Untersuchung, ob $Q(2\,|\,6\,|\,1) \in \varepsilon_{20}$:

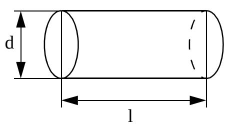
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = 20 - 4r + 20q \\ 6 = \quad 3r \\ 1 = \quad -2q \end{array} \Rightarrow r = 2;\ q = -\frac{1}{2}$$

Es gilt also: $Q(2\,|\,6\,|\,1) \in \varepsilon_{20}$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Zeichnung; Nachweis, daß $g \parallel h_t$ gilt	4 BE
b)	Bestimmung von h_t mit $P \in h_t$; Bestimmung der Werte t, für die gilt: $\left\|\overrightarrow{T_xT_y}\right\| = 10$ (LE)	5 BE
c)	Gleichung für ε_t und ε_4; Untersuchung, ob $Q(2\,\|\,6\,\|\,1) \in \varepsilon_{20}$	5 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B4: Analysis



$$l + 2d = 100\,\text{cm}$$
$$l = 100\,\text{cm} - 2d$$

a) Es gilt allgemein für das Volumen der Rolle: $V(d) = \frac{\pi}{4}d^2(100\,\text{cm} - 2d)$

$V(d_1) = V(20\text{ cm}) = \frac{\pi}{4} \cdot (20\text{ cm})^2 \cdot (60\text{ cm}) \approx 18\,849{,}5\text{ cm}^3 \approx 18{,}85\text{ dm}^3$

$V(d_2) = V(30\text{ cm}) = \frac{\pi}{4} \cdot (30\text{ cm})^2 \cdot (40\text{ cm}) \approx 28\,274{,}3\text{ cm}^3 \approx 28{,}27\text{ dm}^3$

$V(d_3) = V(40\text{ cm}) = \frac{\pi}{4} \cdot (40\text{ cm})^2 \cdot (20\text{ cm}) \approx 25\,132{,}7\text{ cm}^3 \approx 25{,}13\text{ dm}^3$

b) Maximales Volumen

$V(d) = \frac{\pi}{4} d^2(100 - 2d) = 25\pi d^2 - \frac{\pi}{2} d^3$; $V'(d) = 50\pi d - \frac{3}{2}\pi d^2$

$V'(d) = 0 \iff 50\pi d - \frac{3}{2}\pi d^2 = 0$, also $100d - 3d^2 = 100$

$\Rightarrow d(100 - 3d) = 0$; $d = 0$ entfällt, also ergibt sich $100 - 3d = 0$

$\Rightarrow d = \frac{100}{3}$

$V''(d) = 50\pi - 3\pi d$; $V''(\frac{100}{3}) = 50\pi - 3\pi \cdot \frac{100}{3} = -50\pi < 0$

$\Rightarrow d = \frac{100}{3}$ ist lokale Minimumstelle; $l = 100 - 2 \cdot \frac{100}{3} = \frac{100}{3}$

Durchmesser der Rolle: $d = 33{,}\overline{3}$ cm; Länge der Rolle: $l = 33{,}\overline{3}$ cm

Maximales Volumen:

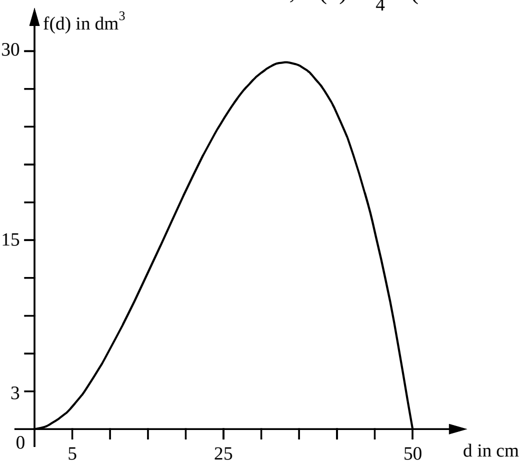
$V(\frac{100}{3}) = 25\pi(\frac{100}{3})^2 - \frac{\pi}{2}(\frac{100}{3})^3 = \pi(\frac{100}{3})^2 \cdot (25 - \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{3})$

$= \pi \cdot \frac{10\,000}{9} \cdot \frac{25}{3} = \frac{250\,000}{27}\pi \approx 29\,088{,}82$

Das maximale Volumen beträgt ca. $29\,088{,}82\text{ cm}^3 \approx 29{,}09\text{ dm}^3$.

c) Graph der Funktion $V = f(d)$:

Definitionsbereich: $0 < d < 50$; $V(d) = \frac{\pi}{4} d^2(100\text{ cm} - 2d)$



d	V
5	≈ 1,77
10	≈ 6,28
20	≈ 18,85
30	≈ 28,27
$33{,}\overline{3}$	≈ 29,09
40	≈ 25,13
45	≈15,90
48	≈ 7,24

d) Ermittlung von d, so daß $V = 27\ dm^3$:
Vermutung: $20\ cm < d < 30\ cm$ oder $33,\overline{3} < d < 40\ cm$ (siehe Graph)

$d = 25\ cm \Rightarrow V = f(25) = \frac{\pi}{4} \cdot 625 \cdot 50\ cm^3 \approx 24\,543,69\ cm^3 \approx 24,54\ dm^3$

$d = 28\ cm \Rightarrow V = f(28) = \frac{\pi}{4} \cdot 784 \cdot 44\ cm^3 \approx 27\,093,09\ cm^3 \approx 27,09\ dm^3$

$d = 35\ cm \Rightarrow V = f(35) = \frac{\pi}{4} \cdot 1\,225 \cdot 30\ cm^3 \approx 28\,863,38\ cm^3 \approx 28,86\ dm^3$

$d = 38\ cm \Rightarrow V = f(38) = \frac{\pi}{4} \cdot 1\,444 \cdot 24\ cm^3 \approx 27\,218,76\ cm^3 \approx 27,22\ dm^3$

Für $d = 28\ cm$ oder für $d = 38\ cm$ gilt näherungsweise: $V = 27\ dm^3$.
Nachweis, daß $V = f(d)$ keine Umkehrfunktion besitzt:
Allgemein gilt: Eine Funktion f besitzt eine Umkehrfunktion $\bar{f}$, wenn sie eine eineindeutige Funktion ist.
Da $V = f(d)$ keine eineindeutige Funktion ist, besitzt sie keine Umkehrfunktion.

Bewertungsvorschlag:

a)	Volumina für d_1, d_2 und d_3	4 BE
b)	Durchmesser und Länge der Rolle mit maximalen Volumen; Berechnung des maximalen Volumens	5 BE
c)	Graph	2 BE
d)	Berechnung von d, so daß $V = 27\ dm^3$; Nachweis, daß $V = f(d)$ keine Umkehrfunktion besitzt	3 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B5: Analysis

a) Nachweis, daß durch $F(x) = 3(x-2)e^x$ eine Stammfunktion von f_3 gegeben ist:

$F'(x) = 3 \cdot e^x \cdot (x-2) + 3 \cdot e^x \cdot 1 = 3e^x(x-1)$
$f_3(x) = (3x-3)e^x = 3e^x(x-1)$
Es gilt: $F'(x) = f_3(x)$, also ist F eine Stammfunktion von f.

Inhalt der Fläche, die im vierten Quadranten vom Graphen G_3, der x-Achse und der y-Achse vollständig begrenzt wird:

$$I = \left| \int_0^1 f_3(x)\,dx \right| = \left| [3e^x(x-2)]_0^1 \right| = |-3e + 6| \approx 2{,}1548\ (FE) \approx 2{,}15\ (FE)$$

b) Koordinaten des Extrempunktes von G_3:
$f_3'(x) = 3e^x + (3x-3)e^x = 3xe^x$; $f_3''(x) = 3xe^x + 3e^x = 3e^x(x+1)$
$f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ (da $e^x \neq 0$ für alle x) $\Rightarrow x = 0$

$f_3''(0) = 3 > 0$; $f_3(0) = -3 \;\Rightarrow\; P_{Min}(0 \mid -3)$

Koordinaten des Wendepunktes von G_3:

$f_3''(x) = 3e^x(x + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 1 = 0$ (da $e^x \neq 0$ für alle x) $\;\Rightarrow\; x = -1$

$f_3'''(x) = 3e^x(x + 1) + 3e^x = 3e^x(x + 2)$

$f_3'''(-1) = \frac{3}{e} \neq 0$; $f_3(-1) = e^{-1}(-6) = -\frac{6}{e} \;\Rightarrow\; P_W(-1 \mid -\frac{6}{e})$

c) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f_a(x) = (3x - a)e^x = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x - a = 0$ (da $e^x \neq 0$ für alle x) $\;\Rightarrow\; x = \frac{a}{3}$

$\Rightarrow P_x(\frac{a}{3} \mid 0)$

Ermittlung von a:

$f_a'(x) = 3 \cdot e^x + (3x - a) \cdot e^x = e^x(3 + 3x - a)$

$f_a'(\frac{a}{3}) = e^{\frac{a}{3}}(3 + 3\frac{a}{3} - a) = 3e^{\frac{a}{3}}$

Es soll gelten: $f_a'(\frac{a}{3}) = 3e$. Gleichsetzen ergibt:

$3e = 3e^{\frac{a}{3}}$, also $\frac{a}{3} = 1$ und somit $a = 3$.

Tangentengleichung:

$P_x(\frac{a}{3} \mid 0)$; $m = 3e$

Aus $y = mx + n$ folgt $0 = 3e \cdot \frac{a}{3} + n$, also $n = -ae$.

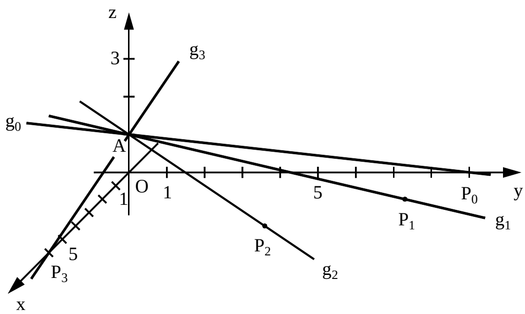
$t\colon y = 3e \cdot x - ae$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis, daß F Stammfunktion von f_3 ist; Inhalt der Fläche	4 BE
b)	Koordinaten des Extrem- und Wendepunktes von G_a	7 BE
c)	Wert von a; Gleichung der Tangente	3 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B6: Geometrie

a) $P_0(0\,|\,9\,|\,0)$; $P_1(2\,|\,8\,|\,0)$; $P_2(4\,|\,5\,|\,0)$; $P_3(6\,|\,0\,|\,0)$



b) Berechnung von $\sphericalangle(\overline{AP_0}\ |\ \overline{AP_1})$:

$$\overrightarrow{AP_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AP_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\sphericalangle(\overline{AP_0}\ |\ \overline{AP_1}) = \frac{0+72+1}{\sqrt{82}\cdot\sqrt{69}} = \frac{73}{\sqrt{5\,658}} \approx 0{,}9705 \Rightarrow \sphericalangle(\overline{AP_0}\ |\ \overline{AP_1}) = 13{,}95°$$

Der Winkel zwischen $\overline{AP_0}$ und $\overline{AP_1}$ beträgt etwa 14°.

Bestimmung der Werte t, für die gilt: $\sphericalangle(\overline{AP_0}\ |\ \overline{AP_t}) \geq 90°$:

$$\sphericalangle(\overline{AP_0}\ |\ \overline{AP_t}) \geq 90° \iff \overline{AP_0}\cdot\overline{AP_t} \leq 0 \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2t \\ 9-t^2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0$$

$0 + 81 - 9t^2 + 1 \leq 0 \Rightarrow t^2 \geq \frac{82}{9}$, also $t_1 > 3$ ($t_1 < -3$ entfällt wegen $t \in \mathbb{N}$.)

Für $t > 3$, $t \in \mathbb{N}$, gilt: $\sphericalangle(\overline{AP_0}\ |\ \overline{AP_t}) \geq 90°$.

c) Gesamtlänge der Strecken:

$$\left|\overline{AP_0}\right| = \sqrt{0+81+1} = \sqrt{82} \approx 9{,}055 \text{ (LE)}$$

$$\left|\overline{AP_1}\right| = \sqrt{4+64+1} = \sqrt{69} \approx 8{,}3066 \text{ (LE)}$$

$$\left|\overline{AP_2}\right| = \sqrt{16+25+1} = \sqrt{42} \approx 6{,}4807 \text{ (LE)}$$

$$\left|\overline{AP_3}\right| = \sqrt{36+0+1} = \sqrt{37} \approx 6{,}0827 \text{ (LE)}$$

$$\sum_{k=0}^{3}\left|\overline{AP_k}\right| = 29{,}925 \text{ (LE)} \approx 29{,}9 \text{ (LE)}$$

d) Gleichung für g_t mit A, $P_t \in g_t$:

$$g_t: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2t \\ 9-t^2 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{N}$$

Gleichung für ε_t mit A, P_t, $P_{t+1} \in \varepsilon_t$:

$$\varepsilon_t: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 2t \\ 9-t^2 \\ -1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2(t+1) \\ 9-(t+1)^2 \\ -1 \end{pmatrix};\ p, q \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{N}$$

Untersuchung, ob $Q(5 \mid 2{,}5 \mid 0) \in \varepsilon_2$:

$$\varepsilon_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 5 &= 0 + 4p + 6q \\ 2{,}5 &= 0 + 5p + 0 \\ 0 &= 1 - p - q \end{aligned}$$

Lösung: $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2} \Rightarrow Q(5 \mid 2{,}5 \mid 0) \in \varepsilon_2$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Zeichnung	2 BE
b)	Winkel, den die Strecken $\overline{AP_0}$ und $\overline{AP_1}$ einschließen;	
	Werte von t, für die gilt: $\sphericalangle(\overline{AP_0} \mid \overline{AP_1}) \geq 90°$	6 BE
c)	Gesamtlänge der Strecken $\overline{AP_0}$, $\overline{AP_1}$, $\overline{AP_2}$ und $\overline{AP_3}$	2 BE
d)	Gleichung für g_t und ε_t; Untersuchung, ob $Q(5 \mid 2{,}5 \mid 0) \in \varepsilon_2$	4 BE
		14 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1997 / 98

Gymnasium

Sachsen

Aufgaben

(Ersttermin und Nachtermin)

Aufgabe A1: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f durch $y = f(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ $(x \in D_f)$

und h mit $y = h(x) = 2 - \ln(x^2 + 1)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Außerdem ist die zweite Ableitung der Funktion f durch

$f''(x) = \frac{-4x^3 + 12x}{(x^2+1)^3}$ $(x \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an und führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Polstellen, Symmetrie, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema, Koordinaten der drei Wendepunkte).
Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz der Wendepunkte kann verzichtet werden.
Zeichnen Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-4 \le x \le 4$.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 11)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion h eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ begrenzen im vierten Quadranten eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Die Gerade t sei Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt T(2; f(2)). Die Gerade s sei das Spiegelbild der Geraden t bei der Spiegelung an der y-Achse.
Die Geraden s und t sowie die x-Achse begrenzen ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

d) Für jedes u $(u \in \mathbb{R},\ 0 < u < 2)$ wird durch die Punkte A(2; 0), $B_u(u; 0)$ und $C_u(u; f(u))$ ein Dreieck bestimmt.
Unter diesen Dreiecken existiert genau eines mit maximalem Flächeninhalt.
Ermitteln Sie für dieses Dreieck den Wert u.
Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz des lokalen Maximums kann verzichtet werden.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

Aufgabe A2: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und h durch

$y = f(x) = 4 \cdot x \cdot e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad y = h(x) = 4 \cdot (1 - x) \cdot e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

a) Weisen Sie nach, dass $h(x) = f'(x)$ gilt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

b) Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema, Wertebereich, Koordinaten der Wendepunkte).
Skizzieren Sie den Graph der Funktion f im Intervall $0 \le x \le 4$.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 10)

c) Vervollständigen Sie für die Funktion h die folgende Wertetabelle und skizzieren Sie den Graph dieser Funktion in das Koordinatensystem von Aufgabenteil b).

x	0		1,5	4
y		0		–0,22

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Graphen von f und h.
Die Gerade t ist Tangente an den Graph der Funktion h im Punkt S.
Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen der Tangente t und der y-Achse.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 7)

d) Der Graph der Funktion h und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

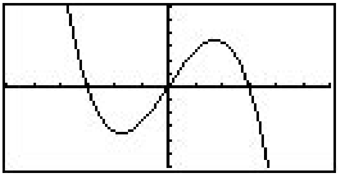
e) Es existiert genau eine Stelle u ($u \in \mathbb{R}$, $u > \frac{1}{2}$), an der die Differenz der Funktionswerte $d(u) = f(u) - h(u)$ maximal ist.
Berechnen Sie diese maximale Differenz.
Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz des lokalen Maximums kann verzichtet werden.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe A3: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Die Abbildung zeigt das mit einem grafikfähigen Taschenrechner erzeugte Bild des Graphen der Funktion f.



a) Der Graph der Funktion f und die x-Achse begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Die Punkte $A_u(-u; f(-u))$ und $C_u(u; f(u))$ $(u \in \mathbb{R}, 0 < u \leq 3)$ sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.
Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt, den ein solches Rechteck haben kann.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

c) Für jedes t $(t \in \mathbb{R})$ mit $\sqrt{3} < t < 3$ existiert durch den Punkt $P_t(t; f(t))$ eine Tangente an den Graph der Funktion f, die die x-Achse in einem Punkt R_t und die y-Achse in einem Punkt S_t schneidet. Der Koordinatenursprung O sowie die Punkte R_t und S_t bilden jeweils ein Dreieck.
Berechnen Sie den Wert t, für den das zugehörige Dreieck OR_tS_t gleichschenklig ist.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe A4: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \ln(x^2 + 3) \quad (x \in D_f)$.

a) Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Symmetrie, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema).
Zeichnen Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-4 \leq x \leq 4$.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

b) Unter allen Tangenten an den Graph der Funktion f existiert genau eine mit maximalem und genau eine mit minimalem Anstieg.
Berechnen Sie den Schnittwinkel dieser Tangenten.
Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz der lokalen Extrema kann verzichtet werden.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

Aufgabe B1: Analytische Geometrie und lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-4; 2; 12)$, $B(5; 5; 6)$ und $S_1(2; 4; 8)$ sowie die Gerade g durch

die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ gegeben.

Außerdem ist in der x-y-Koordinatenebene der Kreis k durch die Gleichung $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$ gegeben.

a) Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B.
Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade h auf.
Weisen Sie nach, dass der Punkt S_1 gemeinsamer Punkt der Geraden g und h ist.
Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den Geraden g und h.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

Ein Kreiskegel ist durch den Punkt S_1 als Spitze und den Kreis k als Grundkreis bestimmt.

b) Die Gerade g schneidet die x-y-Koordinatenebene im Punkt C.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C und weisen Sie nach, dass der Punkt C auf dem Kreis k liegt.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Begründen Sie, dass der Kreiskegel ein gerader Kreiskegel ist.
Berechnen Sie das Volumen dieses Kreiskegels.
Berechnen Sie den Winkel zwischen einer Mantellinie und der Grundkreisebene dieses Kreiskegels (Neigungswinkel des Kreiskegels).
Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S_2 eines weiteren geraden Kreiskegels, der denselben Grundkreis k wie der bisher betrachtete Kreiskegel besitzt und dessen Neigungswinkel 30° beträgt.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

d) Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden mit der Gleichung $4x - 3y - 21 = 0$ und dem Kreis k.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe B2: Analytische Geometrie und lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Dreieck ABC durch die Punkte A(5; 1; –3), B(1; 7; –1) und C(5; 1; 1) gegeben.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Berechnen Sie die Größe des Winkels CAB.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

b) Die Punkte B, C und D(2; 7; 0) liegen in einer Ebene E.
Stellen Sie für die Ebene E je eine Gleichung in Parameterform und in allgemeiner Form auf.
Untersuchen Sie, ob der Punkt F(1; 2; –3) in der Ebene E liegt.

Die Punkte $S_x(\frac{13}{3}; 0; 0)$, $S_y(0; 13; 0)$ und $S_z(0; 0; -\frac{13}{3})$ sind die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen. Die Punkte S_x, S_y und S_z sowie der Koordinatenursprung O sind die Eckpunkte einer Pyramide.
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 7)

c) Der Punkt $S(\frac{13}{5}; \frac{23}{5}; -\frac{1}{5})$ liegt auf der Strecke $\overline{BC}$.
Zeigen Sie, dass das Verhältnis der Streckenlängen $\overline{BS} : \overline{SC}$ genau 2 : 3 beträgt.
Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes P so, dass der Punkt S Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks ABPC ist.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe B3: Analytische Geometrie und lineare Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(2; –1; 3) und B(8; 3; –1) sowie die Gerade h durch

die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Die Gerade g geht durch die Punkte A und B.
Zeigen Sie, dass die Geraden g und h parallel zueinander sind.

Die Geraden g und h liegen in einer Ebene E.
Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E auf.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Basisseite eines gleichschenkligen Dreiecks ABC, dessen Punkt C auf der Geraden h liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes D der Geraden h durch die x-y-Ebene.

Durch den Punkt D verlaufen Geraden mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$ $(u \in \mathbb{R})$.

Ermitteln Sie den Wert u, für den die zugehörige Gerade n senkrecht zur Geraden h verläuft.
Geben Sie die Lage der Geraden n bezüglich der x-y-Ebene an.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe B4: Analytische Geometrie und lineare Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade g durch die Gleichung $24x - 10y + 45 = 0$ und die Gerade h durch die Gleichung $y = x + 1$ gegeben.

a) Durch die y-Achse, die Gerade g und die Gerade h wird ein Dreieck bestimmt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

b) Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt M_1. Der Kreis k_1 hat den Mittelpunkt M_1 und verläuft durch den Koordinatenursprung.
Stellen Sie eine Gleichung des Kreises k_1 auf.

Die Geraden g und h teilen den Kreis k_1 in vier Kreisausschnitte, von denen jeweils zwei den gleichen Flächeninhalt haben.
Berechnen Sie den Flächeninhalt eines der beiden kleineren Kreisausschnitte.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

c) Die Gerade g schneidet die y-Achse im Punkt S. Der Kreis k_2, dessen Mittelpunkt im ersten Quadranten liegt, hat den Radius $\frac{13}{2}$. Dieser Kreis berührt im Punkt S die Gerade g.
Stellen Sie eine Gleichung des Kreises k_2 auf.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe C1: Stochastik

Nadia besitzt eine kleine CD-Sammlung. In einem Regal hat sie ungeordnet fünf CDs von Michael Jackson, vier von DJ Bobo und drei von Aaron Carter. Weitere CDs befinden sich nicht in dem Regal.

a) Weil sie es eines Tages dem Zufall überlassen will, welche Musik sie hört, zieht sie ohne Zurücklegen mit geschlossenen Augen nacheinander zwei CDs aus dem Regal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Beide CDs sind von Michael Jackson.
Ereignis B: Eine gezogene CD ist von DJ Bobo, die andere von Aaron Carter.
Ereignis C: Beide CDs sind von dem selben Interpreten.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Nadia schlägt Silke folgendes vor.
„Die 12 CDs werden gut gemischt. Wenn ich mit verbundenen Augen eine CD von Michael Jackson ziehe, erhalt ich von Dir 3,50 DM, ansonsten muß ich 2,00 DM an Dich bezahlen.“
Ermitteln Sie rechnerisch, für wen das Spiel langfristig vorteilhaft ist.
Welchen Betrag sollte Silke erhalten, damit das Spiel fair wird?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Ein Kaufhaus bietet als Eröffnungsangebot CDs für 10 DM je Stück an. In einer großen Kiste befinden sich viele dieser CDs, welche in Werbehüllen des Kaufhauses verpackt sind, so dass man den Interpreten an der Verpackung nicht erkennen kann. 50% der CDs sind von Michael Jackson, 30% von Aaron Carter, der Rest sind CDs von DJ Bobo. Nadia zieht acht CDs. Die Ziehungen können aufgrund der großen Anzahl von CDs als voneinander unabhängig angenommen werden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
Ereignis D: Genau 5 CDs von Aaron Carter befinden sich unter den gezogenen.
Ereignis E: Höchstens 6 CDs von Michael Jackson befinden sich unter den gezogenen.
Wie viele CDs muß Nadia mindestens ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens eine CD von DJ Bobo zieht, größer als 99% wird?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe C2: Stochastik

Nadja und Silke sind Mitglieder eines Sportschützenvereins. Sie nehmen mit sechs weiteren Schützen an einem vereinsinternen Wettkampf im Tontaubenschießen teil. Der Schießstand verfügt über zwei Wurfmaschinen für Tontauben, so dass die Teilnehmer durch Losentscheid in zwei Gruppen A und B zu je vier Schützen aufgeteilt werden.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Gruppe von vier Schützen zu bilden, wenn aus insgesamt acht Schützen ausgewählt werden kann?
Innerhalb der Vierergruppen wird auch die Startreihenfolge der Schützen ausgelost.
Berechnen Sie die Anzahl unterschiedlicher Startreihenfolgen der Schützen innerhalb einer solchen Vierergruppe.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

b) Nadja wird für die Gruppe A gesetzt, die anderen Schützen werden den Gruppen zugelost.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch Silke in Gruppe A kommt.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

Aufgrund ihrer Trainingsleistungen weiß Nadja, dass ihre Trefferwahrscheinlichkeit bei jedem Schuss 0,8 beträgt.

c) Sie schießt 20 Schuss.
Wie viele Treffer hat Nadja dabei zu erwarten?
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Nadja höchstens 17 mal trifft.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Wieviel Schuss muß Nadja mindestens abgeben, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einen Treffer erzielt?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

e) Die Trefferwahrscheinlichkeit von Silke ist bei jedem Schuss 0,7.
Betrachten Sie folgenden mehrstufigen Zufallsversuch:
In einer ersten Stufe losen Nadja und Silke zunächst aus, wer mit dem Schießen beginnt. Danach schießen sie abwechselnd bis zum ersten Fehlschuss. Nach dem ersten Fehlschuss wird das Schießen abgebrochen.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse für diesen mehrstufigen Zufallsversuch.
Ereignis E: Ein 5. Schuss findet statt.
Ereignis F: Beim 5. Schuss verursacht Nadja einen Fehlschuss.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Erwartungsbilder

Erwartungsbild zu Aufgabe A1: Analysis

a) Definitionsbereich: $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

Nullstellen: $0 = -2x_N \Rightarrow x_N = 0$ (Nullstelle existiert, da Nenner $\neq 0$)

Polstellen: $x_P^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_P^2 = -1$ also keine Polstellen

Symmetrie: $f(-x) = \frac{-2 \cdot (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1} = -f(x)$

$\Rightarrow$ Punksymmetrie zum Koordinatenursprung

Extrempunkte: $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$; $f''(x) = \frac{-4x^3 + 12x}{(x^2 + 1)^3}$

$f'(x_E) = 0$, also $2x_E^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_E^2 = 1 \Rightarrow x_{E1} = 1$; $x_{E2} = -1$

Nachweis:

$f''(-1) = -1 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum; $f(-1) = 1 \Rightarrow P_{max}(-1; 1)$

$f''(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum; $f(1) = -1 \Rightarrow P_{min}(1; -1)$

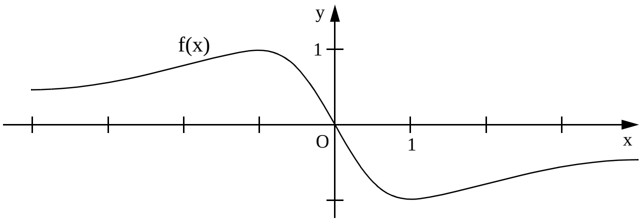
Koordinaten der Wendepunkte: $f''(x_W) = 0$

$-4x_W(x_W^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_{W1} = 0$; $x_{W2} = -\sqrt{3}$; $x_{W3} = \sqrt{3}$

$P_{W1}(0; 0)$; $P_{W2}(-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$; $P_{W3}(\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden.

Graph:



b) Nachweis der Stammfunktion:

$y = h(x) = 2 - \ln(x^2 + 1) \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = -\frac{2x}{x^2 + 1} = f(x)$

h ist also Stammfunktion von f.

Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche:

$$A = -\int_0^2 f(x)\,dx = \int_2^0 f(x)\,dx = [2 - \ln(x^2 + 1)]_2^0 = 2 - 0 - 2 + \ln 5 = \ln 5 \approx 1{,}6$$

(Da die Fläche unter der x-Achse liegt, wurden im zweiten Schritt die Integrationsgrenzen vertauscht, damit die Rechnung einen positiven Wert liefert.)

c) Tangente t: $y = mx + n$

$m = f'(2) = \frac{6}{25}$; $T(2; -\frac{4}{5})$ $\Rightarrow$ $-\frac{4}{5} = \frac{6}{25} \cdot 2 + n$, also $n = -\frac{32}{25}$

Gleichung der Tangente t: $y = \frac{6}{25}x - \frac{32}{25}$

Abszisse des Schnittpunktes der Gerade t mit der x-Achse:

$0 = \frac{6}{25}x - \frac{32}{25}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

Die Grundlinie des gesuchten Dreiecks hat wegen der Symmetrie bei der Spiegelung an der y-Achse die Länge $g = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$. Der Betrag der Höhe des Dreiecks ist im Schnittpunkt mit der y-Achse ablesbar: $h = \frac{32}{25}$.

Flächeninhalt des Dreiecks:

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} \cdot \frac{32}{25} = \frac{512}{75}$

d) $A(2; 0)$; $B_u(u; 0)$; $C_u(u; f(u))$

Zielfunktion:

$A(u) = \frac{(2-u)\,(-f(u))}{2} = \frac{1}{2}[(2-u)(\frac{2u}{u^2+1})] = \frac{-u^2+2u}{u^2+1}$

$A'(u) = \frac{(-2u+2)\,(u^2+1) - (-u^2+2u)\cdot 2u}{(u^2+1)^2} = \frac{-2u^2-2u+2}{(u^2+1)^2}$

$A'(u) = 0$ $\Rightarrow$ $-2u^2 - 2u + 2 = 0$ $\Rightarrow$ $u^2 + u - 1 = 0$

damit gilt: $u_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ (entfällt); $u_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62$ (trifft zu)

Bewertungsvorschlag:

a) Definitionsbereich; Symmetrie; Nullstelle; Aussage zu Polstellen; 1. Ableitung; Extremstellen; Nachweis der Art der Extrema; Koordinaten der lokalen Extrempunkte; Wendestellen; Koordinaten der Wendepunkte; Graph — 11 BE

b) Nachweis der Stammfunktion; Ansatz für den Flächeninhalt; Flächeninhalt — 3 BE

c) y-Koordinate des Punktes T; Ansatz für den Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse; Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse; Abszisse des Schnittpunktes der Geraden t mit der x-Achse; Ansatz für den Flächeninhalt des Dreiecks; Flächeninhalt des Dreiecks — 6 BE

d) Zielfunktion; Ansatz für die 1. Ableitung; 1. Ableitung; quadratische Gleichung; Extremstelle — 5 BE

25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A2: Analysis

a) $f(x) = 4x \cdot e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$

Nachweis: $f'(x) = 4e^{-x} - 4xe^{-x} = 4(1-x)e^{-x} = h(x)$

b) $f'(x) = h(x); \quad f''(x) = h'(x) = 4(-2+x)e^{-x}; \quad f'''(x) = h''(x) = 4(3-x)e^{-x}$

Nullstelle: $0 = 4x_N e^{-x_N} \quad \Rightarrow \quad x_N = 0$

lokale Extrempunkte:

$f'(x_E) = 0$ genau dann, wenn $-x_E + 1 = 0$, also $x_E = 1$

Nachweis:

$f''(1) = -\frac{4}{e} < 0 \quad \Rightarrow$ lokales Maximum; $\quad f(1) = \frac{4}{e} \quad \Rightarrow \quad P_{max}(1; \frac{4}{e})$

Wertebereich: $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \leq \frac{4}{e}\}$

Koordinaten der Wendepunkte:

$f''(x_W) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 + x_W = 0$

also $x_W = 2$. $\quad f'''(2) = \frac{4}{e^2} \neq 0$

$x_W = 2$ ist Wendestelle.

Wendepunkt: $P_W(2; \frac{8}{e^2})$

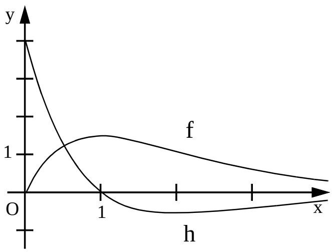


Abb. rechts:
Graphen der Funktion f und der Funktion h (aus Aufgabenteil c)).

c)

x	0	**1**	1,5	4
y	**4**	0	**–0,45**	–0,22

Koordinaten des Schnittpunktes S:

$4xe^{-x} = (-4x+4)e^{-x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}; \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{e}} \quad \Rightarrow \quad S(\frac{1}{2}; \frac{2}{\sqrt{e}})$

Tangente an h:

$h'(\frac{1}{2}) = f''(\frac{1}{2}) = 4e^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\frac{3}{2}) = -\frac{6}{\sqrt{e}}$ (Anstieg der Gerade t)

Schnittwinkel mit der x-Achse: $\tan\tilde{\alpha} = 74{,}635°$

Schnittwinkel mit der y-Achse: $\alpha = 90° - \tilde{\alpha} = 15{,}36°$

d) f ist eine Stammfunktion der Funktion h.

$$A = \int_0^1 h(x)\,dx = [f(x)]_0^1 = [4x \cdot e^{-x}]_0^1 = \frac{4}{e} \approx 1{,}47$$

e) $d(u) = f(u) - h(u) = 4ue^{-u} - 4(1-u)e^{-u} = 4e^{-u}(2u-1)$; $\quad d'(u) = 4e^{-u}(-2u+3)$

maximale Differenz:

$d'(u) = 0 \quad\Rightarrow\quad -2u + 3 = 0 \quad \text{also} \quad u = \frac{3}{2}; \quad d(\frac{3}{2}) = \frac{8}{\sqrt{e^3}} \approx 1{,}785$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis	1 BE
b)	Nullstelle; 2. Ableitung; 3. Ableitung; Extremstelle; Nachweis des Maximums; Koordinaten des lokalen Maximums; Wertebereich; Wendestelle; Koordinaten des Wendepunktes mit Nachweis; Graph	10 BE
c)	Wertetabelle; Graph der Funktion h; Ansatz für die Koordinaten des Punktes S; Koordinaten des Punktes S; Anstieg der Tangente; Ansatz für den Schnittwinkel; Schnittwinkel	7 BE
d)	Ansatz für den Flächeninhalt; Erkennen der Stammfunktion; Flächeninhalt	3 BE
e)	Zielfunktion; 1. Ableitung; Extremstelle; maximale Differenz	4 BE
		25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A3: Analysis

a) Die Nullstellen der Funktion f im I. Quadranten sind die Integrationsgrenzen.

$0 = -\frac{1}{3}x^3 + 3x \quad\Rightarrow\quad 0 = x(-\frac{1}{3}x^2 + 3) \quad\Rightarrow\quad x_1 = 0;\ \ x_2 = 3;\ \ x_3 = -3$ (entfällt)

Flächeninhalt: $A = \int_0^3 (-\frac{1}{3}x^3 + 3x)\,dx = [-\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2]_0^3 = \frac{27}{4} = 6{,}75$

b) Zielfunktion: $A(u) = 2u \cdot 2f(u)$ (wegen Punktsymmetrie zu O(0; 0))

$A(u) = 2u \cdot 2(-\frac{1}{3}u^3 + 3u) = -\frac{4}{3}u^4 + 12u^2$; $A'(u) = u(-\frac{16}{3}u^2 + 24)$

$\Rightarrow \quad u_1 = 0$ (entfällt); $u_2 = \sqrt{\frac{9}{2}}$ (trifft zu); $u_3 = -\sqrt{\frac{9}{2}}$ (entfällt)

Prüfung einer hinreichenden Bedingung:

$A''(u) = -16u^2 + 24$; $A''(\sqrt{\frac{9}{2}}) = -48 < 0 \quad \Rightarrow$ lokales Maximum; $A(\sqrt{\frac{9}{2}}) = 27$

Der maximale Flächeninhalt beträgt 27.

c) 1. Ableitung von f: $f'(x) = -x^2 + 3$

Das lokale Extremum im I. Quadranten liegt bei der Extremstelle $x_E = \sqrt{3}$.
Laut vorliegendem Graph handelt es sich um ein lokales Maximum. Die Funktion f ist also im Intervall $\sqrt{3} < x < 3$ monoton fallend.
Da die beschriebene Tangente im I. Quadranten ein gleichschenkliges Dreieck mit den Koordinatenachsen bilden soll, können die entsprechenden Schenkel nur gleichlange Abschnitte der Koordinatenachsen sein. Daraus folgt, dass die gesuchte Tangente den Anstieg –1 hat.
Für die x-Koordinate des Punktes P gilt also: $f'(t) = -1$.

$-t^2 + 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2$; $t_2 = -2$ (liegt nicht im Intervall)

Der gesuchte Wert ist $t = 2$.

Lösungsvariante:

Tangente: $y = mx + n$ mit $m = f'(t)$

$y = (-t^2 + 3) \cdot x + n$ und mit $P(t; f(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t$ folgt $n = \frac{2}{3}t^3$

$\Rightarrow$ Gleichung der Tangente: $y = (-t^2 + 3) \cdot x + \frac{2}{3}t^3$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$R_t(\frac{-\frac{2}{3}t^3}{-t^2 + 3}; 0)$; $S_t(0; \frac{2}{3}t^3) \quad \Rightarrow \quad OR_tS_t$ gleichschenklig, falls $\frac{-\frac{2}{3}t^3}{-t^2 + 3} = \frac{2}{3}t^3$

$\Rightarrow \quad -\frac{2}{3}t^3 = \frac{2}{3}t^3(-t^2 + 3) \quad \Rightarrow \quad -1 = -t^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad 0 = -t^2 + 4$

$t_1 = 2$; $t_2 = -2$ (entfällt); Der gesuchte Wert ist $t = 2$

Bewertungsvorschlag:

a)	Integrationsgrenzen; Stammfunktion; Flächeninhalt	3 BE
b)	Zielfunktion; Extremstelle; Nachweis des Maximums; Flächeninhalt	4 BE
c)	1. Ableitung; Anstieg der Tangente; Wert t	3 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4: Analysis

a) Symmetrie: $f(-x) = \ln((-x)^2 + 3) = \ln(x^2 + 3) = f(x)$
f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

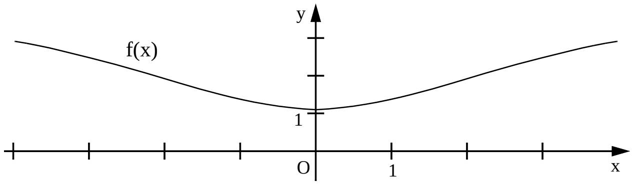
Extrempunkte: $f'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$; $f''(x) = \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$

$f'(x_E) = 0$, also $2x_E = 0 \Rightarrow x_E = 0 \quad (x_E^2 + 3) \neq 0)$

Nachweis:

$f''(0) = \frac{2}{3} > 0 \quad \Rightarrow$ lokales Minimum; $\quad f(0) = \ln 3 \Rightarrow P_{min}(0; \ln 3)$

Graph:



b) Der Anstieg entspricht der 1. Ableitung. Gesucht sind also die Extremstellen der 1. Ableitung der Funktion f.

Zielfunktion: $z(x) = f'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$; $z'(x) = f''(x) = \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$

$z'(x_E) = 0$, also $-2x_E^2 + 6 = 0 \Rightarrow x_{E_{1,2}} = \pm\sqrt{3}$

Aus dem Verlauf des Graphen ist klar:

Der maximale Anstieg liegt bei $x_{E_1} = \sqrt{3}$ und beträgt $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Der minimale Anstieg liegt bei $x_{E_2} = -\sqrt{3}$ und beträgt $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Auf den Nachweis der Extrema kann verzichtet werden, da deren Existenz in der Aufgabenstellung vorausgesetzt wird.

Lösungsvariante 1:

$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-\frac{2}{3}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{9}\cdot 3}\right| = \sqrt{3}$; Der Schnittwinkel beträgt 60°.

Lösungsvariante 2:

Anstieg der ersten Tangente: $\tan\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30°$

Anstieg der zweiten Tangente: $\tan\beta = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = 150°$

Der eingeschlossene Winkel beträgt 120° und der Schnittwinkel damit 60°.

Bewertungsvorschlag:

a) Symmetrie; 1. Ableitung; Extremstelle und Nachweis; Koordinaten der lokalen Extrempunkte; Graph — 5 BE

b) Zielfunktion; Extremstellen; maximaler und minimaler Anstieg; Ansatz für den Schnittwinkel; Schnittwinkel — 5 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B1: Analyt. Geometrie/lin. Algebra

a) Gleichung der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$; $S_1(2;\, 4;\, 8)$

Punktprobe für g: $10 + 4t = 2 \quad \Rightarrow \quad t = -2$

Aus der Gleichung von g ergibt sich für $t = -2$: $\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_1 \in g$

Punktprobe für h: $-4 + 9s = 2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{3}$

Aus der Gleichung von h ergibt sich für $s = \frac{2}{3}$: $\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_1 \in h$

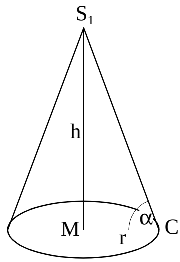
$\Rightarrow$ S_1 ist gemeinsamer Punkt der Geraden g und h.

Der Schnittwinkel α ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Geraden g und h.

$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right| = \frac{21}{\sqrt{89}\sqrt{126}} = 0{,}1983 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 78{,}56°$

b) Schnitt der Geraden g mit der x-y-Ebene: $z = 0$
$24 + 8t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -3$ also $C(-2;\, 7;\, 0)$
Nachweis, dass C auf dem Kreis liegt:
$(-2-2)^2 + (7-4)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad 25 = 25$ (wahre Aussage) $\quad \Rightarrow \quad C \in k$

c) Der Mittelpunkt M des Grundflächenkreises ist der Punkt $M(2;\, 4;\, 0)$. Die Spitze des Kegels ist der Punkt $S_1(2;\, 4;\, 8)$. Da der Kreis k in der x-y-Ebene liegt und sich die Punkte S_1 und M nur in der z-Koordinate unterscheiden, liegt S_1 senkrecht über M. Deshalb ist der Kreiskegel gerade.



Volumen des Kreiskegels:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 8 \quad (r = 5;\ h = 8)$

$= \frac{200}{3}\pi \approx 209{,}44$

Neigungswinkel:

$\tan\alpha = \frac{\overline{MS_1}}{r} = \frac{h}{r} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 58{,}0°$

Lösungsvariante:

Berechnung des Winkels zwischen $\overrightarrow{CM}$ und $\overrightarrow{CS_1}$

$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{CS_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{16+9+0}{\sqrt{25}\sqrt{89}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 58{,}0°$

Koordinaten der Spitze S_2:

$\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3};\quad \tan\alpha = \frac{h}{r} = \frac{1}{3}\sqrt{3};\ r = 5 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{5}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}89$

$S_2(2;\ 4;\ \frac{5}{3}\sqrt{3})$ oder $S_2(2;\ 4;\ -\frac{5}{3}\sqrt{3})$

d) Gerade: $4x - 3y - 21 = 0$ bzw. $y = \frac{4}{3}x - 7$

Schnitt Kreis – Gerade:

$25 = (x-2)^2 + (\frac{4}{3}x - 7 - 4)^2 = x^2 + 4 - 4x + \frac{16}{9}x^2 + 121 - \frac{88}{3}x$

$\Rightarrow \quad x^2 - 12x + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1;\,2} = 6 \pm \sqrt{0} = 6$

Da die Gerade mit dem Kreis nur für x = 6 gemeinsame Punkte besitzen kann und nicht parallel zur y-Achse verläuft, ist sie Tangente an den Kreis k.

Bewertungsvorschlag:

a) Gleichung der Geraden h; Nachweis für $S_1 \in g$; Nachweis für $S_1 \in h$; Ansatz für den Schnittwinkel; Schnittwinkel — 5 BE

b) Koordinaten des Punktes C; Nachweis für $C \in k$ — 2 BE

c) Begründung; Volumen des Kreiskegels; Neigungswinkel des Kreiskegels; Ansatz für die Koordinaten von S_2; Koordinaten von S_2 — 5 BE

d) Ansatz für die Berechnung der gemeinsamen Punkte; Lösung der quadratischen Gleichung; Schlussfolgerung — 3 BE

15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B2: Analyt. Geometrie/lin. Algebra

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overline{AB} = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$; $\overline{BC} = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

$\overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

Winkel CAB: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{8}{2 \cdot \sqrt{14} \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{14}} = 0{,}2673$

$\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \sphericalangle CAB = 74{,}5°$

b) Gleichung der Ebene E in Parameterform:

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R})$

Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(I)} & x = & 1 + 4t + s \\ \text{(II)} & y = & 7 - 6t \\ \text{(III)} & z = & -1 + 2t + s \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(IV)} = \text{(III)} - \text{(I)} & z - x = -2 - 2t \\ & \\ \text{(II)} - 3\text{(IV)} & y - 3z + 3x = 13 \end{array}$$

Damit ist die parameterfreie Ebenengleichung gefunden: $3x + y - 3z = 13$.

Punktprobe für F(1; 2; –3): $3 \cdot 1 + 2 - 3(-3) = 14$; $14 \neq 13 \Rightarrow F \notin E$

Wähle als Grundfläche der Pyramide die Fläche OS_xS_y:

Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck, da das Koordinatensystem kartesisch ist. $A_G = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{3} \cdot 13 = \frac{169}{6}$

Volumen der Pyramide: $h = \frac{13}{3}$; $V = \frac{1}{3}A_G h = \frac{1}{3} \cdot \frac{169}{6} \cdot \frac{13}{3} = \frac{2\,197}{54} \approx 40{,}7$

c) $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SC} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overline{BS} = \frac{1}{5}\sqrt{8^2 + 12^2 + 4^2} = \frac{4}{5}\sqrt{14}$; $\overline{SC} = \frac{1}{5}\sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2} = \frac{6}{5}\sqrt{14}$

Verhältnis: $\overline{BS} : \overline{SC} = \frac{4\sqrt{14}}{5} : \frac{6\sqrt{14}}{5} = 4 : 6 = 2 : 3$

Lösungsvariante: Bestimmung des Verhältnisses

g(BS): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 \\ 23 \\ -1 \end{pmatrix}$

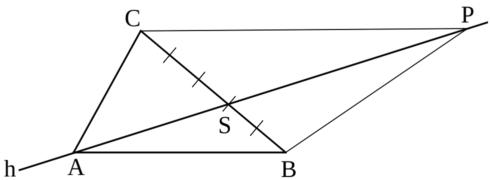
$\Rightarrow \quad t = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{BS} : \overline{SC} = 2 : 3$

Punkt P:
Der Punkt P liegt auf der Geraden h durch A und S.

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 \\ 18 \\ 14 \end{pmatrix}$

$(t \in \mathbb{R})$

Skizze (nicht maßstäblich):



Für t = 1 wird der Punkt S festgelegt, für t = 0 der Punkt A. Um ein Viereck mit den genannten Eigenschaften zu erhalten, wählt man ein beliebiges t $(t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, $t \neq 1)$ und setzt dieses in die Gleichung der Gerade h ein. Für t > 1 erhält man ein konvexes Viereck (war in der Aufgabenstellung nicht gefordert).

Beispiel: $t = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad P(-1; 10; 4)$

Bewertungsvorschlag:

a)	Länge einer Dreiecksseite; Nachweis der Gleichschenkligkeit; Ansatz für die Größe des Winkels; Größe des Winkels CAB	4 BE
b)	Gleichung der Ebene E in Parameterform; Substitution eines Parameters; Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form; Aussage zum Punkt F; Flächeninhalt der Grundfläche; Ansatz für das Volumen; Volumen	7 BE
c)	Parameterwert bzw. Länge einer Teilstrecke; Nachweis; Ansatz für die Koordinaten eines Punktes P; Koordinaten eines Punktes P	4 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B3: Analyt. Geometrie/lin. Algebra

a)

Gleichung der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$

Nachweis der Parallelität:

$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Die Richtungsvektoren der Geraden g und h sind parallel, also sind auch die Geraden g und h parallel.

(Der Nachweis, dass beide Geraden nicht identisch sind, war nicht zu führen, ist aber durch eine Punktprobe leicht zu realisieren.)

Ebene E:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

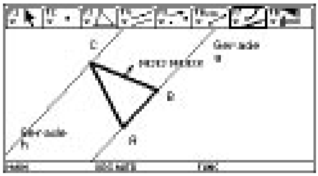
$$\left.\begin{array}{rrl} \text{(I)} & x = & 3s + 2t \\ \text{(II)} & y = & -9 + 2s + 8t \\ \text{(III)} & z = & 9 - 2s - 6t \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} -4 \cdot \text{(I)} + \text{(II)} & -4x + y = -9 - 10s \\ 3 \cdot \text{(I)} + \text{(III)} & 3x + z = 9 + 7s \end{array}$$

Multipliziert man die erste Gleichung des rechten Gleichungssystems mit 7, die zweite mit 10 und addiert beide Produkte, so folgt eine parameterfreie Gleichung der Ebene E: $2x + 7y + 10z - 27 = 0$.

(Die Angabe der parameterfreien Ebenengleichung war nicht gefordert.)

b) Der Punkt C liegt auf der Gerade h mit der Gleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$



Für die Längen d der Schenkel des Dreiecks gilt somit:

$$d(\overline{AC}) = \sqrt{(3s-2)^2 + (2s-8)^2 + (-2s+6)^2}$$

$$d(\overline{BC}) = \sqrt{(3s-8)^2 + (2s-12)^2 + (-2s+10)^2}$$

Durch Gleichsetzen (gleichschenkliges Dreieck) und Quadrieren erhält man:

$$(3s-2)^2 + (2s-8)^2 + (-2s+6)^2 = (3s-8)^2 + (2s-12)^2 + (-2s+10)^2$$

$$\Rightarrow \quad 68s = 204 \quad \Rightarrow \quad s = 3$$

Einsetzen von s in die Gleichung der Geraden h liefert die Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OC}$ und damit des Punktes C: C(9; –3; 3).

c) Für den Durchstoßpunkt D gilt: $z = 0$.

Aus $9 - 2s = 0$ folgt $s = 4{,}5$ und damit $D(\frac{27}{3}; 0; 0)$.

Bedingung für die Orthogonalität der Geraden(schar) zur Geraden h:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0, \text{ also } 6 + 2u \quad \Rightarrow \quad u = -3$$

Lagebeziehung der Geraden n zur x-y-Ebene:
Die Gerade n liegt in der x-y-Ebene, denn sie enthält den Punkt D, der in der x-y-Ebene liegt und die z-Koordinate des Richtungsvektors der Geraden n ist der Nullvektor $\vec{o}$, er weist also nicht aus der x-y-Ebene heraus.

Bewertungsvorschlag:

a) Ansatz für den Nachweis der Parallelität; Nachweis der Parallelität; Gleichung der Ebene E — 3 BE

b) Ansatz; Parameter der Geradengleichung; Koordinaten von C — 3 BE

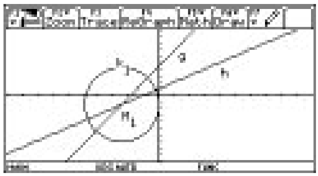
c) Koordinaten von D; Ansatz für den Wert u; Wert u; Aussage zur Lage der Geraden n — 4 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B4: Analyt. Geometrie/lin. Algebra

a) Gerade g: $24x - 10y + 45 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2{,}4x + 4{,}5$; Gerade h: $y = x + 1$

Mit Hilfe eines grafikfähigen Taschenrechners kann man die Geraden und weiter in Aufgabenteil b) benötigte Figuren veranschaulichen.



Schnittstelle:
$x + 1 = 2{,}4x + 4{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = -2{,}5$

Flächeninhalt: $g = 4{,}5 - 1 = 3{,}5$; $h = 2{,}5$

$A_\Delta = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}5 = 4{,}375$

b) $M_1(-2{,}5; -1{,}5) \quad \Rightarrow$ Radius: $r_1 = \sqrt{(-2{,}5)^2 + (-1{,}5)^2} = \sqrt{8{,}5}$

Gleichung des Kreises k_1: $(x + 2{,}5)^2 + (y + 1{,}5)^2 = 8{,}5$

Winkel zwischen den Geraden g und h:

$\tan\alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2{,}4 - 1}{1 + 2{,}4 \cdot 1}\right| = \frac{1{,}4}{3{,}4} = 0{,}41176 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 22{,}38°$

α ist der Winkel des gesuchten Kreissektors, da er der kleinere der beiden Winkel ist.

Flächeninhalt des Kreissektors: $A_{Kreis} = \pi r^2 = \pi \cdot 8{,}5 \approx 26{,}70$

$\frac{A_\alpha}{A_{Kreis}} = \frac{\alpha}{360°} \quad \Rightarrow \quad A_\alpha = \frac{22{,}38° \cdot 26{,}70}{360°} \approx 1{,}66$

c) S(0; 4,5); Gerade g: $y = 2{,}4x + 4{,}5$ bzw. $y = \frac{12}{5}x + \frac{9}{2}$

Der Mittelpunkt M_2 des Kreises k_2 liegt auf der Senkrechten zur Gerade g im Punkt S und hat vom Punkt S den Abstand $r_2 = \frac{13}{2}$.

Gleichung der Senkrechten zur Gerade g im Punkt S: $y = -\frac{5}{12}x + \frac{9}{2}$

Für $M_2(x_2;\, y_2)$ gilt: $y_2 = -\frac{5}{12}x_2 + \frac{9}{2}$

$r_2 = \frac{13}{2} = \sqrt{(0 - x_2)^2 + \left(\frac{9}{2} - \left(-\frac{5}{12}x_2 + \frac{9}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{144}(x_2)^2} \quad \Rightarrow \quad (x_2)^2 = 36$

$x_{2_1} = 6$; $x_{2_2} = -6$ (entfällt, da nicht im ersten Quadranten)

damit folgt: $y_2 = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 2$ also $M_2(6;\, 2)$

Gleichung des Kreises k_2: $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = \frac{169}{4}$

Bewertungsvorschlag:

a)	x-Koordinate des Schnittpunktes der Geraden g, h; Flächeninhalt	2 BE
b)	Radius des Kreises k_1; Gleichung des Kreises k_1; Schnittwinkel; Flächeninhalt des Kreissektors	4 BE
c)	Gleichung der Senkrechten zur Gerade g im Punkt S; Ansatz für die Koordinaten des Punktes M_2; x-Koordinate des Punktes M_2; Gleichung des Kreises k_2	4 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C1: Stochastik

a) $P(A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33} \approx 0{,}1515$; $P(B) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{2}{11} \approx 0{,}1818$;

$P(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{19}{66} \approx 0{,}2879$

b) G … Gewinn von Nadia; Verteilung von G:

g_i in DM	3,50	–2,00
$P(G = g_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$

Erwartungswert: $E(G) = 3{,}50 \cdot \frac{5}{12} - 2{,}00 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{24} \approx 0{,}2917$ (DM)

Das Spiel ist langfristig für Nadia vorteilhaft, da der durchschnittliche Gewinn pro Spiel etwa 29 Pfennige beträgt.

Bedingung für ein faires Spiel: $E(G) = 0$

$0 = 3{,}50 \cdot \frac{5}{12} - g_2 \cdot \frac{7}{12} \quad \Rightarrow \quad g_2 = 2{,}50$; Silke sollte 2,50 DM erhalten.

c) X … Anzahl der gezogenen CDs von Aaron Carter
X ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = 0{,}3$.
$P(D) = P(X = 5) = \binom{8}{5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^3 \approx 0{,}0467$
Y … Anzahl der gezogenen CDs von Michael Jackson
Y ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = 0{,}5$.
$P(E) = P(Y \le 6) = 1 - P(Y \ge 7) = 1 - \binom{8}{7} \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5 - \binom{8}{8} \cdot 0{,}5^8 \approx 0{,}9648$
Z … Anzahl der gezogenen CDs von DJ Bobo
Z ist binomialverteilt mit $p = 0{,}2$.
Wahrscheinlichkeit dafür, dass in n Ziehungen keine CD von DJ Bobo gezogen wird: $0{,}8^n$.
$1 - 0{,}8^n > 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad 0{,}01 > 0{,}8^n \quad \Rightarrow \quad \ln 0{,}01 > n \cdot \ln 0{,}8$
also: $n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}64$. Sie muss mindestens 21 CDs ziehen.

Bewertungsvorschlag:

a)	Wahrscheinlichkeiten P(A), P(B) und P(C)	3 BE
b)	Wahrscheinlichkeitsverteilung; Erwartungswert und Antwort; Betrag für faires Spiel	3 BE
c)	Wahrscheinlichkeiten P(D) und P(E); Ansatz für die Anzahl; Anzahl	4 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C2: Stochastik

a) $\binom{8}{4} = 70$; Anordnung von 4 Elementen ohne Wiederholung: $4! = 24$
24 Startreihenfolgen sind möglich.

b) (Auswahl von 4 Schützen aus 8 ohne Wiederholung)
Wenn Nadja bereits in Gruppe A ist, stehen dort noch drei freie Plätze von insgesamt sieben freien Plätzen zur Verfügung. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Silke auch in Gruppe A kommt, beträgt also $\frac{3}{7}$.

c) X … Anzahl der Treffer bei 20 Versuchen
X ist binomialverteilt mit n = 20 und p = 0,8.

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}8 = 16$
Nadja hat 16 Treffer zu erwarten.
$P(X \leq 17) = 1 - P(X \geq 18) = 1 - [P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20)]$
$= 1 - \binom{20}{18} \cdot 0{,}8^{18} \cdot 0{,}2^2 - \binom{20}{19} \cdot 0{,}8^{19} \cdot 0{,}2^1 - \binom{20}{20} \cdot 0{,}8^{20} \cdot 0{,}2^0 \approx 0{,}7939$

d) X … Anzahl der Treffer bei n Versuchen
X ist binomialverteilt mit p = 0,8.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad P(X = 0) < 0{,}01 \quad$ also $\quad 0{,}2^n < 0{,}01$
Es folgt: $n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}2} \approx 2{,}86$; Nadja muss mindestens 3 Schuss abgeben.

e) TN … Treffer von Nadja; TS … Treffer von Silke;
FN … Fehlschuss von Nadja

1.Schuss 2.Schuss 3.Schuss 4.Schuss 5.Schuss

$\xrightarrow{0{,}5}$ Nadja beginnt $\xrightarrow{0{,}8}$ TN $\xrightarrow{0{,}7}$ TS $\xrightarrow{0{,}8}$ TN $\xrightarrow{0{,}7}$ TS $\xrightarrow{0{,}2}$ FN

$\xrightarrow{0{,}5}$ Silke beginnt $\xrightarrow{0{,}7}$ TS $\xrightarrow{0{,}8}$ TN $\xrightarrow{0{,}7}$ TS $\xrightarrow{0{,}8}$ TN

Der 5. Schuss wird nur dann von Nadja abgegeben, wenn sie auch das Schießen beginnt.
$P(F) = 0{,}5 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}1568$; $\quad P(E) = 2(0{,}5 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}8^2) \approx 0{,}3134$

Bewertungsvorschlag:

a)	Anzahl der Möglichkeiten; Anzahl der Startreihenfolgen	2 BE
b)	Wahrscheinlichkeit	1 BE
c)	Erwartungswert; Wahrscheinlichkeit	2 BE
d)	Ansatz für die Anzahl; Lösung der Ungleichung; Anzahl	3 BE
e)	Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E und F	2 BE
		10 BE

Abiturprüfung Grundkurs

1997 / 98

Gymnasium

Sachsen-Anhalt

Hinweis:
Der Prüfling hatte nach Empfehlung durch die Lehrkraft je eine Aufgabe aus den Gebieten G1, G2 und G3 zur Bearbeitung auszuwählen.

Gebiet G1: Analysis / Aufgabe 1.1

Gegeben ist Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1}{6}\,x \cdot (x-3)^2,\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Graph sei mit G bezeichnet.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f.
   Ermitteln Sie die Art und die Lage der lokalen Extrempunkte des Graphen G.
   Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $-1 \le x \le 6$.
b) Im Koordinatenursprung wird die Tangente t an den Graphen G gelegt.
   Die Tangente t und der Graph G begrenzen eine Fläche vollständig.
   Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

Im folgenden sollen die Funktion f und deren Ableitungsfunktion f' im Intervall $0{,}5 \le x \le 4$ betrachtet werden.

c) Weisen Sie nach, daß sich die Graphen der Funktion f und der Ableitungsfunktion f' in diesem Intervall in genau zwei Punkten A und B schneiden.
   Die Schnittstellen seien x_A und x_B.

   Im Intervall $x_A < x < x_B$ schneidet jede Gerade mit der Gleichung $x = c,\ c \in \mathbb{R}$, den Graphen von f in einem Punkt Q und den Graphen von f' in einem Punkt R.
   Berechnen Sie den Wert für c für den Fall, daß die Länge der Strecke $\overline{QR}$ maximal wird.

Gebiet G1: Analysis / Aufgabe 1.2

Eine Bakterienpopulation kann in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) als Funktion dargestellt werden durch $B(t) = 10 + t^2 e^{4-t},\ t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 6$.

a) Berechnen Sie den Anfangswert B(0) und den Endwert B(6).
   Zeigen Sie, daß für $t > 0$ auch $B(t) > 0$ gilt.
   Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion B und bestimmen Sie dessen Art.

   Der Zuwachs B'(t) ist am größten zum Zeitpunkt $t_1 = 2 - \sqrt{2}$.
   Berechnen Sie den Wert von $B'(t_1)$.
   Zeichnen Sie den Graphen der Funktion B.
b) Die Funktion B soll im Intervall $0 \le t \le 3$ durch eine quadratische Funktion f mit $f(t) = at^2 + bt + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$, angenähert werden.
   Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c für den Fall, daß der Graph der Funktion f durch den Punkt $P(0 \mid 10)$ geht und den Scheitelpunkt im Hochpunkt des Graphen der Funktion B hat.
   [Ergebnis zur Kontrolle: $f(t) = -e^2t^2 + 4e^2t + 10$]

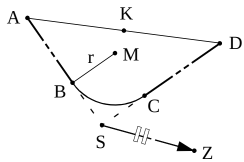
c) Durch die Bakterien wird ein Enzym produziert, dessen Ausbeute (in Milligramm) der Fläche unter dem Graphen der Funktion B entspricht.
Berechnen Sie die Ausbeute nach 3 Stunden, indem Sie die Funktion B durch die Funktion f ersetzen.

Gebiet G2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.1

Die Lage von Punkten in einem ebenen Gelände wird in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben: $A(-12\,|\,9)$, $B(0\,|\,0)$, $C(7\,|\,1)$ und $D(22\,|\,21)$.

a) Stellen Sie je eine Gleichung der Geraden AB und der Geraden CD auf.
Die Geraden AB und CD schneiden einander im Punkt S.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes.
Begründen Sie, daß die Geraden AB und CD rechtwinklig zueinander verlaufen.

Die Geländepunkte A, B, C und D bestimmen den Verlauf eines Abschnittes einer Teststrecke. Diese ist zwischen den Punkten A und B sowie zwischen den Punkten C und D geradlinig. Zwischen den Punkten B und C hat sie die Form eines Viertelkreises mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. (Die Streckenbreite bleibt unberücksichtigt.) Die Geraden AB und CD sind Tangenten des Viertelkreises.
In der Mitte der Strecke $\overline{AD}$ soll im Geländepunkt K ein Kontrollturm gebaut werden.



Skizze nicht maßstäblich

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes K und zeigen Sie, daß bei einem Sichtkreis mit dem Radius $r_S = \overline{AK}$ der gesamte Teststreckenabschnitt überblickt werden kann.

Im Geländepunkt S (aus Aufgabe a) wird ein Meßgerät installiert, das zur Erfassung von Daten in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ausgerichtet wird. Die Daten werden durch Funk zur Zentralstelle übermittelt. Dazu ist die Antenne in der Geländeebene vom Punkt S aus zum Punkt $Z(40\,|\,2)$ zu richten.

c) Aus technischen Gründen sollen die Vektoren $\vec{v}$ und $\overrightarrow{SZ}$ einen stumpfen Winkel einschließen.
Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.
Weisen Sie nach, daß der Vektor $\vec{v}$ in Richtung des Mittelpunktes M des Viertelkreises gerichtet ist.

Gebiet G2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.2

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,4\,|\,2)$, $C(0\,|\,4\,|\,2)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$ und $S(2\,|\,-1\,|\,7)$.
Das Viereck ABCD ist die rechteckige Grundfläche und der Punkt S ist die Spitze einer Pyramide. Der Punkt M sei der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche.

a) Weisen Sie nach, daß die Pyramide ABCDS eine gerade Pyramide ist, indem Sie zeigen, daß der Vektor $\overrightarrow{MS}$ senkrecht zu den Vektoren $\overrightarrow{MA}$ und $\overrightarrow{MB}$ verläuft.

b) Der Punkt E sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{BS}$. Die Punkte A, D und E bestimmen eine Ebene. Sie wird von der Pyramidenhöhe $\overline{MS}$ in einem Punkt T durchstoßen.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T.

c) Die Punkte M und S bestimmen eine Gerade g_3.
Auf der Geraden g_3 gibt es genau einen Punkt R derart, daß die Punkte A, B, C, D und S den gleichen Abstand von diesem Punkt haben.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes R.

Gebiet G3: Stochastik / Aufgabe 3.1

Bei der Rekonstruktion eines Bankgebäudes sollen in alle Türen elektronische Schlösser der Firma „Sicherheit“ eingebaut werden. Die Schlösser haben eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 10%.

a) Zur Kontrolle entnimmt die Firma einer großen Fertigungsserie 25 Schlösser zufällig.
Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der ausfallenden Schlösser bei der Stichprobe, und stellen Sie fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der ausfallenden Schlösser um höchstens 1 vom Erwartungswert abweicht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Mindestens 20 Schlösser sind funktionstüchtig.
B: Höchstens 2 der entnommenen Schlösser fallen aus.

b) Die Bank läßt überprüfen, ob von den inzwischen gelieferten Schlössern tatsächlich nicht mehr als 10% ausfallen. Es wird ermittelt, daß von 20 überprüften Schlössern 2 ausfallen.
Prüfen Sie auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$, ob die Ausfallwahrscheinlichkeit korrekt angegeben worden ist.

c) Um die Sicherheit zu erhöhen, werden in die beiden Außentüren des Kundenraumes zusätzlich zu den vorhandenen jeweils zwei elektronische Schlösser eingebaut, die eine Ausfallwahrscheinlichkeit von p = 0,05 haben. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Kundenraum durch die elektronischen (unabhängig voneinander funktionierenden) Schlösser gesichert ist.

Anmerkung: Im Bedarfsfall konnte den Prüflingen eine Kopie des nachfolgenden-Tabellenblatts zur Verfügung gestellt werden:

.

Summierte Binomialverteilung $P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

		p		
n	k	0,1	0,5	0,90
25	10	0,99999	0,21218	
	11	1,00000	0,34502	
	12		0,50000	
	13		0,65498	0,00000
	14		0,78782	0,00001
	15		0,88524	0,00008
	16		0,94612	0,00046
	17		0,97836	0,00226
	18		0,99268	0,00948
	19		0,99796	0,03340
	20		0,99954	0,09799
	21		0,99992	0,23641
	22		0,99999	0,46291
	23		1,00000	0,72879
	24			0,92821
	25			1,00000
20	0	0,12158	0,00000	
	1	0,39175	0,00002	
	2	0,67693	0,00020	
	3	0,86705	0,00129	
	4	0,95683	0,00591	
	5	0,98875	0,02069	
	6	0,99761	0,05766	
	7	0,99958	0,13159	
	8	0,99994	0,25172	
	9	0,99999	0,41190	0,00000
	10	0,10000	0,58810	0,00001

Gebiet G3: Analysis / Aufgabe 3.2

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \ln(x - 1),\ x \in \mathbb{R},\ x > 1$.
Ihr Graph sei mit G bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Schnittstelle des Graphen G mit der x-Achse.
Weisen Sie nach, daß der Graph G keinen Wendepunkt besitzt.
Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $1 < x \leq 4$.

b) Durch Spiegelung des Graphen G in einem kartesischen Koordinatensystem an der Geraden $y = x$ entsteht der Graph $\overline{G}$ der Funktion $\overline{f}$ mit der Gleichung $y = \overline{f}(x) = e^x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.
Der Graph $\overline{G}$, die y-Achse und die Parallele zur x-Achse durch den Punkt $P(2 \mid \overline{f}(2))$ begrenzen eine Fläche vollständig. Diese Fläche rotiere um die x-Achse.
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des entstehenden Rotationskörpers.

Gebiet G3: Analytische Geometrie / Aufgabe 3.3

Eine Ellipse sei in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben durch ihre Gleichung: $x^2 + 2y^2 = 36$.

a) Ermitteln Sie die Maßzahlen der großen und der kleinen Halbachse der Ellipse und geben Sie die Koordinaten aller Scheitelpunkte dieser Ellipse an.

b) In den Hauptscheitelpunkten der Ellipse kann der Verlauf der Ellipse jeweils durch solche im Inneren der Ellipse gelegenen Kreise k_1 bzw. k_2 angenähert werden, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Dabei berühre der Kreis k_1 die Ellipse genau im Hauptscheitelpunkt $A(x_A < 0 \mid 0)$, der Kreis k_2 dieselbe im Punkt $B(x_B > 0 \mid 0)$.
Geben Sie jeweils eine Gleichung für die Kreise k_1 und k_2 an, wenn die Maßzahl ihrer Radien $r = 3$ ist.

c) Ein Kreis k_3 hat den Mittelpunkt $M(0 \mid -3\sqrt{2})$. Auf diesem Kreis liegt der Nebenscheitelpunkt $N(0 \mid y_N > 0)$ der Ellipse.
Geben Sie eine Gleichung des Kreises k_3 an.
Prüfen Sie, ob die Kreise k_3 und k_1 (siehe Aufgabe b) gemeinsame Punkte haben.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Nullstellen der Funktion:

$\frac{1}{6}x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x_{0_1} = 0; x_{0_2} = 3$

Extrempunkte des Graphen G:

$f(x) = \frac{1}{6}x(x-3)^2 = \frac{1}{6}x(x^2-6x+9) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2};\; f''(x) = x - 2$

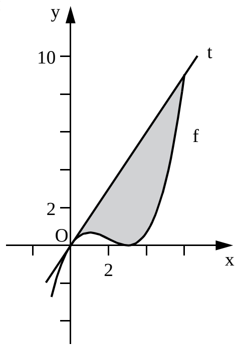
$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$, also $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_{E_1} = 1; x_{E_2} = 3$

$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_{E_1} = 1$; $f(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow H(1\,|\,\frac{2}{3})$

$f''(3) = 1 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_{E_2} = 3$; $f(3) = 0 \Rightarrow T(3\,|\,0)$

Graph der Funktion im Intervall $-1 \le x \le 6$: siehe Aufgabe b)

b) Maßzahl des Flächeninhaltes der angegebenen Fläche:



Tangentengleichung:

Allgemein gilt: $\frac{y - f(x_A)}{x - x_A} = f'(x_A)$.

Mit $x_A = 0$, $f(x_A) = 0$, $f'(x_A) = \frac{3}{2}$ erhält man

$t\colon y = \frac{3}{2}x$.

Schnittpunkte zwischen t und f:

$\frac{3}{2}x = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$, also $0 = \frac{1}{6}x^3 - x^2 = x^2(\frac{1}{6}x - 1)$

$\Rightarrow x_{S_1} = 0; x_{S_2} = 6$

Maßzahl A des Flächeninhalts:

$$A = \int_0^6 (t - f(x))\,dx = \int_0^6 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x\right)dx = \int_0^6 \left(x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4\right]_0^6 = 72 - 54 = 18$$

c) Nachweis: f und f' schneiden einander im Intervall $0{,}5 \le x \le 4$ in genau zwei Punkten:

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$; $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$, also $0 = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$

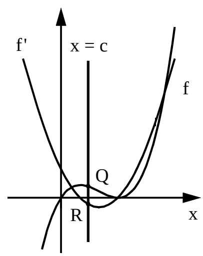
$\Rightarrow 0 = x^3 - 9x^2 + 21x - 9 \quad (*)$

Eine Lösung der Gleichung (*) ist $x_1 = 3$, da f an der Stelle $x = 3$ eknen Nullstelle (und ihren Tiefpunkt) hat.
Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 9x^2 + 21x - 9) : (x - 3) = x^2 - 6x + 3 \\
\underline{x^3 - 3x^2} \\
\quad -6x^2 + 21x - 9 \\
\quad \underline{-6x^2 + 18x} \\
\qquad\qquad 3x - 9 \\
\qquad\qquad \underline{3x - 9} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Damit läßt sich Gleichung (*) wie folgt zerlegen:
$0 = (x - 3) \cdot (x^2 - 6x + 3)$.
Folglich gibt es weitere Lösungen, wenn $0 = x^2 - 6x + 3$, also $x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9 - 3}$
$\Rightarrow x_2 = 3 - \sqrt{6} \approx 0{,}55$; $x_3 = 3 + \sqrt{6} \approx 5{,}45$.
x_3 liegt nicht im Intervall $0{,}5 \le x \le 4$. Innerhalb dieses Intervalls schneiden die Graphen von f und f' genau in den Stellen $x_A = x_2 = 3 - \sqrt{6}$ und $x_B = x_1 = 3$ einander.

Wert für c, damit Länge von $\overline{QR}$ maximal:
Strecke $\overline{QR}$:



$$|\overline{QR}| = d(c) = f(c) - f'(c)$$
$$= \tfrac{1}{6}c^3 - c^2 + \tfrac{3}{2}c - (\tfrac{1}{2}c^2 - 2c + \tfrac{3}{2})$$
$$= \tfrac{1}{6}c^3 - \tfrac{3}{2}c^2 + \tfrac{7}{2}c - \tfrac{3}{2}$$

$d'(c) = \frac{1}{2}c^2 - 3c + \frac{7}{2}$

$0 = \frac{1}{2}c^2 - 3c + \frac{7}{2}$, also $0 = c^2 - 6c + 7$

$\Rightarrow c_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 7}$; $c_1 = 3 - \sqrt{2} \approx 1{,}59$, $c_2 = 3 + \sqrt{2} \approx 4{,}41$
Nur c_1 liegt im Intervall $x_A < x < x_B$.

Da an den Randstellen des Intervalls $[3 - \sqrt{6} \approx 0{,}55; 3]$ jeweils $d(c) = 0$ gilt und $d(c) > 0$ im Intervall $]3 - \sqrt{6}; 3[$, ist die Länge der Strecke $\overline{QR}$ bei $c_1 = 3 - \sqrt{2} \approx 1{,}59$ maximal.

Bewertungsvorschlag:

a)	Ermitteln der Nullstellen	2 BE
	Untersuchen auf Extrempunkte	7 BE
	Zeichnung	4 BE
b)	Tangentengleichung für t	2 BE
	Ermitteln der Integrationsgrenzen	2 BE
	Berechnen der Maßzahl des Flächeninhalts	4 BE
c)	Nachweis von genau zwei Schnittstellen	8 BE
	Berechnen des Wertes für c	6 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Ermittlung von Anfangswert B(0) und Endwert B(6):

$B(0) = 10 + 0^2 \cdot e^{4-0} = 10$

$B(6) = 10 + 6^2 \cdot e^{4-6} = 10 + \frac{36}{e^2} \approx 14{,}87$

Nachweis, daß $B(t) > 0$ für $t > 0$:

Aus $t > 0$ folgt $t^2 > 0$; da $e^t > 0$ für alle t, ist $e^{4-t} = \frac{e^4}{e^t} > 0$.

Also ist $t^2 e^{4-t} > 0$ für alle $t > 0 \;\Rightarrow\; 10 + t^2 \cdot e^{4-t} > 0$ für alle $t > 0$.

Extrempunkte:

$B'(t) = 2te^{4-t} + t^2 \cdot (-1) \cdot e^{4-t} = e^{4-t}(2t - t^2)$

$B''(t) = (-1) \cdot e^{4-t}(2t - t^2) + e^{4-t}(2 - 2t) = e^{4-t}(-2t + t^2 + 2 - 2t)$

$\quad = e^{4-t}(t^2 - 4t + 2)$

Notwendige Bedingung für Extrema:

$0 = e^{4-t}(2t - t^2)$; wegen $e^{4-t} > 0$ für alle t folgt daraus $0 = 2t - t^2$, also $t_{E_1} = 0$; $t_{E_2} = 2$.

Prüfen auf Arten von Extrema:

$t_{E_1} = 0$ ist der Anfangswert mit $B(0) = 10$.

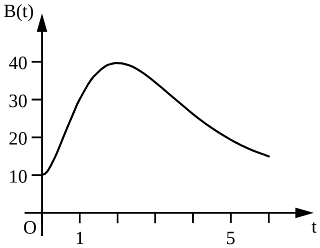
$B''(2) = e^{4-2}(2^2 - 4 \cdot 2 + 2) = e^2(-2) < 0$, also Maximum an der Stelle $t_{E_2} = 2$ mit $H(2 \mid 10 + 4e^2) \approx H(2 \mid 39{,}6)$.

Wert von $B'(t_1)$ bei $t_1 = 2 - \sqrt{2}$:

$B'(2 - \sqrt{2}) = e^{4-2+\sqrt{2}}(2(2 - \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2})^2)$

$\quad = e^{2+\sqrt{2}}(4 - 2\sqrt{2} - 4 + 4\sqrt{2} - 2) = e^{2+\sqrt{2}}(2\sqrt{2} - 2) \approx 25{,}18$

Graph der Funktion B:



b) Allgemein: $f(t) = at^2 + bt + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; $0 \le t \le 3$
Bedingungen für die quadratische Funktion:
$f(0) = 10$, d.h. $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 10 \Rightarrow c = 10$
$f'(2) = 0$, d.h. $2a \cdot 2 + b = 0$
$f(2) = B(2) = 10 + 4e^2$, d.h. $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 10 = 10 + 4e^2$
$\Rightarrow$ (I) $4a + b = 0$, (II) $4a + 2b = 4e^2$; Lösung: $b = 4e^2$, $a = -e^2$
Quadratische Näherungsfunktion: $f(t) = -e^2t^2 + 4e^2t + 10$

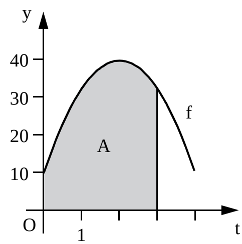
c) $A = \int_0^3 f(t)\,dt = \int_0^3 (-e^2t^2 + 4e^2t + 10)\,dt$

$= \left[-\frac{e^2}{3}t^3 + 2e^2t^2 + 10t\right]_0^3$

$= -\frac{e^2}{3}3^3 + 2e^2 3^2 + 10 \cdot 3 - 0$

$= -9e^2 + 18e^2 + 30 = 9e^2 + 30 \approx 96{,}5$ (FE)

In drei Stunden werden etwa 96,5 mg Enzym produziert.



Bewertungsvorschlag:

a)	Berechnen des Anfangs- und Endwertes von B	2 BE
	Nachweis, daß $B(t) > 0$ für $t > 0$	3 BE
	Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte	10 BE
	Berechnen von $B'(t_1)$	2 BE
	Zeichnung	4 BE
b)	Bestimmen der Koeffizienten	8 BE
c)	Berechnen der Ausbeute	6 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Gleichung der Geraden g(A, B) und g(C, D):

g(A, B): $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + r*\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ oder $y = -\frac{3}{4}x$

g(C, D): $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} + s*\begin{pmatrix}15\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ oder:

$$\frac{y-21}{x-22} = \frac{21-1}{22-7} = \frac{4}{3}\text{, also } y - 21 = \frac{4}{3}(x-22) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{25}{3}$$

Schnittpunkt S der Geraden g(A, B) und g(C, D):

Für S muß gelten: $r\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, d.h.:

$$\begin{array}{ll|l} \text{(I)} & 4r = 7 + 3s, & \cdot 3 \\ \text{(II)} & -3r = 1 + 4s & \cdot 4 \end{array}$$

Addition beider Gleichungen ergibt:
$21 + 9s + 4 + 16s = 0$, also $25s + 25 = 0 \Rightarrow s = -1, r = 1$.

Oder: (I) $y = -\frac{3}{4}x$, (II) $y = \frac{4}{3}x - \frac{25}{3} \Rightarrow -\frac{3}{4}x = \frac{4}{3}x - \frac{25}{3}$, also $-\frac{25}{12}x = -\frac{25}{3}$

$\Rightarrow x = 4, y = -3$
Der Schnittpunkt ist $S(4\,|\,-3)$.

Begründung der Orthogonalität von g(A, B) und g(C, D):

Für den Schnittwinkel der beiden Geraden gilt wegen $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$:

$$\cos\sphericalangle(g(A, B); g(C, D)) = \frac{\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{0}{5\cdot 5} = 0$$

$\Rightarrow \sphericalangle(g(A, B); g(C, D)) = 90°$

Oder: $m_{g(A,B)} = -\frac{3}{4} = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{m_{g(C,D)}}$

b) Koordinaten des Mittelpunktes K von $\overline{AD}$:
K liegt auf der Mitte der Geraden g(A, D)

$\Rightarrow \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-12\\9\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}22+12\\21-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix} \Rightarrow K(5\,|\,15)$

Oder: $K\left(\frac{x_A + x_D}{2} \,\middle|\, \frac{y_A + y_D}{2}\right) = K\left(\frac{-12+22}{2} \,\middle|\, \frac{9+21}{2}\right) = K(5\,|\,15)$

Nachweis, daß von K bei einem Sichtkreis mit $r_S = \overline{AK}$ die gesamte Teststrecke überschaubar ist:

Wegen $\left|\overline{KS}\right| = \sqrt{(4-5)^2 + (-3-15)^2} = \sqrt{1+324} = \sqrt{325} = \left|\overline{AK}\right|$

und mit $\left|\overline{AK}\right| = \left|\overline{KD}\right|$ hat das Dreieck ASD einen Umkreis mit dem Mittelpunkt in K und dem Radius $r_S = \overline{AK}$. Somit ist der gesamte Kurs von K aus bei einem Sichtkreis mit dem Radius r_S überschaubar.

c) Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\overrightarrow{SZ}$:

$\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SZ} = \begin{pmatrix}40-4\\2+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}36\\5\end{pmatrix}$

$\cos\sphericalangle(\vec{v};\ \overrightarrow{SZ}) = \dfrac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{SZ}}{|\vec{v}|\cdot\left|\overrightarrow{SZ}\right|} = \dfrac{(-1)\cdot 36 + 7\cdot 5}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{1\,321}} = -\dfrac{1}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{1\,321}} \approx -0{,}0039$

$\Rightarrow \sphericalangle(\vec{v};\ \overrightarrow{SZ}) \approx 90{,}2°$: Der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\overrightarrow{SZ}$ ist also stumpf.

Nachweis, daß $\vec{v}$ in Richtung des Mittelpunktes M des Viertelkreises zeigt:

Bestimmung des Mittelpunktes M:

Da laut Voraussetzung $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{MC}$ und $\left|\overline{BM}\right| = \left|\overline{MC}\right|$ (wegen des Viertelkreises) sowie $\overline{SB} \perp \overline{MB}$ und $\overline{SC} \perp \overline{MC}$ gemäß a), ist SCMB ein Quadrat.

Zunächst wird $M(x_M;\ y_M)$ bestimmt. BMCS ist ein Quadrat. Daher gilt:

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{SC} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_M-0\\y_M-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7-4\\1+3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Folglich ist $\overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix}3-4\\4+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ und stimmt mit $\vec{v}$ überein.

Oder: $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix} = \vec{v}$

Bewertungsvorschlag:

a)	Gleichung für Gerade AB	2 BE
	Gleichung für Gerade CD	3 BE
	Koordinaten des Schnittpunktes	3 BE
	Begründung der rechtwinkligen Lage der Geraden	1 BE
b)	Koordinaten des Punktes K	1 BE
	Begründung der Sicht über Streckenabschnitt	3 BE
c)	Prüfen, ob $\sphericalangle(\vec{v};\ \overrightarrow{SZ})$ stumpfer Winkel ist	3 BE
	Nachweis, daß MBSC Quadrat ist	2 BE
	Nachweis, daß $\vec{v}$ in Richtung des Mittelpunktes zeigt	2 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) ABCDS ist eine gerade Pyramide, wenn für den Diagonalschnittpunkt M gilt:
$\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{MA}$ und $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{MB}$.

Bestimmung von M:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0-4\\4-0\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow M(2\,|\,2\,|\,1)$$

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix}2-2\\-1-2\\7-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix},\ \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix}4-2\\0-2\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix}4-2\\4-2\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Prüfen auf Orthogonalität mittels Skalarprodukt:

$$\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = 0 + 6 - 6 = 0$$

$$\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 0 - 6 + 6 = 0$$

$\overrightarrow{MS}$ steht also senkrecht auf der Rechtecksfläche ABCD. Damit ist ABCDS eine gerade Pyramide.

b) Mittelpunkt E der Kante $\overline{BS}$:

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-4\\-1-4\\7-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1{,}5\\4{,}5\end{pmatrix}$$

Bestimmung der Ebenengleichung durch A, D und E:

z.B: $\varepsilon(A, D, E)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4-0\\0-0\\0-0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3-0\\1{,}5-0\\4{,}5-0\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1{,}5\\4{,}5\end{pmatrix}$

Gerade g(M, S): $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + t^*\begin{pmatrix}2-2\\-1-2\\7-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + t^*\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

Schnitt von ε mit g(M, S):

$$r\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ (I) $4r + 3s = 2$

(II) $1{,}5s = 2 - t$ $\quad|\ \cdot 3$

(III) $4{,}5s = 1 + 2t$

$0 = 5 - 5t \Rightarrow t = 1;\ s = \frac{2}{3};\ r = 0 \quad \Rightarrow T(2\,|\,1\,|\,3)$

c) Es soll gelten $|\overline{RA}| = |\overline{RB}| = |\overline{RC}| = |\overline{RD}| = |\overline{RS}|$, wobei R auf der Geraden $g_3 = g(M, S)$ liegt.
Koordinaten von R (siehe g(M, S) aus b): $x_R = 2$, $y_R = 2 - t$, $z_R = 1 + 2t$
Da ABCDS eine gerade Pyramide ist, genügt es, z.B. $|\overline{RD}|$ und $|\overline{RS}|$ zu betrachten:

$$|\overline{RD}| = \sqrt{(2-0)^2 + (2-t-0)^2 + (1+2t-0)^2}$$

$$\Rightarrow |\overline{RD}|^2 = 4 + (2-t)^2 + (1+2t)^2 = 4 + 4 - 4t + t^2 + 1 + 4t + 4t^2$$

$$|\overline{RS}| = \sqrt{(2-2)^2 + (2-t+1)^2 + (1+2t-7)^2}$$

$$\Rightarrow |\overline{RS}|^2 = 0 + (3-t)^2 + (-6+2t)^2 = 0 + 9 - 6t + t^2 + 36 - 24t + 4t^2$$

$|\overline{RD}| = |\overline{RS}| \Rightarrow 9 + 5t^2 = 45 - 30t + 5t^2$, also $30t = 36$ und somit $t = 1{,}2$
$\Rightarrow R(2 \mid 0{,}8 \mid 3{,}4)$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis, daß ABCDS eine gerade Pyramide ist	5 BE
b)	Koordinaten des Punktes E	1 BE
	Gleichung der Ebene durch A, D, E	3 BE
	Gleichung der Geraden MS	2 BE
	Koordinaten des Punktes T	4 BE
c)	Koordinaten des Punktes R	5 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.1

a) Erwartungswert für die Anzahl der ausfallenden Schlösser:
Die Anzahl der ausfallenden Schlösser wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben. X kann dabei alle Werte von 1 bis 25 annehmen.

X	0	1	2	…	25
p	$0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{25}$	$\binom{25}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{24}$	$\binom{25}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{23}$	…	$0{,}1^{25} \cdot 0{,}9^0$

Damit ist X eine binomialverteilte Zufallsgröße, ihr Erwartungswert E(X) ist demzufolge
$E(X) = np$ mit $p = 0{,}1$ und $n = 25 \Rightarrow E(X) = 2{,}5$.

Wahrscheinlichkeit, mit der die Anzahl ausfallender Schlösser um höchstens 1 vom Erwartungswert abweicht:
Wegen $E(X) = 2{,}5$ und der Abweichung um höchstens 1 Schloß kommt als Anzahl für ausfallende Schlösser nur 2 oder 3 in Betracht:

$$\begin{aligned} P(2 \le X \le 3) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \binom{25}{2} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{23} + \binom{25}{3} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{22} \approx 0{,}26588 + 0{,}22649 \\ &= 0{,}49237 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Abweichung beträgt ca. 49%.

Wahrscheinlichkeiten ausgewählter Ereignisse:
Mit einer zweiten Zufallsgröße Y wird die Anzahl funktionstüchtiger Schlösser beschrieben. Y ist eine binomialverteilte Zufallsgröße mit $\overline{p} = 0{,}9$ und $n = 25$.

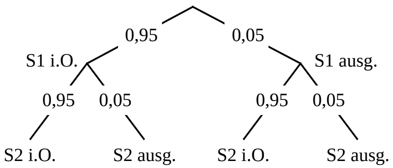
1. A: „mindestens 20 Schlösser sind funktionstüchtig“ – umfaßt *alle* Fälle mit Ausnahme derjenigen, in denen *weniger* als 20 Schlösser funktionstüchtig sind.
   $$\begin{aligned} \Rightarrow P(A) = P(Y \ge 20) &= 1 - P(Y \le 19) \\ &\approx 1 - 0{,}03340 \quad \text{(laut Tabelle für } \overline{p} = 0{,}9\text{)} \\ &= 0{,}9666 \triangleq \text{rd. } 97\% \end{aligned}$$
2. B: „höchstens 2 der entnommenen Schlösser fallen aus“, also mindestens 23 Schlösser sind funktionstüchtig – umfaßt *alle* Fälle mit Ausnahme derjenigen, in denen *weniger* als 23 Schlösser funktionstüchtig sind.:
   $$\begin{aligned} \Rightarrow P(B) = P(Y \ge 23) &= 1 - P(Y \le 22) \\ &\approx 1 - 0{,}46219 \quad \text{(laut Tabelle für } \overline{p} = 0{,}9\text{)} \\ &= 0{,}53709 \triangleq \text{rd. } 54\% \end{aligned}$$

b) Nullhypothese H_0: $p \le 0{,}1$; bei $n = 20$ überprüften Schlössern nur $X = 2$ ausgefallene Schlösser; Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$
Wenn die Nullhypothese H_0 wahr ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit für ein ausgefallenes Schloß $p \le 10\%$.
Die Anzahl K ausgefallener Schlösser für das maximale $p = 10\%$ berechnet sich nach der Binomialverteilung $B_{20;\,0,1}(\{K\})$.
Gesucht ist nun der kleinstmögliche Wert von K, so daß $\sum_{i=K}^{n} B_{20;\,0,1}(\{i\}) \le \alpha$.
Das ist gleichbedeutend mit:

$$1 - \sum_{i=K}^{n} B_{20;\,0,1}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{K-1} B_{20;\,0,1}(\{i\}) \ge 1 - \alpha.$$ Dabei ist $1 - \alpha = 0{,}95$.

Aus der Tabelle wird ersichtlich, daß $K - 1 = 4$ gelten muß, d.h. $K = 5$. Die Nullhypothese H_0 wird also abgelehnt, wenn 5 oder mehr Schlösser ausfallen, d.h., bei zwei ausgefallenen Schlössern erfolgt keine Ablehnung der Hypothese.

c) Weil jede Tür in gleicher Weise und unabhängig von der anderen Tür funktioniert, kann man die Verhältnisse zunächst an einer Tür betrachten, das heißt, je Tür 2 Schlösser mit Ausfallwahrscheinlichkeit $p_A = 0{,}05$; je Tür genügt es, wenn mindestens 1 Schloß in Ordnung ist.



S – Schloß
i.O. – in Ordnung
ausg. – ausgefallen

$\Rightarrow$ P(„Tür in Ordnung“) = 1 – P(„beide Schlösser ausgefallen“)
$= 1 - (p_A)^2 = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$

Demnach gilt dann für beide Türen zusammen:

P(„2 Türen in Ordnung“)= [P(„1 Tür in Ordnung“)]$^2 = (0{,}9975)^2 \approx 0{,}995$

Weiterer Lösungsweg:

E_i sei das Ereignis, daß Schloß i funktionstüchtig ist. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_0 „Kundenraum gesichert“ beträgt dann nach dem Allgemeinen Additionssatz:

$P(E_0) = P[(E_1 \cup E_2) \cap (E_3 \cup E_4)] = P(E_1 \cup E_2) \cdot P(E_3 \cup E_4)$
$= [P(E_1) + P(E_2) - P(E_1) \cdot P(E_2)] \cdot [P(E_3) + P(E_4) - P(E_3) \cdot P(E_4)]$
$= (0{,}95 + 0{,}95 - 0{,}95^2)^2 \approx 0{,}995$

Bewertungsvorschlag:

a)	Erwartungswert	1 BE
	Wahrscheinl. für Abweichung um höchstens 1 v. Erwartungswert	2 BE
	P(A)	2 BE
	P(B)	2 BE
b)	Prüfen der Korrektheit der angegebenen Ausfallwahrscheinlichkeit	4 BE
c)	Ansatz	2 BE
	Berechnung der angegebenen Wahrscheinlichkeit	2 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.2

a) Schnittstellen des Graphen mit der x-Achse:

$0 = \ln(x-1)$, also $e^0 = x - 1$ bzw. $1 = x - 1 \;\Rightarrow\; x_0 = 2$

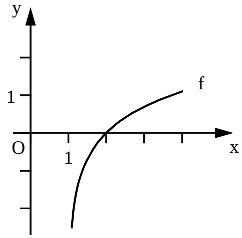
Nachweis, daß der Graph keinen Wendepunkt besitzt:

$f(x) = \ln(x-1)$; $f'(x) = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1}$

$f''(x) = -1(x-1)^{-2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$

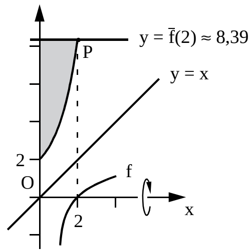
Da $f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \neq 0$ für alle x, ist die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt nicht erfüllt, also existiert kein Wendepunkt.

Graph im Intervall $1 < x \leq 4$



b) $V_{Rot} = V_{Zylinder} - V_1$, wobei $V_{Zylinder} = \pi r^2 h$ mit $h = 2$

und $r = \bar{f}(2)$ und $V_1 = \pi \int_0^2 [\bar{f}(x)]^2\,dx$.



$V_{Zylinder} = \pi(e^2+1)^2 \cdot 2$

$V_1 = \pi \int_0^2 (e^x + 1)^2 dx = \pi \int_0^2 (e^{2x} + 2e^x + 1)\,dx$

$= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x\right]_0^2 = \pi\left(\frac{1}{2}e^4 + 2e^2 + 2 - \frac{1}{2} - 2 - 0\right) = \pi\left(\frac{1}{2}e^4 + 2e^2 - \frac{1}{2}\right)$

Damit gilt für das Rotationsvolumen:

$V_{Rot} = \pi(2e^4 + 4e^2 + 2) - \pi\left(\frac{1}{2}e^4 + 2e^2 - \frac{1}{2}\right) = \pi\left(\frac{3}{2}e^4 + 2e^2 + \frac{5}{2}\right) \approx 311{,}6$

Bewertungsvorschlag:

a)	Berechnen der Schnittstelle	2 BE
	Nachweisen, daß kein Wendepunkt existiert	3 BE
	Zeichnung des Graphen	2 BE
b)	Maßzahl des Rotationskörpervolumens	7 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.3

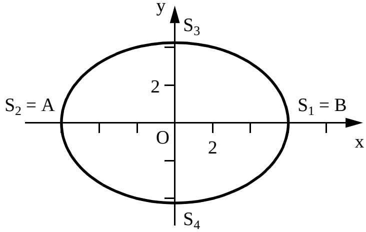
a) Mittelpunktsgleichung: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1$

große Halbachse: $a = 6$

kleine Halbachse: $b = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$S_1(6 \mid 0)$, $S_2(-6 \mid 0)$,

$S_3(0 \mid 3\sqrt{2})$, $S_3(0 \mid -3\sqrt{2})$



b) Radius jeweils r = 3; Mittelpunkte jeweils auf der x-Achse; Berührung der Kreise mit der Ellipse jeweils in einem Hauptscheitelpunkt
Für k_1 in A folgt: $M_1(-6 + 3 \mid 0) = M_1(-3 \mid 0)$
$\Rightarrow k_1: (x + 3)^2 + y^2 = 9;$
für k_2 in B folgt: $M_2(6 - 3 \mid 0) = M_1(3 \mid 0)$
$\Rightarrow k_1: (x - 3)^2 + y^2 = 9$

c) Gleichung eines Kreises k_3:
Mittelpunkt von k_3: $M_3(0 \mid -3\sqrt{2})$; Punkt auf k_3: $S_3(0 \mid 3\sqrt{2})$

$\Rightarrow$ Radius $r = \left|\overline{M_3S_3}\right| = \sqrt{(0-0)^2 + (3\sqrt{2} + 3\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$

Kreisgleichung für k_3: $x^2 + (y + 3\sqrt{2})^2 = 72$

Prüfen ob, die Kreise k_1 und k_3 gemeinsamen Punkte haben:

k_1: (I) $(x + 3)^2 + y^2 = 9$

k_3: (II) $x^2 + (y + 3\sqrt{2})^2 = 72$

Umformung ergibt:

(I') $x^2 + 6x + 9 + y^2 = 9$

(II') $x^2 + y^2 + 6\sqrt{2}\,y + 18 = 72$

$-6x - 9 + 6\sqrt{2}\,y + 18 = 63$, also $-x + \sqrt{2}\,y = 9$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}\,y - 9$ (*)

Einsetzen von (*) in (I') ergibt:

$(\sqrt{2}\,y - 6)^2 + y^2 = 9$, d.h. $2y^2 - 12\sqrt{2}\,y + 36 + y^2 = 9$

$\Rightarrow 3y^2 - 12\sqrt{2}\,y + 27 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4\sqrt{2}\,y + 9 = 0$

$\Rightarrow y_{1,2} = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-9}$, also existieren keine reellen Lösungen.
Folglich haben die Kreise k_1 und k_3 keine gemeinsamen Punkte.

Bewertungsvorschlag:

a)	Maßzahlen der Halbachsen der Ellipse	2 BE
	Koordinaten der Scheitelpunkte	2 BE
b)	Gleichungen der beiden Kreise	3 BE
c)	Gleichung für Kreis k_3	2 BE
	Prüfen der Kreise k_1 und k_3 auf gemeinsame Punkte	6 BE
		15 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1997 / 98

Gymnasium

Thüringen

Hinweis:
Der Prüfungsteilnehmer hatte von den Aufgaben 1.1 und 1.2 ***eine*** *und von den Aufgaben 2.1 und 2.2 und 2.3* ***zwei*** *zur Bearbeitung auszuwählen.*

Aufgabe 1.1

Gegeben ist die Funktion f mit $y = f(x) = e^x - \frac{1}{4}x \cdot e^x \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf Extrem- und Wendepunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
b) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \le x \le 4{,}2$!
c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $A(1;\, f(1))$!
d) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, die im Punkt A senkrecht auf der Tangente t steht!
Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g mit der y-Achse!
e) Die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen und der lokale Maximumpunkt bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie dessen Flächeninhalt!
f) Es sei $P(x;\, f(x))$ mit $0 \le x \le 4$ ein Punkt auf dem Graphen von f. Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in einem Punkt Q, die Parallele zur x-Achse durch P schneidet die y-Achse in einem Punkt S.
Berechnen Sie die x-Koordinate von P für den Fall, daß der Flächeninhalt des Rechtecks OQPS maximal wird!
(O bezeichnet den Koordinatenursprung.)
g) Gesucht ist die Gleichung derjenigen quadratischen Funktion q, deren Graph durch die Punkte $A(1;\, f(1))$ und $B(0;\, f(0))$ verläuft und im Punkt B den Anstieg $\frac{3}{4}e$ besitzt.

Aufgabe 1.2

Gegeben ist die Funktion mit $y = f(x) = x(\ln x - 1), \quad (x \in \mathbb{R};\, x > 0)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrem- und Wendepunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $0{,}1 \le x \le 6$!
b) Im Punkt $P(6;\, f(6))$ sei die Tangente t an den Graphen von f gelegt.
Geben Sie die Gleichung dieser Tangente an!
Unter welchem Winkel α schneidet diese Tangente die Gerade mit der Gleichung $x = 6$?

c) Zeigen Sie, daß $F(x) = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{3}{2})$, $(x \in \mathbb{R};\ x > 0)$ eine Stammfunktion von f ist!

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ und dem Graphen von f vollständig begrenzt wird!

e) Gegeben ist die lineare Funktion h durch $h(x) = \frac{3}{2}x + 1$.
Berechnen Sie diejenige Stelle x $(x > 0)$, an der die Differenz $d(x) = h(x) - f(x)$ ein lokales Maximum annimmt!
Berechnen Sie diese maximale Differenz!

f) Gegeben seien die Punkte O(0; 0), A(1; f(1)), P(6; f(6)).
Berechnen Sie den Winkel β mit $\beta = \sphericalangle PAO$!

g) Die Tangente t (aus Aufgabe b), der Graph von f und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

h) Es gibt eine quadratische Funktion q so, daß die Parabel durch den Koordinatenursprung verläuft und den Graphen von f in P(6; f(6)) berührt, d.h., die beiden Graphen haben in P eine gemeinsame Tangente.
Geben Sie die Gleichung der quadratischen Funktion an!

Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte
A(4; 1; –1), B(5; 2; –1), C(2; 3; 3), E(6; 3; –1) und F(5; 2; 2) gegeben.

a) Ermitteln Sie ein Gleichung für die Gerade g, die durch die Punkte A und B verläuft!
Zeigen Sie, daß der Punkt C nicht auf der Geraden g liegt!

b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε_1 an, die den Punkt C sowie die Gerade g enthält!

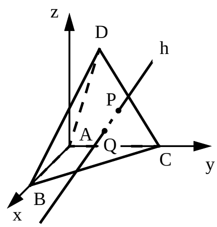
c) Die Ebene ε_1 schneidet die x-y-Koordinatenebene in der Geraden s.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s!
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S_Z, in dem die z-Achse die Ebene ε_1 durchstößt!

d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, der auf der Geraden g liegt und von den Punkten C und E die gleiche Entfernung besitzt!

e) Die Strecke $\overline{BC}$ ist die Diagonale eines Rechtecks BGCH mit $H \in g$.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte H und G!

Aufgabe 2.2

Durch die Punkte A(0; 0; 0), B(B4; 0; 0), C(0; 4; 0) und D(2; 2; 4) ist eine Pyramide gegeben (siehe Skizze).



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Geben Sie je eine Parametergleichung für die Gerade g_1 durch die Punkte B und C sowie die Gerade g_2 durch die Punkte A und D an!
Zeigen Sie rechnerisch, daß die Geraden g_1 und g_2 windschief sind!

b) Die Gerade s_1 verläuft durch D und halbiert die Strecke $\overline{BC}$, ist also Seitenhalbierende des Dreiecks ΔBCD. Eine weitere Seitenhalbierende des Dreiecks ΔBCD heißt s_2.
Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Seitenhalbierenden!
Berechnen Sie den Schnittwinkel α dieser Seitenhalbierenden!

c) Die Ebene ε enthält die Punkte B, C und D.
Geben Sie für ε eine Ebenengleichung an!

d) Die Gerade h mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ durchstößt die Ebene ε im Punkt Q.
Berechnen Sie die Koordinaten von Q!

e) Weiterhin durchstößt die Gerade h die Ebene des Dreiecks ACD im Punkt P(1; 1; 2).
Für welche $r \in \mathbb{R}$ liegen die Punkte der Geraden h im Innern der Pyramide ABCD?

f) Prüfen Sie, ob die Punkte A(0; 0; 0), B(4; 0; 0), Q(3; 1; 2) und P(1; 1; 2) in dieser Reihenfolge ein gleichschenkliges Trapez bilden!

Aufgabe 2.3

Ein Glücksrad ist in drei Felder geteilt, die durch die Ziffern 1, 2, 3 gekennzeichnet sind. Nach dem Drehen des Rades zeigt der Pfeil bei anschließendem Stillstand immer genau in ein Feld.
Die Ziffern 1 und 2 werden jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ erdreht.
Ein Spieler dreht das Rad zweimal.

a) Geben Sie die Ergebnismenge mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an!

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A := „Die Ziffer 1 erscheint höchstens einmal."
B := „Die Ziffer 2 erscheint genau einmal."
C := „Die Ziffer 3 wird spätestens beim zweiten Mal erdreht."
D := $B \cap C$
Untersuchen Sie die Ereignisse B und C auf Unabhängigkeit!

c) Bei einem anderen Glücksrad erscheint die Ziffer 1 nach achtmaligem Drehen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Ziffer 1 mindestens einmal erdreht?

d) Ein Verkäufer bezieht vom Händler drei Glücksräder, die er innerhalb einer Woche verkaufen möchte. Er zahlt dem Händler für ein Rad 100 DM und verkauft es für 120 DM. Für die Anzahl X der verkauften Räder gilt folgende Verteilung:

Anzahl X	0	1	2	3
Verkaufswahrscheinlichkeit	0,01	0,09	0,1	0,8

Berechnen Sie den Erwartungswert für den Gewinn des Verkäufers!

e) Der Verkäufer nimmt an, daß von vier Rädern, die ihm der Händler anbietet, mindestens ein Rad gezinkt ist. Er wählt von den vier angebotenen Rädern zufällig und ohne Zurücklegen zwei aus. Mit eine Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{2}$ hat er dabei ein fehlerfreies sowie ein gezinktes ausgewählt.
Wie viele gezinkte Räder waren unter den vier angebotenen?

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 1 - \frac{1}{4}x$ (da $e^x \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$), also $x = 4 \Rightarrow P_x(4; 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse:
$f(0) = 1 \Rightarrow P_y(0; 1)$

Lokale Extrempunkte:

$f'(x) = e^x(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x)$; $f''(x) = e^x(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x)$; $f'''(x) = e^x(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x) = 0$, also $x = 3$

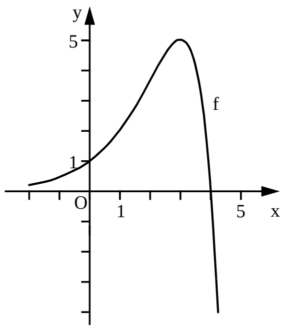
$f''(3) = -\frac{1}{4}e^3 < 0$, $f(3) = \frac{1}{4}e^3 \Rightarrow$ lokale Maximumpunkt $P_{Max}(3; \frac{1}{4}e^3)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x) = 0$, also $x = 2$

$f'''(2) = -\frac{1}{4}e^2 \neq 0$, $f(2) = \frac{1}{2}e^2 \Rightarrow$ Wendepunkt $P_W(2; \frac{1}{2}e^2)$

b) $f(-2) \approx 0{,}2$
$f(4{,}2) \approx -3{,}3$



c) Gleichung der Tangente allgemein: $y_t = mx + n$

$A(1; \frac{3}{4}e)$; $m = f'(1) = \frac{1}{2}e \Rightarrow y_t = \frac{1}{2}e \cdot x + n$

$\frac{3}{4}e = \frac{1}{2}e \cdot 1 + n \Rightarrow n = \frac{1}{4}e \Rightarrow$ Gleichung der Tangente: $y_t = \frac{1}{2}e \cdot x + \frac{1}{4}e$

d) Senkrechte Gerade zu t:

$m_g = -\frac{1}{m_t} = -\frac{2}{e} \Rightarrow y_g = -\frac{2}{e} \cdot x + n$

$\frac{3}{4}e = -\frac{2}{e} \cdot 1 + n \Rightarrow n = \frac{3}{4}e + \frac{2}{e}$; Gleichung der Gerade: $y_g = -\frac{2}{e} \cdot x + \frac{3}{4}e + \frac{2}{e}$

Schnittwinkel mit der y-Achse:

$\tan(180° - \alpha) = -\frac{2}{e}$, also $\alpha \approx 36{,}34° \Rightarrow$ Schnittwinkel $\varphi \approx 53{,}66°$

e) $A_\Delta = A_{Trapez} - A_1 - A_2$

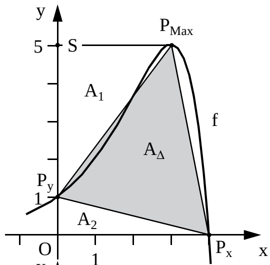
$A_{Trapez} = \frac{1}{2}(|\overline{OP_x}| + |\overline{SP_{Max}}|) \cdot |\overline{OS}|$

$= \frac{1}{2}(4 + 3) \cdot \frac{1}{4}e^3 \approx 17{,}57$ (FE)

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{P_yS}| \cdot |\overline{SP_{Max}}| \approx 6{,}03$ (FE)

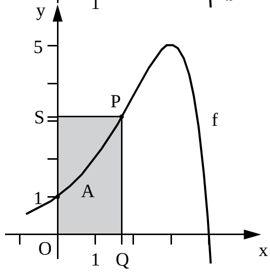
$A_2 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{OP_x}| \cdot |\overline{OP_y}| = 2$ (FE)

$\Rightarrow A_\Delta \approx 9{,}54$ (FE)



f) $A = x \cdot f(x)$

$A(x) = x(e^x - \frac{1}{4}x \cdot e^x) = e^x(x - \frac{1}{4}x^2)$ Zielfunktion



$A'(x) = e^x(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1)$

$A''(x) = e^x(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2})$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

(da $e^x \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow 0 = x^2 - 2x - 4$, also $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ ($x_2 = 1 - \sqrt{5}$ entfällt, da $0 \leq x \leq 4$)

$A''(1 + \sqrt{5}) \approx -28{,}4 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

Für $x = 1 + \sqrt{5} \approx 3{,}2$ wird der Flächeninhalt des Rechtecks OQPS maximal.

g) Allgemeine Gleichung für q: $q = ax^2 + bx + c$

$A(1; \frac{3}{4}e)$, $B(0; 1)$, $m = \frac{3}{4}e$

B einsetzen: $1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 1$

A einsetzen: $\frac{3}{4}e = a \cdot 1 + b \cdot 1 + 1 = a + b + 1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}e - b - 1$

$q'(x) = 2ax + b$

m mit q'(0) gleichsetzen: $\frac{3}{4}e = 2a \cdot 0 + b \Rightarrow b = \frac{3}{4}e \Rightarrow a = \frac{3}{4}e - \frac{3}{4}e - 1 = -1$

Gleichung für q: $q(x) = -x^2 + \frac{3}{4}e \cdot x + 1$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1.1	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
30 BE	8 BE	2 BE	3 BE	3 BE	4 BE	6 BE	4 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = \ln x - 1$ (x = 0 gehört nicht zum Definitionsbereich)

$\Rightarrow \ln x - 1 = 0$, also $x = e \Rightarrow P_x(e; 0)$

Lokale Extrempunkte:

$f'(x) = \ln x$, $f''(x) = \frac{1}{x}$, $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$, d.h. $x = 1$

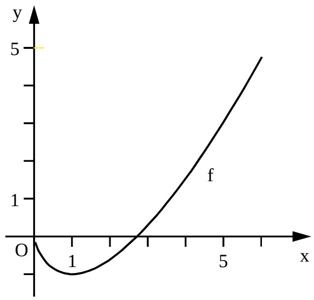
$f''(1) = 1 > 0$, $f(1) = -1 \Rightarrow$ lokaler Minimumpunkt $P_{Min}(1; -1)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$; da $\frac{1}{x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gibt es keine Wendepunkte.

$f(0{,}1) \approx -0{,}33$

$f(6) \approx 4{,}75$



b) Gleichung der Tangente:

$y_t = mx + n$, wobei $m = f'(6) = \ln 6 \Rightarrow y_t = \ln 6 \cdot x + n$

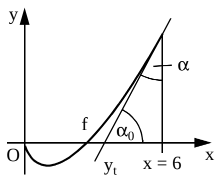
$P(6; 6 \cdot (\ln 6 - 1))$ einsetzen: $6 \cdot (\ln 6 - 1) = \ln 6 \cdot 6 + n$, also $n = -6$

$\Rightarrow y_t = \ln 6 \cdot x - 6$

Schnittwinkel α:

$\tan \alpha_0 = \ln 6$, also $\alpha_0 \approx 60{,}83°$

$\Rightarrow$ Schnittwinkel $\alpha \approx 29{,}17°$



c) Zu zeigen ist: $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = x(\ln x - \frac{3}{2}) + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = x(\ln x - \frac{3}{2}) + \frac{1}{2}x = x(\ln x - 1) = f(x)$

d) $A = \left| \int_1^e f(x)\,dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{3}{2}) \right]_1^e \right| = \left| \frac{3}{4} - \frac{e^2}{4} \right| \approx 1{,}1$ (FE)

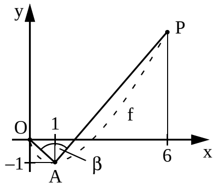
e) $d(x) = \frac{5}{2}x + 1 - x \cdot \ln x$; $d'(x) = \frac{3}{2} - \ln x$; $d''(x) = -\frac{1}{x}$

$d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \ln x = 0$, also $x = e\sqrt{e}$

$d''(e\sqrt{e}) = -\frac{1}{e\sqrt{e}} < 0 \Rightarrow$ Maximumstelle

$d(e\sqrt{e}) = e\sqrt{e} + 1 \approx 5{,}48$ (LE)

f) $A(1;\,1)$, $P(6;\,6(\ln 6 - 1)) \approx P(6;\,4{,}75)$



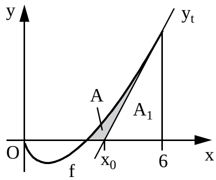
$\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AP} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 5{,}75 \end{pmatrix}$

$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AO}|} \approx 0{,}0696$

$\Rightarrow \beta \approx 86{,}01°$

Weiterer Lösungsweg: ß = 180° – 45° – Steig.winkel(AP)

g) $A = \int_e^6 f(x)\,dx - A_1$



$x_0 = \frac{6}{\ln 6}$; $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(6 - \frac{6}{\ln 6}\right) \cdot 6 \cdot (\ln 6 - 1) \approx 6{,}30$ (FE)

$A = \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)\right]_e^6 - A_1 = 18\left(\ln 6 - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4}e^2 - A_1$

$\approx 7{,}10$ (FE) – 6,30 (FE) = 0,80 (FE)

h) Allgemeine Gleichung für q: $q = ax^2 + bx + c$

$P_1(0;\,0)$, $P_2(6;\,6(\ln 6 - 1))$, $y_t = \ln 6 \cdot x - 6$

$q(x_1)$: (I) $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$

$q(x_P) = f(x_P)$: (II) $6(\ln 6 - 1) = 36a + 6b$

$q'(x) = 2ax + b = m$

$f'(x_P) = q'(x_P)$ (III) $\ln 6 = 12a + b$, also $b = \ln 6 - 12a$

b in (II) einsetzen: $36a + 6(\ln 6 - 12a) = 6(\ln 6 - 1) \Rightarrow a = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow b = \ln 6 - 12 \cdot \frac{1}{6} = \ln 6 - 2$

Gleichung für q: $q(x) = \frac{1}{6}x^2 + (\ln 6 - 2)x \approx \frac{1}{6}x^2 - 0{,}21x$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1.2	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
30 BE	7 BE	4 BE	2 BE	2 BE	4 BE	3 BE	4 BE	4 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Gleichung der Gerade g:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nachweis, daß C(2; 3; 3) nicht auf g liegt:

Punktprobe: (I) $2 = 4 + r$

(II) $3 = 1 + r$

(III) $3 = -1$ Widerspruch, also liegt C nicht auf g.

b) $$\varepsilon_1: \vec{x} = \vec{a} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) Gleichung der Schnittgerade s:

$$\text{x-y-Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) $4 + r - 2s = t$

(II) $1 + r + 2s = u$

(III) $-1 \quad + 4s = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{4}$

$$\text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt S_Z:

z-Achse: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; z und ε_1 gleichsetzen ergibt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 + r - 2s = 0 \\ \text{(II)} & 1 + r + 2s = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow r = -\frac{5}{2} \Rightarrow s = \frac{3}{4} \Rightarrow t = 2$$

(III) $-1 \quad + 4s = t$

$\Rightarrow S_Z(0; 0; 2)$

d) Es muß gelten: $\left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{DE}\right|$. D ist Punkt der Gerade g:

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-r \\ 2-r \\ 4 \end{pmatrix}$$

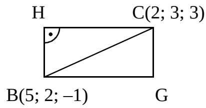
$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-r \\ 2-r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-2-r)^2 + (2-r)^2 + 4^2} = \sqrt{(2-r)^2 + (2-r)^2}$$

$$\Rightarrow (-2-r)^2 + (2-r)^2 + 16 = (2-r)^2 + (2-r)^2 \Rightarrow r = -2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(2; -1; -1)$$

e) $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$



$$H \in g \Rightarrow \overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} -2-r \\ 2-r \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} 1-r \\ 1-r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2-r \\ 2-r \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-r \\ 1-r \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$; somit ergibt sich:

$(-2-r)(1-r) + (2-r)(1-r) + 4 \cdot 0 = 0$, also $2r^2 - 2r = 0$, d.h. $r_1 = 0$, $r_2 = 1$
$\Rightarrow H_1(4; 1; -1)$, $H_2(5; 2; -1) = B$, d.h. $H(4; 1; -1)$

$$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{BG}, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x - 5 \\ g_y - 2 \\ g_z + 1 \end{pmatrix}, \text{ also: } \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow G(3; 4; 3)$$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.1	a)	b)	c)	d)	e)
15 BE	2 BE	1 BE	4 BE	4 BE	4 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) Parametergleichungen für g_1 und g_2:

$$g_1\!: \vec{x} = \vec{b} + r\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2\!: \vec{x} = \vec{a} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nachweis, daß g_1 und g_2 windschief sind:
Zu zeigen ist: g_1 und g_2 sind nicht parallel und schneiden einander nicht.

$$\text{Parallelität: } \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -4 = 2k \Rightarrow k = -2 \\ 4 = 2k \Rightarrow k = 2 \\ 0 = 4k \Rightarrow k = 0 \end{array}$$

Es existiert keine Lösung, also sind g_1 und g_2 nicht parallel. (1)

Schnittpunkt: $s\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rl}\text{(I)} & 2s = 4 - 4r\\ \text{(II)} & 2s = 4r\\ \text{(III)} & 4s = 0 \quad \Rightarrow\ s = 0 \ \Rightarrow\ r = 0\end{array}$

Diese Werte für r und s in (I) eingesetzt ergeben den Widerspruch 0 = 4, also haben g_1 und g_2 keinen gemeinsamen Punkt (keinen Schnittpunkt). (2)

Aus (1) und (2) folgt: g_1 und g_2 sind windschief.

b) Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden:

$s_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix},\ s_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix}$

$s_1 = s_2\colon \begin{array}{rlll}\text{(I)} & 2 & = 4 - 3s & \\ \text{(II)} & 2 & = 3s & \Rightarrow\ s = \frac{2}{3}\\ \text{(III)} & 4 - 4r = & 2s & \Rightarrow\ r = \frac{2}{3}\end{array}$

$\Rightarrow S(2;\ 2;\ \frac{4}{3})$

Der Schnittwinkel α der Seitenhalbierenden s_1 und s_2 ist gleich dem Winkel zwischen deren Richtungsvektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{8}{4\sqrt{22}} \approx 0{,}4264 \ \Rightarrow\ \alpha \approx 64{,}76°$$

c) $\varepsilon\colon \vec{x} = \vec{b} + s\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

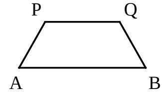
d) $h = \varepsilon\colon \begin{array}{rllll}\text{(I)} & 1 + r = & 4 - 4s - 2t & & \\ \text{(II)} & 1 = & 4s + 2t & & \\ \text{(III)} & 2 = & 4t & \Rightarrow\ t = \frac{1}{2} & \Rightarrow\ s = 0 \ \Rightarrow\ r = 2\end{array}$

$\Rightarrow Q(3;\ 1;\ 2)$

e) $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $P(1;\ 1;\ 2) \in h \ \Rightarrow\ r = 0;\ \ Q \in h \ \Rightarrow\ r = 2$

$\Rightarrow 0 < r < 2$

f) 1) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{PQ}\colon \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \ \Rightarrow\ k = 2$, also parallel



2) $\left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{QB}\right|$:

$$\left|\overrightarrow{PA}\right| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6}\text{ (LE)};\quad \left|\overrightarrow{QB}\right| = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6}\text{ (LE) – gleiche Längen}$$

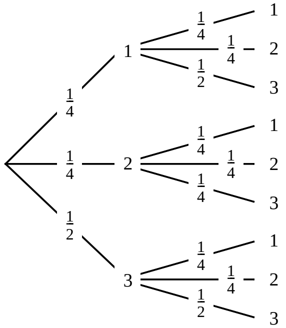
Das Viereck ABQP ist also ein gleichschenkliges Trapez.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.2	a)	b)	c)	d)	e)	f)
15 BE	3 BE	5 BE	1 BE	2 BE	2 BE	2 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.3

a)



e_i	$P(e_i)$
(1,1)	$(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$
(1,2)	$(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$
(1,3)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
(2,1)	$(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$
(2,2)	$(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$
(2,3)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
(3,1)	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
(3,2)	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
(3,3)	$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (3,3)\}$

b) Ereigniswahrscheinlichkeiten:

$P(A) = 1 - P((1,1)) = \frac{15}{16}$

$P(B) = P((1,2)) + P((2,1)) + P((2,3)) + P((3,2)) = \frac{3}{8}$

$P(C) = P((1,3)) + P((2,3)) + P((3,1)) + P((3,2)) + P((3,3)) = \frac{3}{4}$

$P(D) = P(B \cap C) = P((2,3)) + P((3,2)) = \frac{1}{4}$

Untersuchung der Ereignisse B und C auf Unabhängigkeit:
Es müßte gelten: $P(B) \cdot P(C) = P(B \cap C)$

$P(B) \cdot P(C) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$; $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ B und C sind abhängig voneinander.

c) X: Drehen einer „1“; $n = 8$; p – Wahrscheinlichkeit für das Drehen einer „1“
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9 \;\Rightarrow\; 1 - (1 - p)^8 \geq 0{,}9$
(Bei achtmaligem Drehen wird die „1“ mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - p)^8$ nicht „erdreht“.)
$\Rightarrow 0{,}1 \geq (1 - p)^8$ und somit folgt $p \geq 0{,}2501$

d)

Anzahl der verk. Räder	0	1	2	3
Verkaufswahrscheinlichkeit p	0,01	0,09	0,1	0,8
Gewinn in DM	–300 Ausgaben: 300 DM Einnahmen: 0 DM	–180 Ausgaben: 300 DM Einnahmen: 120 DM	–60 Ausgaben: 300 DM Einnahmen: 240 DM	60 Ausgaben: 300 DM Einnahmen: 360 DM

$E(G) = -300 \cdot 0{,}01 - 180 \cdot 0{,}09 - 60 \cdot 0{,}1 + 60 \cdot 0{,}8 = 22{,}80$
Der Erwartungswert für den Gewinn des Verkäufers ist 22,80 DM.

e) X: gezinktes Glücksrad; $n = 4$; $k = 2$; $p = \frac{1}{2}$
In der Stichprobe befinden sich x gezinkte Räder und $(4 - x)$ fehlerfreie Räder; werden 2 Räder zufällig ausgewählt, so ist darunter mit $p = \frac{1}{2}$ ein „gezinktes“ Rad:

$$P(X) = \frac{1}{2} = \frac{\binom{x}{1} \cdot \binom{4-x}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{x\,(4 - x)}{6}$$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$, und somit $x_1 = 3$, $x_2 = 1$
Unter den angebotenen Rädern waren 3 gezinkte Räder oder 1 gezinktes Rad.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.3	a)	b)	c)	d)	e)
15 BE	2 BE	5 BE	2 BE	3 BE	3 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1997 / 98

Gymnasium

Bertha-v.-Suttner-OS Berlin

Aufgabe 1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $P(-3\,|\,5\,|\,3)$ sowie die Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt.

Die Ebene ε enthält den Punkt P und die Gerade g.
Stellen Sie eine Gleichung der Ebene ε in Parameterform und in Normalform auf. [Mögliches Ergebnis: $\varepsilon\colon 2x + y + 2z = 5$]

b) Zeigen Sie, dass die Richtungsvektoren von g und h zwar senkrecht aufeinander stehen, die Geraden selbst aber windschief zueinander verlaufen.

c) Die Ebene ε und die Gerade h haben einen gemeinsamen Schnittpunkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

d) Bestimmen Sie die Maßzahl des Schnittwinkels α zwischen der Geraden h und der Ebene ε im Punkt S.

e) Der Punkt $Q(-2\,|\,2\,|\,-1)$ ist ein Punkt der Geraden h (Nachweis nicht erforderlich).
Bestimmen Sie auf der Geraden g den Punkt R so, dass die Gerade QR senkrecht zu g verläuft.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f\colon x \mapsto \frac{x^2+3}{x+1}$ im maximalen Definitionsbereich D_f. Ihr Graph sei G_f.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f und untersuchen Sie G_f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

b) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.

c) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

[Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$]

d) Zeichnen Sie G_f unter Verwendung ihrer bisherigen Ergebnisse für $-5 \le x \le 5$ in ein x-y-Koordinatensystem (1 Längeneinheit = 1 cm).

e) Gegeben ist weiter die Funktion g mit $g\colon x \mapsto \frac{x^4+3x^2-x-1}{x^2(x+1)}$ mit $D_g = \mathbb{R}_+$.

Weisen Sie nach, dass für $x \in \mathbb{R}_+$ gilt: $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Differenzfunktion $f(x) - g(x)$, dass sich G_f und G_g für $x > 0$ nicht schneiden.

f) Berechnen Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das von G_f und G_g sowie den Geraden $x = 1$ und $x = 4$ begrenzt wird.
Welcher Flächeninhalt A_a ergibt sich, falls die obere Intervallgrenze a $(a > 1)$ gegen unendlich strebt?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f: x \mapsto -\frac{1}{2}(x + 1) \cdot e^{-2x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.
Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle von G_f.
Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$.

b) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung von f gilt: $f'(x) = (x + \frac{1}{2}) \cdot e^{-2x}$.
Geben Sie das Monotonieverhalten von f sowie Art und Lage des Extrempunktes von G_f an.

c) Zeigen Sie nur mit Hilfe der 2. Ableitung der Funktion f, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt.

d) Zeichnen Sie nun G_f im Bereich $-1{,}5 \le x \le 4$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein x-y-Koordinatensystem (1 Längeneinheit = 2 cm).

e) Es sei eine weitere Funktion F mit $F: x \mapsto (\frac{3}{4}x + \frac{7}{8}) \cdot e^{-2x} + f(x)$ gegeben; $D_F = \mathbb{R}$.
Weisen Sie durch Rechnung nach, dass F eine Stammfunktion von f ist.

f) Bestimmen Sie für $k > 0$ den Wert des Integrals $\int_{-1{,}5}^{k} f(x)\,dx$.
Bestimmen Sie den Grenzwert des Integrals für $k \to +\infty$.
Deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1

a) Nachweis, dass $P \notin g$: $\begin{pmatrix}-3\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ führt auf das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & -3 = 0 - 2r & \Leftrightarrow\ r = 1{,}5 \\ \text{(II)} & 5 = 3 + 2r & \Leftrightarrow\ r = 1 \qquad \text{Widerspruch!} \\ \text{(III)} & 3 = 1 + r & \Leftrightarrow\ r = 2 \end{array}$$

Aufstellen einer Ebenengleichung:

– in Parameterform, z.B.: $\varepsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}, \quad \rho, \lambda \in \mathbb{R}$

– in Normalform, z.B.: $\varepsilon\colon \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right] = 0$

b) Die Richtungsvektoren von g und h sind genau dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist: $\vec{v}_g \perp \vec{v}_h \Leftrightarrow \vec{v}_g \cdot \vec{v}_h = 0$.

$\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0$

Nachweis, dass g und h keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben:

$\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & -2r - s = -2 \\ \text{(II)} & 2r + s = -1 \\ \text{(III)} & r - 4s = -2 \end{array}$

Addition der Gleichungen (I) und (II) führt zur Widerspruchszeile 0 = –3.

c) Bestimmung des Ortsvektors $\vec{s}$ des Schnittpunktes S, z.B. durch Einsetzen der Geradengleichung von h in eine Ebenengleichung in Normalenform von ε.

$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right] = 0$ führt zu $-4 + 2\tau - 1 - \tau - 4 + 8\tau = 0 \Rightarrow \tau = 1$

Es ergibt sich: $\vec{s} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$, also: S(–1 | 1 | 3) ist Schnittpunkt.

d) Es sei $\vec{v}_h = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von h und $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von ε. Dann gilt: $\sin\alpha = \dfrac{\left|\vec{v}_h \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{v}_h\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{|9|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

Die Maßzahl des Schnittwinkels beträgt 45°.

e) Der gesuchte Punkt R muss in der Lotebene η zu g liegen, die auch den Punkt Q enthält. Dabei ist ein Richtungsvektor von g immer auch ein Normalenvektor von η und der Stützvektor von η ergibt sich durch den Ortsvektor von Q. Somit lautet eine Ebenengleichung von η in Normalenform: $\eta\colon \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}\right] = 0$

Der Punkt R ist dann genau der Schnittpunkt von g und η.
Einsetzen des Geradenterms von g in die Normalenform ergibt:

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}\right] = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2-2\mu\\1+2\mu\\2+\mu\end{pmatrix} = 0, \text{ also } \mu = 0$$

Also ist $\overrightarrow{0R} = \vec{r} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ und der gesuchte Punkt ist R(0 | 3 | 1).

Die Gleichung der Geraden QR lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis, daß $P \notin g$	2 BE
	Ebenengleichungen in Parameter- und Normalenform	8 BE
b)	Nachweis der Orthogonalität	2 BE
	Nachweis, dass kein Schnittpunkt existiert	4 BE
c)	Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes S	6 BE
d)	Maßzahl des Schnittwinkels α	4 BE
e)	Bestimmung der Koordinaten des Punktes R	6 BE
		32 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2

Anmerkung: Für die nachstehenden Ausführungen gilt: $Z(x) = x^2 + 3$; $N(x) = x + 1$.

a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ wegen $N(x) \neq 0$ für alle $x \in D_f$
Schnittpunkt mit der y-Achse: Y(0 | 3)
Wegen $Z(x) = x^2 + 3 > 0$ für alle $x \in D_f$ existiert kein Schnittpunkt mit der x-Achse.

b) Senkrechte Asymptote:
Wegen $Z(-1) = 4$ und $N(-1) = 0$ liegt bei $x_P = -1$ eine Polstelle vor. Es handelt sich um eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.
Asymptotengleichung: $x = -1$

Weitere Asymptote:

$(x^2 + 3) : (x + 1) = x - 1 + \frac{4}{x+1} \Rightarrow y = x - 1$ ist weitere Asymptote

c) Extrempunkte:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x+1)^2 - (2x+2) \cdot (x^2+2x-3)}{(x+1)^4} = \frac{8}{(x+1)^3}$$

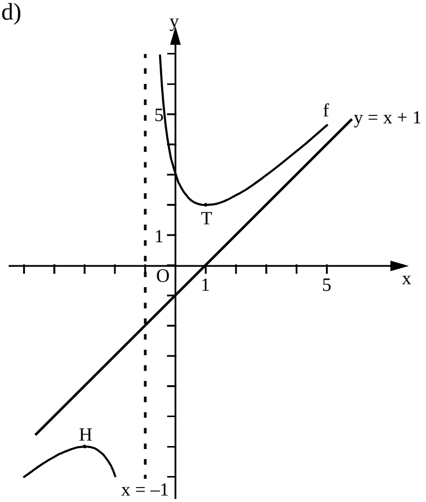
$f''(x_E) = 0 \Rightarrow \frac{x_E^2 + 2x_E - 3}{(x_E+1)^2} = 0$, also $x_{E_1} = 1$; $x_{E_2} = -3$

$f''(x_{E_1}) = 1 > 0 \Rightarrow$ (relatives) Minimum an der Stelle $x_{E_1} = 1$

$f''(x_{E_2}) = -1 < 0 \Rightarrow$ (relatives) Maximum an der Stelle $x_{E_2} = -3$

Zugehörige Punkte: Tiefpunkt T(1 | 2); Hochpunkt H(–3 | –6)

d)



e) $f(x) - g(x) =$

$$= \frac{x^2+3}{x+1} - \frac{x^4 + 3x^2 - x - 1}{x^2 \cdot (x+1)} =$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2 - x^4 - 3x^2 + x + 1}{x^2 \cdot (x+1)} =$$

$$= \frac{x+1}{x^2 \cdot (x+1)} = \frac{1}{x^2}$$

$f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ für alle $x > 0 \Rightarrow$ kein gemeinsamer Punkt

f) $$A = \int_1^4 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \text{ (FE)}$$

$$A_a = \int_1^a [f(x) - g(x)]\,dx = \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = -\frac{1}{a} + 1 = 1 - \frac{1}{a} \text{ (FE)}$$

Damit gilt für $a \to \infty$: $\lim\limits_{a \to \infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \lim\limits_{a \to \infty} 1 - \lim\limits_{a \to \infty} \frac{1}{a} = 1$

Der Inhalt der Fläche strebt gegen 1 (FE).

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Schnittpunkte (Existenz/Nichtexistenz)	4 BE
b)	Asymptoten	5 BE
c)	Terme der Ableitungsfunktionen	6 BE
	Extrempunkte; Art und Lage der Extrempunkte	5 BE
d)	Zeichnung des Graphen	7 BE
e)	Nachweis, dass $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2}$ gilt	4 BE
	Nachweis der Nichtexistenz eines Schnittpunktes	2 BE
f)	Berechnung des Flächeninhalts	3 BE
	Flächeninhalt in Anbhängigkeit von a; Grenzwertbestimmung	4 BE
		40 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3

a) Nullstelle: $N(-1 \mid 0)$

Verhalten am Rande des Definitionsbereichs:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty;\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}(x+1) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + (x+1) \cdot e^{-2x} = (x + \frac{1}{2}) \cdot e^{-2x}$

Extrempunkt und Monotonieverhalten:

$f'(x_E) = 0 \Rightarrow (x_E + \frac{1}{2}) \cdot e^{-2x_E} = 0$, also $x_E + \frac{1}{2} = 0$ und somit $x_E = -\frac{1}{2}$

Für $x < -\frac{1}{2}$ gilt: $f'(x) < 0$, also ist f streng monoton fallend.

Für $x > -\frac{1}{2}$ gilt: $f'(x) > 0$, also ist f streng monoton steigend.

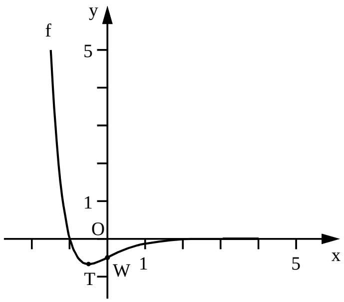
Aufgrund des Vorzeichenwechselkriteriums der 1. Ableitung ergibt sich als

Tiefpunkt: $T(-\frac{1}{2} \mid -\frac{e}{4})$.

c) $f''(x) = e^{-2x} + (x + \frac{1}{2}) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x} - e^{-2x} = -2x \cdot e^{-2x}$

Wendepunkt:
$f''(x_W) = 0 \Rightarrow -2x_W \cdot e^{-2x_W} = 0$, also $-2x_W = 0$ und somit $x_W = 0$
Für $x < 0$ gilt: $f''(x) > 0$, also ist G_f linksgekrümmt.
Für $x > 0$ gilt: $f''(x) < 0$, also ist G_f rechtsgekrümmt.
Aufgrund des Vorzeichenwechselkriterium der 2. Ableitung ergibt sich als
Wendepunkt: $W(0 \mid -\frac{1}{2}$.

d)



e) Nachweis, dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \left[\left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{8}\right) \cdot e^{-2x}\right]'$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot e^{-2x} - 2 \cdot \left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{8}\right) \cdot e^{-2x}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cdot (1 + x)\, e^{-2x} = f(x)$$

f) Berechnung des bestimmten Integrals für $k > 0$ ergibt:

$$\int_{-1,5}^{k} f(x)\,dx = \left[\left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{8}\right) \cdot e^{-2x}\right]_{-1,5}^{k} = \left(\tfrac{1}{4}k + \tfrac{3}{8}\right) \cdot e^{-2k} - \left(-\tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8}\right) \cdot e^{3} = \left(\tfrac{1}{4}k + \tfrac{3}{8}\right) \cdot e^{-2k}$$

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-1,5}^{k} f(x)\,dx = \lim_{k \to \infty} \left(\tfrac{1}{4}k + \tfrac{3}{8}\right) \cdot e^{-2k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\tfrac{1}{4}k + \tfrac{3}{8}}{e^{2k}} = 0$$

Geometrische Interpretation:
Das Integral berechnet lediglich die Flächenbilanz: Der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse gelegener Flächen wird von dem Flächeninhalt der oberhalb der x-Achse gelegenen Flächen subtrahiert.
Somit hat für $k \to \infty$ das von G_f und der x-Achse von $x = -1{,}5$ bis $x = -1$ oberhalb der x-Achse eingeschlossene Flächenstück betragsmäßig den gleichen Inhalt wie das unterhalb der x-Achse von G_f und der x-Achse von $x = -1$ bis $x \to \infty$ eingeschlossene Flächenstück.

Bewertungsvorschlag:

a)	Schnittpunkt mit der x-Achse	2 BE
	Verhalten am Rande des Definitionsbereiches	4 BE
b)	Term der 1. Ableitungsfunktion	2 BE
	Extrempunkt; Art und Lage der Extrempunkte	5 BE
c)	Term der 2. Ableitungsfunktionen	2 BE
	Nachweis der Existenz eines Wendepunktes	4 BE
d)	Zeichnung des Graphen	7 BE
e)	Nachweis, dass F eine Stammfunktion von f ist	5 BE
f)	Berechnung des bestimmten Integrals	3 BE
	Bestimmung des Grenzwertes; geometrische Interpretation	4 BE
		38 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1997 / 98

Gymnasium

Ernst-Friedrich-Oberschule Berlin

Aufgabe 1 (34% der BE)

Gegeben ist die Funktion f durch die Funktionsgleichung

$f(x) = x \cdot (1 - \ln x)^2$ mit $D = \mathbb{R}^+$.

a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen.
b) Ermitteln Sie die Extrem- und Wendepunkte der Funktion f.
c) Zeichnen Sie die Funktion f im Bereich $0 < x \leq 4$.
Beachten Sie das Verhalten des Funktionsgraphen an der Stelle $x = 0$.
d) Zeigen Sie, daß die Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2}x^2(\frac{5}{2} - 3\ln x + \ln^2 x)$ und $x \in D$ eine Stammfunktion von f ist.
e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, der Geraden $x = 1$, der Nullstelle und dem Funktionsgraphen vollständig eingeschlossen wird.

Aufgabe 2 (29% der BE)

Gegeben ist die Funktionenschar f_c durch die Gleichung

$f_c(x) = \frac{x^2 + c - 4}{x + 2}$ mit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ und $c \in \mathbb{R}^+$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Scharkurven mit den Koordinatenachsen.
b) Zeigen Sie, daß alle Scharkurven die Asymptoten $y = x - 2$ und $x = -2$ besitzen.
c) Untersuchen Sie f_1 auf Extrem- und Wendepunkte.
d) Zeichnen Sie im Bereich $-6 \leq x \leq 4$ die Asymptoten und den Graphen der Funktion f_1.

Aufgabe 3 (37% der BE)

Gegeben sind die Punkte $A(5\,|\,4\,|\,1)$, $B(0\,|\,4\,|\,1)$ und $C(0\,|\,1\,|\,5)$.

a) Zeigen Sie, daß ABC ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist.
b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $S(-1\,|\,0\,|\,1)$ von der Ebene $E = (ABC)$.
c) Zeichnen Sie die Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S in ein kartesisches Koordinatensystem.
d) Welches Volumen hat die Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S?
e) Geben Sie eine Gleichung der Kugel k an, die B enthält und S als Mittelpunkt hat.
f) Wird die Kugel k durch die Ebene E geschnitten?
Begründen Sie Ihre Antwort.
g) Bestimmen Sie eine Gleichung der Kugel mit dem Mittelpunkt S, die die Ebene E berührt, und geben Sie die Koordinaten des Berührungspunktes an.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1

a) $f(x) = 0 \Rightarrow x \cdot (1 - \ln x)^2 = 0$ ($x_{0_2} = 0$ entfällt, da $D = \mathbb{R}^+$)

$\Rightarrow (1 - \ln x)^2 = 0 \Rightarrow 1 = \ln x$, also $x_{0_1} = e$; $N_1(e \mid 0)$

b) $f(x) = x \cdot (1 - \ln x)^2 = x \cdot (1 - 2\ln x + \ln^2 x) = x - 2x\ln x + x\ln^2 x$

$f'(x) = 1 - (2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}) + \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$

$= 1 - 2\ln x - 2 + \ln^2 x + 2\ln x = \ln^2 x - 1$

$f''(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}\ln x$

$f'''(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} + (-\frac{2}{x^2}\ln x) = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2}\ln x = \frac{2}{x^2}(1 - \ln x)$

Extrempunkte:

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln^2 x - 1 = 0$, d.h. $\ln x = \pm 1 \Rightarrow x_{E_1} = e$; $x_{E_2} = \frac{1}{e}$

$f''(e) = 2\ln e \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e} > 0$; $f(e) = e(1 - 1)^2 = 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(e \mid 0)$

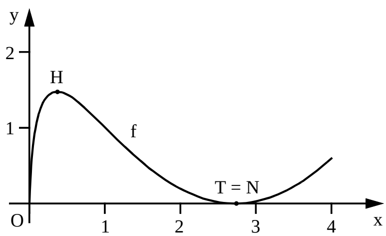
$f''(\frac{1}{e}) = 2e\ln\frac{1}{e} = -2e < 0$; $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}(1 - (-1))^2 = \frac{4}{e} \Rightarrow$ Hochpunkt $H(\frac{1}{e} \mid \frac{4}{e})$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}\ln x = 0$, also $\ln x = 0 \Rightarrow x_W = 1$

$f'''(1) = 2(1 - \ln 1) = 2 \neq 0$; $f(1) = 1 \cdot (1 - \ln 1)^2 = 1 \Rightarrow$ Wendepunkt $W(1 \mid 1)$

c)



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25
f(x)	n.d.	1,42	1,43	1,24	1	0,75

x	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75
f(x)	0,53	0,34	0,18	0,08	0,02	0,01

x	3	3,25	3,5	3,75	4
f(x)	0,03	0,10	0,22	0,39	0,60

d) Zu zeigen: $F'(x) = f(x)$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2(\frac{5}{2} - 3\ln x + \ln^2 x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^2\ln x + \frac{1}{2}x^2\ln^2 x$

$F'(x) = \frac{5}{2}x - (3x\ln x + \frac{3}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}) + x\ln^2 x + \frac{1}{2}x^2 \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$

$= \frac{5}{2}x - 3x\ln x - \frac{3}{2}x + x\ln^2 x + x\ln x = x - 2x\ln x + x\ln^2 x$

$= x \cdot (1 - 2\ln x + \ln^2 x) = x \cdot (1 - \ln x)^2$

e) $A = \int_1^e f(x)\,dx = [\frac{1}{2}x^2(\frac{5}{2} - 3\ln x + \ln^2 x)]_1^e$ (vgl. d))

$= \frac{1}{2}e^2(2{,}5 - 3 + 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{4}e^2 - \frac{5}{4} \approx 0{,}597 \text{ (FE)} \approx 0{,}6 \text{ (FE)}$

Bewertungsvorschlag:

a)	Ermittlung der Nullstelle	2 BE
b)	Ableitungen f'(x), f''(x), f'''(x)	4 BE
	Bestimmung des Hoch- und Tiefpunktes	5 BE
	Bestimmung des Wendepunktes	3 BE
c)	Angabe weiterer Wertepaare	4 BE
	Zeichnung des Graphen	8 BE
d)	Nachweis durch Ableitung der Stammfunktion	4 BE
e)	Flächenberechnung	4 BE
		34 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2

a) Schnittpunkte mit der y-Achse:

$f_c(0) = \frac{0 + c - 4}{2} = \frac{c-4}{2} \Rightarrow P_y(0 \mid \frac{c-4}{2})$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$0 = \frac{x^2 + c - 4}{x + 2} \Rightarrow 0 = x^2 + c - 4$ (da $x \neq 2$)

$\Rightarrow x^2 = 4 - c$, also $x_{1,2} = \pm\sqrt{4-c} \Rightarrow P_{x_1}(\sqrt{4-c} \mid 0)$; $P_{x_2}(-\sqrt{4-c} \mid 0)$

b) Asymptoten:

Senkrechte Asymptoten an der Polstelle:

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$; Polstelle: $v(x) = 0$ und $u(x) \neq 0$

$v(x) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$, also $x_P = -2$

$u(-2) = (-2)^2 + c - 4 = c \neq 0$, da $c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ senkrechte Asymptote bei $x = -2$

Schiefe Asymptote: Ermittlung mittels Polynomdivision

$(x^2 + c - 4) : (x + 2) = x - 2 + \frac{c}{x+2} \Rightarrow y = x - 2$ ist schiefe Asymptote.

$$\begin{array}{l}
\underline{-(x^2 + 2x)} \\
\quad -2x + c - 4 \\
\quad \underline{-(-2x \quad - 4)} \\
\qquad\qquad c
\end{array}$$

c) $f_1(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$f_1'(x) = \frac{2x\,(x+2) - (x^2-3)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2+3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$

$f_1''(x) = \frac{(2x+4)\cdot(x+2)^2 - (x^2+4x+3)\cdot 2\,(x+2)}{(x+2)^4}$

$= \frac{(2x+4)\cdot(x+2) - (x^2+4x+3)\cdot 2}{(x+2)^3} = \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x-6}{(x+2)^3}$

$= \frac{2}{(x+2)^3}$

Extrempunkte:

$f_1'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$ $(x + 2 \neq 0$, da $x \neq 2)$

$\Rightarrow x_{E_1, E_2} = -2 \pm \sqrt{4-3}$, also $x_{E_1} = -3$, $x_{E_2} = -1$

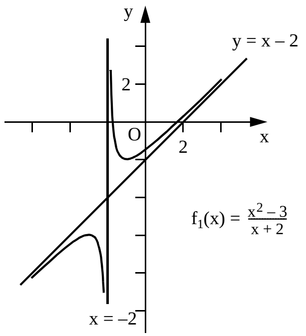
$f_1''(-3) = \frac{2}{-1} < 0$, $f_1(-3) = \frac{9-3}{-1} = -6 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(-3\,|\,-6)$

$f_1''(-1) = \frac{2}{1} > 0$, $f_1(-1) = \frac{1-3}{1} = -2 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(-1\,|\,-2)$

Wendepunkte:

$f_1''(x) = 0 \Rightarrow 2 = 0$ Widerspruch, also keine Wendepunkte möglich

d)



x	–6	–5	–4	–3	–2,5	–2,25
$f_3(x)$	–8,25	–7,33	–6,5	–6	–6,5	–8,25

x	–1	0	1	2	3	4
$f_3(x)$	–2	–1,5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	1,2	2,16

Bewertungsvorschlag:

a)	Bestimmung der Schnittpunkte	5 BE
b)	Asymptotennachweis	4 BE
c)	Ableitungen $f_1'(x)$, $f_1''(x)$	4 BE
	Angabe der Extrempunkte	5 BE
	Nachweis, daß keine Wendestelle existiert	1 BE
d)	Angabe weiterer Wertepaare	4 BE
	Zeichnung des Graphen und der Asymptoten	6 BE
		29 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3

a) Nachweis, daß Dreieck ABC rechtwinklig ist:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Zu zeigen ist: $\vec{a} \perp \vec{b}$, also $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = (-5) \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot (-4) = 0$$

Nachweis, daß Dreieck ABC gleichschenklig ist:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25} = 5 \text{ (LE)}; \ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9 + 15} = 5 \text{ (LE)}$$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, d.h., das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

b) Aufstellen der Ebenengleichung:

$$\vec{u} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{Ax}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1-5 & -5 & -5 \\ x_2-4 & 0 & -3 \\ x_3-1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$(x_1 - 5) \cdot 0 - (x_2 - 4) \cdot (-20) + (x_3 - 1) \cdot 15 = 0$

$\Rightarrow 20x_2 - 80 + 15x_3 - 15 = 0$ bzw. $20x_2 + 15x_3 - 95 = 0$

Koordinatenform der Ebenengleichung: $E: 4x_2 + 3x_3 - 19 = 0$

Hessesche Normalform der Ebene:

$$\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0; \ \text{Normalenvektor: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{4x_2 + 3x_3 - 19}{\sqrt{16 + 9}} = 0$$

Abstandsberechnung: S(–1 | 0 | 1) in HNF einsetzen

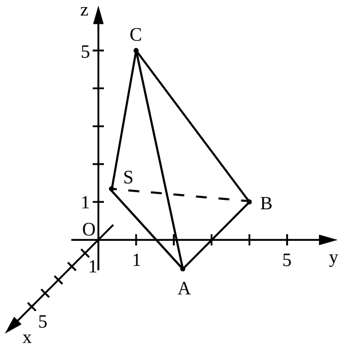
$$d(E, S) = \left| \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 19}{5} \right| = \frac{16}{5} \text{ (LE)} = 3{,}2 \text{ (LE)}$$

Weiterer Lösungsweg:

Für E: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ gilt: $d = |(\vec{s} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$.

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0; \ \text{Normaleneinheitsvektor: } \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d(E, S) = \left| \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = |(-4) \cdot \tfrac{4}{5}| = \tfrac{16}{5} \text{ (LE)}$$

c) 

d) $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$, wobei

$A_G = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2}$ (FE) = 12,5 (FE) (Grundfläche ist rechtwinkliges Dreieck)

h = 3,2 (LE) (siehe Teilaufgabe b)

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 12{,}5 \text{ (FE)} \cdot 3{,}2 \text{ (LE)} = \frac{40}{3}$ (VE)

e) $M = S(-1 \mid 0 \mid 1)$

$r = |\overrightarrow{BM}|$; $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r^2 = |\overrightarrow{BM}|^2 = 1 + 16 = 17$

Koordinatenform: $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 17$

Oder vektoriell:

$\vec{m}$ sei der Ortsvektor des Mittelpunktes: $\vec{m} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{x}$ sei der Ortsvektor zu einem Punkt der Kugel. Es gilt:

$(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2 \Rightarrow \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 = 17$

f) Die Ebene E schneidet die Kugel k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r in einem Kreis, falls der Abstand d des Mittelpunktes M von der Ebene E kleiner als r ist.
Laut Teilaufgabe b) beträgt der Abstand des Mittelpunktes M (M = S) von der Ebene E d = 3,2 (LE). Nach Teilaufgabe e) ist der Radius der Kugel

$r = \sqrt{17}$ (LE) ≈ 4,1 (LE). Es gilt somit $r < d$. Also schneidet die Ebene die Kugel.

g) Gleichung der Kugel mit dem Mittelpunkt S(–1 | 0 | 1), die die Ebene E berührt: Die Ebene E ist Tangentialebene an der Kugel k. Der Abstand des Kugelmittelpunktes S von der Ebene E ist gleich dem Kugelradius r.

Abstand $d(E, S) = \frac{16}{5}$ (LE) (siehe Teilaufgabe b)

$\Rightarrow$ Kugelgleichung: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{256}{25}$

Gleichung der Tangentialebene: $(\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = r^2$

Gesucht: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$; X sei ein beliebiger Punkt der Tangentialebene.

$\Rightarrow \overrightarrow{X_1} = \vec{A},\ \overrightarrow{X_2} = \vec{B},\ \overrightarrow{X_3} = \vec{C},\ \vec{m} = \vec{S} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A einsetzen: $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{256}{25} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + 1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix} = \frac{256}{25}$

$6(b_1 + 1) + 4b_2 = \frac{256}{25}$, d.h. $6b_1 + 6 + 4b_2 = \frac{256}{25}$

$\Rightarrow$ (I) $6b_1 + 4b_2 = 4{,}24$

B einsetzen: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 + 1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix} = \frac{256}{25} \Rightarrow (b_1 + 1) + 4b_2 = \frac{256}{25}$

$\Rightarrow$ (II) $b_1 + 4b_2 = 9{,}24$

(I) $6b_1 + 4b_2 = 4{,}24$
(II) $b_1 + 4b_2 = 9{,}24$

(I) – (II) $5b_1 = -5 \Rightarrow b_1 = -1$
b_1 in (II) $-1 + 4b_2 = 9{,}24 \Rightarrow b_2 = 2{,}56$

C einsetzen: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 + 1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix} = \frac{256}{25} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + 1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix} = \frac{256}{25}$

$\Rightarrow (b_1 + 1) + b_2 + 4(b_3 - 1) = \frac{256}{25}$, also $b_1 + 1 + b_2 + 4b_3 - 4 = \frac{256}{25}$

$\Rightarrow$ (III) $b_1 + b_2 + 4b_3 = 13{,}24$
Einsetzen von b_1 und b_2 in (III) ergibt: $-1 + 2{,}56 + 4b_3 = 13{,}24$, also $b_3 = 2{,}92$.

$\Rightarrow b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2{,}56 \\ 2{,}92 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Berührungspunkt: B(–1 | 2,56 | 2,92)

Weiterer Lösungsweg:

$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (vgl. b)); Lotgerade g von M auf E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

F(–1 | 4t | 1 + 3t) $\in$ g sei der Fußpunkt des Lotes von M auf die Ebene E.
F in Ebenengleichung E: $4x_2 + 3x_3 - 19 = 0$ einsetzen:

$16t + 3(1 + 3t) - 19 = 0$, d.h. $16t + 3 + 9t - 19 = 0 \Rightarrow 25t = 16$, also $t = \frac{16}{25}$

$\Rightarrow F(-1 \mid \frac{64}{25} \mid \frac{73}{25})$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis, daß ΔABC gleichschenklig-rechtwinklig ist	6 BE
b)	Bestimmung des Normalenvektors von E	4 BE
	Bestimmung des Normaleneinheitsvektors	1 BE
	Aufstellen der HNF	2 BE
	Abstandsermittlung	2 BE
c)	Zeichnung	6 BE
d)	Berechnung des Volumens der Pyramide	3 BE
e)	Ermittlung der Kugelgleichung	2 BE
f)	Aussage: Kugel wird geschnitten; Begründung	1 BE
g)	Ermittlung der Kugelgleichung; Koordinaten des Berührungspunktes	10 BE
		37 BE

Abiturprüfung Grundkurs

1997 / 98

Gymnasium

Gesamtschule Bernau / Zepernick

Aufgabe 1

Eine Funktionenschar sei durch die Gleichung $f_t(x) = tx^2(x^2 - 2) + 3$ $(x, t \in \mathbb{R}, t > 0)$ gegeben. Ihr Schaubild sei K_t.

a) Untersuchen Sie die Funktion $f_3(x)$ $(t = 3)$ aus dieser Funktionenschar auf Symmetrie und ermitteln Sie die Nullstellen!
Berechnen Sie Extrem- und Wendepunkte von f_3!
Zeichnen Sie das Schaubild K_3 in ein kartesisches Koordinatensystem im Intervall $-1{,}6 \le x \le 1{,}6$!
Bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten an K_3 und geben Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes an!

b) Alle Kurven K_t schneiden sich in genau drei Punkten.
Beweisen Sie diese Aussage und berechnen Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte!

c) Von den Schaubildern K_1 und K_3 wird eine Fläche eingeschlossen.
Zeichnen Sie das Schaubild K_1 in das vorhandene Koordinatensystem ein!
Berechnen Sie den Inhalt der eingeschlossenen Fläche!

Aufgabe 2

Gegeben seien die Punkte $A(3\,|\,-1\,|\,0)$, $B(3\,|\,3\,|\,2)$, $C(0\,|\,-3\,|\,2)$, $S(3\,|\,2\,|\,9)$
sowie die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeichnen Sie die dreiseitige Pyramide ABCS sowie die Gerade g in ein kartesi sches Koordinatensystem!
(1 LE $\triangleq$ 1 cm, Verkürzungsfaktor in x-Richtung $\frac{1}{2}\sqrt{2}$)!
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC!
Die Punkte A, B, C bestimmen eine Ebene E_1.
Geben Sie eine Gleichung für E_1 in Parameterform und in Koordinatenform an!
Berechnen Sie den Abstand des Punktes S von der Ebene E_1!

b) Eine Ebene E_2 schneidet die Seitenkanten $\overline{AS}$, $\overline{BS}$ und $\overline{CS}$ der Pyramide in ihren Mittelpunkten M_1, M_2, M_3.
Zeichnen Sie die Schnittfläche $M_1M_2M_3$ in das vorhandene Koordinatensystem ein!
Zeigen Sie rechnerisch, daß die Ebenen E_1 und E_2 parallel zueinander sind!
Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes $ABCM_1M_2M_3$!

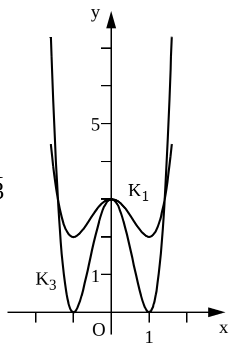
c) Zeigen Sie, daß die Geraden (CS) und g windschief sind!
Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden!
Welche Punkte auf der Geraden g haben von der Ebene E_1 den Abstand $d = 2$?

Erwartungsbild zu Aufgabe 1

a) Symmetrie:
$f_3(-x) = 3(-x)^2[(-x)^2 - 2] + 3 = 3x^2(x^2 - 2) + 3 = f_3(x)$
f_3 ist also symmetrisch zur y-Achse.

Nullstellen:
$3x^2(x^2 - 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 6x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -1$

Extrem- und Wendepunkte:
$f_3'(x) = 12x^3 - 12x;\ f_3''(x) = 36x^2 - 12;\ f_3'''(x) = 72x$
$f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1$
$f_3''(0) = -12 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum; $H(0\,|\,3)$
$f_3''(1) = 24 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum; $T_1(1\,|\,0)$
$f_3''(-1) = 24 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum; $T_2(-1\,|\,0)$
$f_3''(x) = 0 \Leftrightarrow 36x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3};\ x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$f_3'''(\frac{1}{3}\sqrt{3}) \neq 0;\ W_1(\frac{1}{3}\sqrt{3}\,|\,\frac{4}{3})$
$f_3'''(-\frac{1}{3}\sqrt{3}) \neq 0;\ W_2(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\,|\,\frac{4}{3})$



Gleichungen der Wendetangenten:
Anstieg: $f_3'(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = -\frac{8}{3}\sqrt{3};\ f_3'(-\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{8}{3}\sqrt{3}$
Gleichungen: t_1: $y = -\frac{8}{3}\sqrt{3}\,x + 4$; t_2: $y = \frac{8}{3}\sqrt{3}\,x + 4$
Schnittpunkt von t_1 und t_2: $S(0\,|\,4)$

b) Wähle t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$:
$t_1x^2(x^2 - 2) + 3 = t_2x^2(x^2 - 2) + 3$ ergibt $x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{2},\ x_3 = -\sqrt{2}$
Es gibt genau drei Lösungen, die alle von t unabhängig sind. Alle Kurven K_t schneidet sich also in genau drei Punkten: $S_1(0\,|\,3)$, $S_2(\sqrt{2}\,|\,3)$, $S_3(-\sqrt{2}\,|\,3)$.

c) $f_1(x) = x^2(x^2 - 2) + 3 = x^4 - 2x^2 + 3$
Differenzfunktion: $d(x) = f_1(x) - f_3(x) = -2x^4 + 4x^2$
Stammfunktion: $D(x) = -\frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3$

Flächenberechnung: $A = 2\int_0^{\sqrt{2}} (-2x^4 + 4x^2)\,dx = \left[-\frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}}$

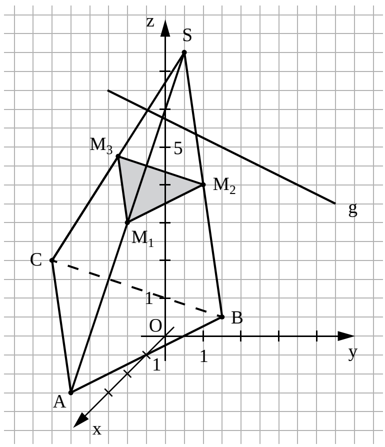
$$= 2 \cdot \frac{16}{15} \cdot \sqrt{2} = \frac{32}{15}\sqrt{2} \text{ (FE)}$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Untersuchung auf Symmetrie	1 BE
	Berechnung der Nullstellen	3 BE
	Ableitungen $f_3'(x)$, $f_3''(x)$, $f_3'''(x)$	3 BE
	Ermittlung der Extrempunkte	3 BE
	Berechnung der Wendepunkte	2 BE
	Schaubild von K_3	1 BE
	Anstieg der Wendetangenten	3 BE
	Gleichungen der Wendetangenten	2 BE
	Schnittpunkt der Wendetangenten	1 BE
b)	Beweis der Aussage	3 BE
	Angabe der 3 Schnittpunkte	3 BE
c)	Schaubild von K_1	2 BE
	Flächenberechnung	3 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2

a) Zeichnung:



Flächeninhalt ΔABC: Hier sind mehrere Rechenwege möglich, z.B.:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{20}$ (LE), $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{17}$ (LE)

$$\cos\sphericalangle CAB = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}} \Rightarrow \sphericalangle CAB \approx 77{,}5°$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\sphericalangle CAB \approx 9 \text{ (FE)}$$

Ebenengleichungen für E_1 in Parameterform: E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Umformung in Koordinatenform: E_1: $2x - y + 2z = 7$

(Bei der Umformung in Koordinatenform sind verschiedene Wege möglich.)

Abstand des Punktes S von E_1:

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Normaleneinheitsvektor: $\vec{n_o} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abstand: $d(S, E_1) = \left| \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$ (LE) = 5 (LE)

b) Mittelpunkte der Seitenkanten:

$M_{\overline{AS}} = M_1(3 \mid 0{,}5 \mid 4{,}5)$; $M_{\overline{BS}} = M_2(3 \mid 2{,}5 \mid 5{,}5)$; $M_{\overline{CS}} = M_3(1{,}5 \mid -0{,}5 \mid 5{,}5)$

Zeichnung: siehe Teilaufgabe a)

Ebenengleichung für E_2: z.B.

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. E_2: $4x - 2y + 4z = 29$

$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_2}} = 2\overrightarrow{n_{E_1}}$

Die Normalenvektoren von E_1 und E_2 sind linear abhängig $\Rightarrow E_1 \parallel E_2$.

Volumen des Pyramidenstumpfes: z.B.

$V = \frac{h}{3}(A_G + \sqrt{A_G \cdot A_D} + A_D)$ mit $A_G \approx 9$ (FE) (siehe Teilaufgabe a)

$A_D = \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_3}\right| \cdot \sin\sphericalangle M_3M_1M_2$

Da $\Delta ABC \sim \Delta M_1M_2M_3$ gilt $\sphericalangle CAB = \sphericalangle M_3M_1M_2$.

$\Rightarrow A_D \approx \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \sqrt{4{,}25} \cdot \sin\sphericalangle 77{,}5°$ (FE) $\approx 2{,}25$ (FE)

$h = d(E_1, E_2) = \left| \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 2{,}5$ (LE)

$V \approx 13{,}125$ (VE)

c) Nachweis, daß (CS) und g windschief sind:

(CS): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren sind linear unabhängig; Prüfen der Schnittpunktbedingung zeigt, daß kein Schnittpunkt vorhanden ist. Also sind (CS) und g windschief.

Abstand von g und (CS): Normalenvektor $\vec{n}$ zu g und (CS) wird ermittelt:

Aus $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$ erhält man das Gleichungssystem

(I) $4n_1 + 4n_2 + n_3 = 0$ mit den Lösungen (z.B) $n_1 = -23$, $n_2 = 25$, $n_3 = -8$.

(II) $3n_1 + 5n_2 + 7n_3 = 0$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -23 \\ 25 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{1\,218}} \begin{pmatrix} -23 \\ 25 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$d(g, (CS)) = \left| \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1\,218}} \begin{pmatrix} -23 \\ 25 \\ -8 \end{pmatrix} \right| \text{ (LE)} = \frac{132}{\sqrt{1\,218}} \text{ (LE)} \approx 3{,}78 \text{ (LE)}$$

Punkte $P \in g$ mit Abstand $d = 2$ von E_1:

$$d(P, E_1) = \left| \left(\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4+4r \\ 3+4r \\ 4+r \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \frac{2(-4+4r) - (3+4r) + 2(4+r)}{3} \right| = |2r - 1| = 2$$

Fall 1: $2r - 1 > 0 \Rightarrow 2r - 1 = 2$, d.h. $r = \frac{3}{2} \Rightarrow P_1(5 \,|\, 8 \,|\, \frac{11}{2})$

Fall 2: $2r - 1 < 0 \Rightarrow -2r + 1 = 2$, also $r = -\frac{1}{2} \Rightarrow P_2(-3 \,|\, 0 \,|\, \frac{7}{2})$

Bewertungsvorschlag:

a)	Zeichnung der Pyramide ABCS und der Gerade g	2 BE
	Flächeninhalt des Dreiecks ABC	2 BE
	Ebenengleichungen für E_1	2 BE
	Abstand des Punktes S von E_1	3 BE
b)	Berechnung der Mittelpunkte; Zeichnung der Schnittfläche	3 BE
	Nachweis, daß $E_1 \parallel E_2$	2 BE
	Volumenberechnung:	
	• Berechnung der Deckfläche A	2 BE
	• Höhe des Pyramidenstumpfes	2 BE
	• Ergebnis	1 BE
c)	Gleichung für Gerade (CS)	1 BE
	Nachweis, daß g und (CS) windschief sind	3 BE
	Abstand d(g, (CS))	4 BE
	Bestimmung der Punkte P_1, P_2 auf g	3 BE
		30 BE