Abiturprüfung Leistungskurs 1997/98

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern
Sachsen
Sachsen-Anhalt
Thüringen
Berlin
Brandenburg

PAETEC

paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH Berlin

Autoren für die einzelnen Bundesländer bzw. die ausgewählten Schulen:

Margit Liskow (Mecklenburg-Vorpommern)
Dr. Rainer Heinrich (Sachsen)
Birgit Maier (Sachsen-Anhalt)
Dr. Eva-Maria Westerhoff (Thüringen)
Michael Löber (C.-F.-v.-Siemens OG Berlin)
Stephan Lange (Pascal-Oberschule Berlin)
Andrea Stolpe (Gymnasium Müncheberg)

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier.

1. Auflage

1 5 4 3 2 1 | 2002 2001 2000 1999 98

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes.

Redaktion: Prof. Dr. habil. Karlheinz Weber
Layout: Matthias Nerling, Heiko Schlichting
Umschlaggestaltung: Britta Scharffenberg
Druck: OSTHAVELLAND-DRUCK GmbH VELTEN

ISBN 3-89517-270-7

Inhalt

Vorwort

Das vorliegende Heft enthält die Aufgaben, die in den zentralen Abiturprüfungen des Schuljahrs 1997/98 für Mathematik-Leistungskurse in den Bundesländern Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen gestellt wurden. Da es in Berlin und Brandenburg kein Zentralabitur für das Fach Mathematik gibt, wurden als Beispiele weiterhin die Abiturprüfungsarbeiten von zwei Berliner und einer Brandenburger Schule in das Heft aufgenommen.

Die Erwartungsbilder skizzieren in der Regel einen möglichen Lösungsweg, wobei stets auch wesentliche Zwischenschritte Aufnahme fanden, um den Nachvollzug des Gedankengangs zu erleichtern und für den Lernenden die Möglichkeiten zur Selbstkontrolle zu erhöhen. Die angegebenen Bewertungsvorschläge haben empfehlenden Charakter. Einigen Arbeiten vorangestellte *Hinweise* informieren über länderspezifische Modalitäten der Prüfungsdurchführung.

Hinsichtlich der Symbolik und Zeichensetzung wie auch der Beachtung der reformierten Rechtschreibung folgen die Aufgabentexte den Originalfassungen, woraus teilweise Unterschiede zwischen den Vorgehensweisen in den einzelnen Arbeiten resultieren. Aus Platzgründen war es erforderlich, mitunter „fortlaufende“ Gleichungen oder „Schlußketten“ zu verwenden. Das Zeichen „$\Rightarrow$“ wird dabei als Abkürzung für „daraus folgt“, „daraus ergibt sich“ u. ä. genutzt, also nicht allein zur Kennzeichnung einer Implikation im strengen Sinne.

Der PAETEC Schulbuchverlag hofft, mit dieser Aufgabensammlung den Lehrkräften Anregungen für die Gestaltung eigener Klausur- und Prüfungsarbeiten sowie den Schülerinnen und Schülern Hilfe bei der Vorbereitung auf das Abitur zu geben. Darüber hinaus erlaubt die geschlossene Veröffentlichung der Prüfungsaufgaben aus einem Schuljahr gewiß interessante Vergleiche bezüglich Schwerpunktsetzung, Anforderungsniveau, Aufgabengestaltung usw. in den verschiedenen Bundesländern, woraus wiederum Ansätze für eigenes Nachdenken erwachsen können.

Die Redaktion

Berlin, Juli 1998

Abiturprüfung
Leistungskurs

1997 / 98

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern

Hinweis:
Die Schüler erhielten zwei Arbeiten, bestehend aus dem übereinstimmenden Pflichtteil P und den Wahlteilen A und B, von denen einer auszuwählen war.
Der Pflichtteil war vollständig, von den Wahlaufgaben waren zwei aus dem Teil A oder zwei aus dem Teil B zu bearbeiten

Aufgabe P1: Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade g und die Gerade h durch folgende Gleichungen gegeben:

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g und h und deren Schnittwinkel, und stellen Sie g und h in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

b) Die Geraden g und h liegen in einer Ebene ε.
Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Ebene ε die x-y-Ebene schneidet.

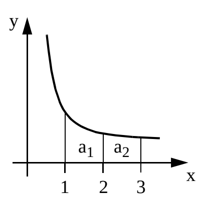
c) Ermitteln Sie die Koordinaten der Durchstoßpunkte der Geraden g und h mit den Koordinatenebenen.

d) Die Durchstoßpunkte der Geraden g und h mit den Koordinatenebenen sind Eckpunkte eines Würfels.
Geben Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte des Würfels an.

Aufgabe P2: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.



Zwischen dem Graphen G von f im kartesischen Koordinatensystem und der x-Achse werden Flächenstreifen der Breite 1 gebildet (siehe Skizze). Die Maßzahlen a_1, a_2, … der Inhalte dieser Flächenstreifen bilden eine Folge (a_n).

a) Geben Sie eine Gleichung zur Berechnung von a_n an.
Für welche n ist $a_n < 0{,}013$?

b) Geben Sie für die Partialsummenfolge (s_n) der Folge (a_n) ein Bildungsgesetz an.
Von welchem n ist s_n größer als 0,955?

c) Durch die Punkte $S_1(x_1 \mid 4)$ und $S_2(x_2 \mid \frac{1}{25})$ von G verläuft eine Gerade g.
Berechnen Sie den Inhalt der von G und g eingeschlossenen Fläche.
Berechnen Sie einen Winkel, unter denen sich der Graph G und die Gerade g schneiden.

Aufgabe P3: Stochastik

In einer Kleinstadt wurden die Bürger (über 16 Jahre) befragt, ob sie für eine autofreie Innenstadt sind. Die Zustimmung in einzelnen Bevölkerungsgruppen war hierbei sehr unterschiedlich ausgeprägt (vgl. nachstehende Tabelle).

	Männer 16 bis 35 Jahre	Frauen 16 bis 35 Jahre	Männer 36 bis 55 Jahre	Frauen 36 bis 55 Jahre	Männer über 55 Jahre	Frauen über 55 Jahre
Zustimmung	14%	22%	24%	30%	37%	47%
Anteil an der Bevölkerung (über 16 Jahre)	16%	15%	15%	16%	18%	20%

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist
   - eine zufällig ausgewählte Person
   - eine zufällig ausgewählte Frau

   für eine autofreie Innenstadt?

b) Durch die Lokalzeitung werden 10 zufällig ausgewählte Bürger dieser Stadt interviewt. Die Anzahl der Zustimmenden unter den befragten Personen kann als binomialverteilt angesehen werden.
   Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß hiervon weniger als 3 bzw. mehr als 3 Personen für die autofreie Innenstadt sind?

c) Die Verwaltung der Stadt stellt aufgrund der mangelnden Zustimmung für die autofreie Innenstadt ein neues Verkehrskonzept vor und behauptet, daß mindesten 60% der Bürger für dieses Konzept sind.
   Eine Bürgerinitiative behauptet, daß der tatsächliche Prozentsatz niedriger ist. Bei einer Umfrage unter 100 Bürgern sind nur 55 für dieses Verkehrskonzept. Kann man aufgrund dieses Ergebnisses mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% behaupten, daß weniger als 60% der Bürger für dieses Konzept sind?

Binomialverteilung (Summenfunktion) für n = 100 und p = 0,6

k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$
31	0,0000	47	0,0058	63	0,7614
32	0,0000	48	0,0100	64	0,8205
33	0,0000	49	0,0168	65	0,8697
34	0,0000	50	0,0271	66	0,9087
35	0,0000	51	0,0423	67	0,9385
36	0,0000	52	0,0638	68	0,9602
37	0,0000	53	0,0930	69	0,9752
38	0,0000	54	0,1311	70	0,9852
39	0,0000	55	0,1789	71	0,9916
40	0,0000	56	0,2365	72	0,9954
41	0,0001	57	0,3033	73	0,9976
42	0,0002	58	0,3775	74	0,9988
43	0,0004	59	0,4567	75	0,9994
44	0,0009	60	0,5379	76	0,9997
45	0,0017	61	0,6178	77	0,9999
46	0,0032	62	0,6932	78	1,0000

Aufgabe A4: Analysis

Gegeben ist eine Funktionenschar f_a durch die Gleichung

$$y = f_a(x) = \frac{x^2}{x - a^2}, \; x \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}, \; a > 0.$$

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a.

a) Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_a an.

b) Die lokalen Extrempunkte von G_a liegen auf dem Graphen einer Funktion g. Geben Sie eine Gleichung für g an.
Bestimmen Sie diejenige Funktion f_a, bei der die Entfernung zwischen den beiden Extrempunkten $2\sqrt{5}$ Längeneinheiten beträgt.

c) Skizzieren Sie den Graphen G_1 und seine Asymptoten.

Der Graph kann für betragsmäßig große x-Werte durch eine seiner Asymptoten ersetzt werden.
Für welche Werte von x ($x > 1$) ist dabei der Betrag der Differenz der zugehörigen y-Werte kleiner als 0,01?

d) Die Punkte $O(0 \mid 0)$, $P(u \mid 0)$, $Q(u \mid f_1(u))$ und $R(0 \mid f_1(u))$ mit $u \in \mathbb{R}$, $u > 1$, sind Eckpunkte eines Rechtecks.
Bestimmen Sie u so, daß der Flächeninhalt dieses Rechtecks ein Minimum wird.

e) Der Graph G_1, die Geraden $x = 2$ und $x = 4$ sowie die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein.
Die Gerade mit der Gleichung $y = x + 1$ teilt diese Fläche in zwei Teilflächen mit den Inhalten I_1 und I_2.
Ermitteln Sie das Verhältnis $I_1 : I_2$.

Aufgabe A5: Analysis

Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung

$$y = f_a(x) = (ax + a)\,e^{-\frac{x}{a}}, \; x \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}, \; a > 0.$$

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a.

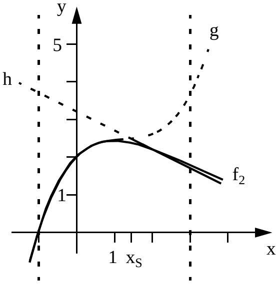
a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen und die Extrempunkte.

b) Die x-Achse, die Gerade $x = t$, $t > -1$, und der Graph G_a schließen eine Fläche $A_a(t)$ ein.
Berechnen Sie die Fläche $A_a(t)$.
Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} A_a(t)$.

c) Die Funktion $f_2(x)$ wird im Intervall $-2 \le x \le 4$ betrachtet und hier durch die Funktion m mit $m(x) = \begin{cases} g(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}75x^2 + x + 2, & x \le x_S \\ f(x) = -0{,}5x + 3{,}2 & x \ge x_S \end{cases}$ angenähert.
Dabei ist x_S die Schnittstelle der Graphen von g und h.

c_1) Berechnen Sie x_S näherungsweise auf eine Stelle hinter dem Komma genau.

c_2) Der Graph G_2, die x-Achse und die Gerade $x = 3$ begrenzen eine Fläche vollständig. Ihr Inhalt ist $A_1 = 7{,}83$ Flächeneinheiten. Die Graphen von g und h, die x-Achse und die Geraden $x = -1$ und $x = 3$ schließen eine Fläche mit dem Inhalt A_2 vollständig ein (siehe Skizze).
Berechnen Sie A_2.
Um wieviel Prozent weichen A_1 und A_2 voneinander ab?



Aufgabe A6: Geometrie

Gegeben sind die Eckpunkte einer Pyramide durch $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(8\,|\,4\,|\,2)$, $C(4\,|\,8\,|\,2)$ und $S(0\,|\,0\,|\,\frac{38}{3})$.

a) Stellen Sie die Pyramide ABCS in einem Koordinatensystem dar.

b) Geben Sie für die Ebene ε, die durch die Punkte A, B und C verläuft, eine Gleichung an.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes S von der Ebene ε.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCS.

c) Berechnen Sie den Höhenfußpunkt S_F der Höhe $\overline{SS_F}$ der Pyramide.

d) Ermitteln Sie eine Gleichung der Spurgeraden der Ebene BCS in der x-y-Ebene.

e) Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes D auf der Kante $\overline{AS}$ so, daß $\sphericalangle SDC = 90°$.

Aufgabe B4: Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{x+4}$.
Der zugehörige Graph sei G.

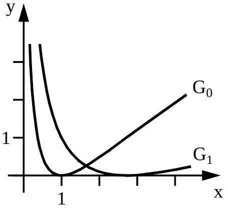
a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an.
Berechnen Sie von G die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die der Extrempunkte.
Skizzieren Sie G mindestens im Intervall $-4 \le x \le 2$.

b) Der Graph G und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein.
Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper K.
Berechnen Sie dessen Volumen.

c) Es stehen gerade Holzkegel mit folgenden Maßen in Längeneinheiten zur Verfügung:
Kegel(1): Radius $r_1 = 3{,}5$; Höhe $h_1 = 4$
Kegel(2): Radius $r_2 = 4$; Höhe $h_2 = 5$
Kegel(3): Radius $r_3 = 4$; Höhe $h_3 = 4$.
Zeigen Sie, daß der Rotationskörper K aus einem der vorgegebenen Kreiskegel durch Abschleifen hergestellt werden kann.
Berechnen Sie den dabei entstehenden Abfall in Prozent.

d) Der Graph von f, die x-Achse ($x \ge 0$) und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ $(u > 0)$ schließen eine Fläche vollständig ein.
Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper R.
Berechnen Sie u näherungsweise (auf eine Stelle hinter dem Komma) so, daß für das Volumen des Körpers R gilt: $V = \frac{32}{3}\pi$ Volumeneinheiten.

Aufgabe B5: Analysis



Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch die Gleichung $y = f_a(x) = (\ln x - a)^2$, $a \in \mathbb{R}$.
Die zugehörige Kurvenschar sei G_a.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, und untersuchen Sie f_a auf Monotonie.
b) Zeigen Sie, daß $P(e^{1+a} \mid 1)$ Wendepunkt von G_a ist.
c) Bestimmen Sie für jedes a die Gleichung der Wendetangente t_w und die Gleichung der Normalen n durch P in Abhängigkeit von a (Hinweis: $n \perp t_w$).
d) Die x-Achse, die Wendetangente und die Normale bilden für jedes a ein Dreieck.
   Für welches a wird der Flächeninhalt dieses Dreiecks minimal?

Aufgabe B6: Geometrie

Gegeben ist ein dreiseitiges Prisma ABCDEF durch die Eckpunkte $A(6 \mid 0 \mid 2)$, $B(6 \mid 4 \mid 0)$, $C(4 \mid 0 \mid 4)$, $D(4 \mid 6 \mid 6)$, $E(4 \mid 10 \mid 4)$, $F(2 \mid 6 \mid 8)$.
Das Prisma wird begrenzt von den Dreiecken ABC und DEF sowie den Vierecken BEFC, ADFC und ABED.

a) Stellen Sie das Prisma in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
b) Zeigen Sie, daß es sich um ein schiefes Prisma handelt.
c) Durch den Punkt $P(1 \mid 1 \mid 9)$ um den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{CF}$ verläuft eine Gerade g.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene ABED.
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
e) Ermitteln Sie den Abstand der zueinander parallelen Ebenen ABC und DEF.
   Berechnen Sie das Volumen des Prismas ABCDEF.

Erwartungsbild zu Aufgabe P1: Geometrie

a) Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g und h:

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 3 - r &= 3 + s\\ r &= 3 + s\\ r &= -s \end{aligned}$$

Lösung: $s = -\frac{3}{2}$, $r = \frac{3}{2}$, also schneiden die Geraden einander.

Bestimmung des Schnittpunktes S:

$$g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\1{,}5\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad h\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ S(1,5 | 1,5 | 1,5)

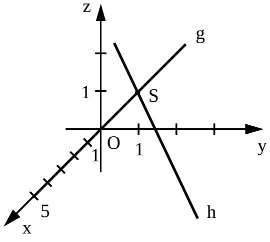
Schnittwinkel:

Richtungsvektor von g: $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$; Richtungsvektor von h: $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\cos\sphericalangle(g\,|\,h) = |\cos\sphericalangle(\vec{a}\,|\,\vec{b})| = \left|\frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{-1+1-1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \sphericalangle(g\,|\,h) = 70{,}53°$

Graphische Darstellung:



b) $\varepsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $(p, q \in \mathbb{R})$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ als Richtungsvektoren; x-y-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$

Normale zu ε: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 1 \\ \vec{j} & 1 & 1 \\ \vec{k} & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= \vec{i}(-1-1) - \vec{j}(1-1) + \vec{k}(-1-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

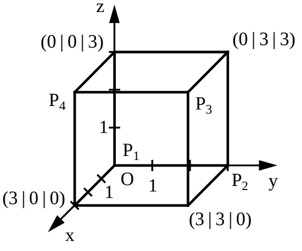
Normale zur x-y-Ebene liegt in der z-Achse: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos \sphericalangle(\text{x-y-Ebene} \mid \varepsilon) = |\cos \sphericalangle(\vec{n}_1 \mid \vec{n}_2)| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \sphericalangle(\text{x-y-Ebene} \mid \varepsilon) = 45°$

c) x-y-Ebene $\cap$ g: $x = 3 - r;\ y = r;\ 0 = r \Rightarrow G_{xy}(3 \mid 0 \mid 0)$
x-z-Ebene $\cap$ g: $x = 3 - r;\ 0 = r;\ z = r \Rightarrow G_{xz}(3 \mid 0 \mid 0)$
y-z-Ebene $\cap$ g: $0 = 3 - r;\ y = r;\ z = r \Rightarrow G_{yz}(0 \mid 3 \mid 3)$
x-y-Ebene $\cap$ h: $x = 3 + s;\ y = 3 + s;\ 0 = -s \Rightarrow H_{xy}(3 \mid 3 \mid 0)$
x-z-Ebene $\cap$ h: $x = 3 + s;\ 0 = 3 + s;\ z = -s \Rightarrow H_{xz}(0 \mid 0 \mid 3)$
y-z-Ebene $\cap$ h: $0 = 3 + s;\ y = 3 + s;\ z = -s \Rightarrow H_{yz}(0 \mid 0 \mid 3)$

d)



Fehlende Eckpunkte:
$P_1(0 \mid 0 \mid 0)$
$P_2(0 \mid 3 \mid 0)$
$P_3(3 \mid 3 \mid 3)$
$P_4(3 \mid 0 \mid 3)$

Bewertungsvorschlag:

a)	Koordinaten des Schnittpunktes; Schnittwinkel; Zeichnung	6 BE
b)	Winkel, unter dem ε die x-y-Ebene schneidet	4 BE
c)	Koordinaten der Durchstoßpunkte	3 BE
d)	Koordinaten der fehlenden Eckpunkte des Würfels	2 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P2: Analysis

a) Gleichung zur Berechnung von a_n:

Aus $f(x) = \frac{1}{x^2}$ folgt die Stammfunktion $F(x) = -\frac{1}{x} + c$.

$a_1 = [-\frac{1}{x}]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ $\qquad a_2 = [-\frac{1}{x}]_2^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$a_3 = [-\frac{1}{x}]_3^4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ $\qquad a_4 = [-\frac{1}{x}]_4^5 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

usw.

$a_n = [-\frac{1}{x}]_n^{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$; $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Berechnung von n, so daß $a_n < 0{,}013$:

$a_n < 0{,}013$, also $\frac{1}{n(n+1)} < 0{,}013$ und damit $n(n+1) > \frac{1}{0{,}013}$.

$\Rightarrow\ n^2 + n - 76{,}92 > 0$;

$m^2 + m - 76{,}92 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1\,000}{13}} = -0{,}5 \pm 8{,}78$;

$m_1 = 8{,}28$; $m_2 = -9{,}38$

$(n - 8{,}28)(n + 9{,}38) > 0 \Rightarrow n > 8{,}28$ und $n > -9{,}38$, also $n > 8{,}28$ oder
$n < 8{,}28$ und $n < -9{,}38$, also $n < -9{,}38$ (entfällt)

Für $n \geq 9$ ist $a_n < 0{,}013$.

b) Bildungsgesetz für s_n:

$s_1 = a_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ $\qquad s_4 = s_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$

usw.

Explizite Zuordnungsvorschrift: $s_n = \frac{n}{n+1}$

Berechnung von n mit $s_n > 0{,}955$:

$\frac{n}{n+1} > 0{,}955$, also $n > 0{,}955n + 0{,}955$ und somit $0{,}045n > 0{,}955 \Rightarrow n > 21{,}\overline{2}$;

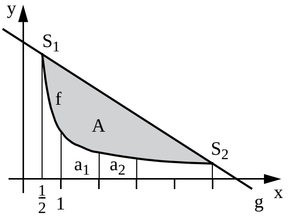
Für $n \geq 22$ ist also $s_n > 0{,}995$.

c) Flächeninhalt von A (siehe Skizze):

$S_1(\frac{1}{2} \mid 4)$, $S_2(5 \mid \frac{1}{25})$

$A_{Trapez} = \frac{1}{2}(4 + \frac{1}{25}) \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{101}{25} = 9{,}09$ (FE)

$A_f = \int_{0,5}^{5} \frac{1}{x^2}\,dx = [-\frac{1}{x}]_{0,5}^{5} = -\frac{1}{5} + 2 = 1{,}8$ (FE)



$A = A_{Trapez} - A_f = 7{,}29$ (FE)

Weiterer Lösungsweg:

$S_1(\frac{1}{2} \mid 4)$, $S_2(5 \mid \frac{1}{25})$

Geradengleichung für g:

Allgemein: $y = mx + n$

S_1 einsetzen ergibt: $4 = m \cdot \frac{1}{2} + n$, also $n = 4 - \frac{1}{2}m$ und

S_2 einsetzen führt auf: $\frac{1}{25} = m \cdot 5 + n$, also $n = \frac{1}{25} - 5m$. Gleichsetzen:

$4 - \frac{1}{2}m = \frac{1}{25} - 5m$, woraus $\frac{9}{2}m = -\frac{99}{25}$ und damit $m = -\frac{22}{25}$ folgt.

$n = 4 - \frac{1}{2} \cdot (-\frac{22}{25}) = \frac{111}{25} \Rightarrow g\colon y = -\frac{22}{25}x + \frac{111}{25}$ bzw. $y = -0{,}88x + 4{,}44$

(Auch ein Ansatz über die Zweipunktegleichung der Geraden ist möglich.)

Flächenberechnung:

$$A = \int_{0,5}^{5} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{0,5}^{5} (-0{,}88x + 4{,}44 - \frac{1}{x^2})\,dx$$

$$= \left[-0{,}44x^2 + 4{,}44x + \frac{1}{x}\right]_{0,5}^{5} = -11 + 22{,}2 + \frac{1}{5} - (-0{,}11 + 2{,}22 + 2) = 7{,}29 \text{ (FE)}$$

Winkelberechnung:

Anstieg der Geraden g: $m = -0{,}88$ (siehe alternativen Lösungsweg bei der Flächenberechnung bzw. Ansatz mit $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$)

Anstieg der Kurve in S_1: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$; $f'(\frac{1}{2}) = -16$, also $\overline{m} = -16$

$$\tan \sphericalangle(G \mid g) = \frac{\overline{m} - m}{1 + \overline{m} \cdot m} = \frac{-0{,}88 + 16}{1 + 14{,}08} \approx 1{,}003$$

Schnittwinkel zwischen G und g in S_1: $\sphericalangle(G \mid g) = 45{,}1°$

Anstieg der Kurve in S_2: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$; $f'(5) = -\frac{2}{125} \approx -0{,}016$, also $\overline{m} = -0{,}016$

$$\tan \sphericalangle(G \mid g) = \frac{\overline{m} - m}{1 + \overline{m} \cdot m} = \frac{-0{,}016 + 0{,}88}{1 + 0{,}0148} \approx 0{,}8514$$

Schnittwinkel zwischen G und g in S_2: $\sphericalangle(G \mid g) = 40{,}4°$

Bewertungsvorschlag:

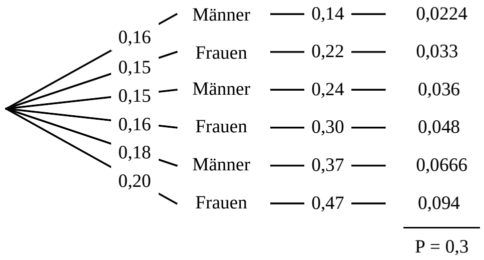
a)	Gleichung für (a_n); Ermittlung von n, so daß $a_n < 0{,}013$	6 BE
b)	Bildungsgesetz für s_n; Berechnung von n, so daß $s_n > 0{,}955$	4 BE
c)	Flächenberechnung, Berechnung eines Schnittwinkels	8 BE
		18 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P3: Stochastik

a) Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig ausgesuchte Person die autofreie Innenstadt befürwortet:

$P = 0{,}14 \cdot 0{,}16 + 0{,}22 \cdot 0{,}15 + 0{,}24 \cdot 0{,}15 + 0{,}3 \cdot 0{,}16 + \cdot\, 0{,}37 \cdot 0{,}18 + 0{,}47 \cdot 0{,}2$
$= 0{,}3$

Veranschaulichung des Lösungswegs durch ein Baumdiagramm:



Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig ausgesuchte Frau die autofreie Innenstadt befürwortet:

$P = \frac{0{,}033 + 0{,}048 + 0{,}094}{0{,}15 + 0{,}16 + 0{,}2} \approx 0{,}343137 \approx 0{,}343$ oder

$P = \frac{15}{51} \cdot 0{,}22 + \frac{16}{51} \cdot 0{,}3 + \frac{20}{51} \cdot 0{,}47 \approx 0{,}34311 \approx 0{,}343$

b) X: „Anzahl der Personen unter 10 ausgewählten, die für autofreie Innenstadt sind“

X ist $B(10\,|\,0{,}3)$-verteilt

$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= \binom{10}{0} 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{10} + \binom{10}{1} 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^9 + \binom{10}{2} 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8$

$\approx 0{,}02825 + 0{,}12106 + 0{,}23347 = 0{,}38278 \approx 0{,}3828$

$P(X > 3) = 1 - [P(X < 3) + P(X = 3)]$

$\approx 1 - 0{,}3828 - \binom{10}{3} 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^7 \approx 1 - 0{,}3828 - 0{,}2668 = 0{,}3504$

c) Zufallsgröße: X_i – „Aussage des i-ten Bürgers“, wobei
$X_i = 1$: „für Verkehrskonzept“;
$X_i = 0$: „gegen Verkehrskonzept“

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = k$$

Verteilung: X ist $B(100\,|\,p)$-verteilt

Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$

Hypothesen: H_0: $p_0 \geq 0{,}6$; H_1: $p_1 < 0{,}6$

Annahmebereich: $A = \{k + 1, \ldots, n\}$
Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0, \ldots, k\}$
$P_{p_0}(X \in \overline{A}) = P_{0,6}(X \leq k) \leq 0{,}05$
Aus der Tabelle ist ersichtlich: $k = 51$, d.h., $A = \{52, \ldots, 100\}$; $\overline{A} = \{1, \ldots, 51\}$
Man kann mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 nur behaupten, daß weniger als 60% der Bürger für das neue Verkehrskonzept sind, falls sich bei der Umfrage weniger als 52 Menschen für das neue Verkehrskonzept entscheiden. Das Umfrageergebnis läßt daher nicht die Behauptung zu, daß weniger als 60% der Bürger für das neue Verkehrskonzept sind.

Bewertungsvorschlag:

a)	Berechnung der Wahrscheinlichkeiten	2 BE
b)	Berechnung der Wahrscheinlichkeit	3 BE
c)	Prüfen der Behauptung	3 BE
		8 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4: Analysis

a) Asymptoten von G_a:
x_P ist Polstelle von $f_a(x) \Leftrightarrow$ I) $x_P - a^2 = 0$ und II) $x_P^2 \neq 0$
zu I) $x_P - a^2 = 0$, also $x_P = a^2$
zu II) $a^2 \neq 0$, da $a > 0$ nach Voraussetzung
Also sind $x = a^2$ Asymptotengleichungen von f_a.
Polynomdivision ergibt weiterhin:

$$x^2 : (x - a^2) = x + a^2 + \frac{a^4}{x - a^2}$$

$\Rightarrow y = x + a^2$ sind Asymptotengleichungen von f_a.

b) Gleichung für g:
Lokale Extrempunkte von G_a:

$$f_a'(x) = \frac{2x\,(x - a^2) - x^2 \cdot 1}{(x - a^2)^2} = \frac{x^2 - 2a^2x}{(x - a^2)^2}$$

$$f_a''(x) = \frac{(2x - 2a^2)\,(x - a^2) - (x^2 - 2a^2x)\cdot 2\,(x - a^2)}{(x - a^2)^4}$$

$$= \frac{2x^2 - 2a^2x - 2a^2x + 2a^4 - 2x^2 + 4a^2x}{(x - a^2)^3} = \frac{2a^4}{(x - a^2)^3}$$

$f_a'(x_E) = 0 \Leftrightarrow$ I) $x_E^2 - 2a^2x_E = 0$ und II) $(x_E - a^2)^2 \neq 0$

zu I) $x_E^2 - 2a^2x_E = x_E(x_E - 2a^2) = 0 \Rightarrow x_{E_1} = 0$; $x_{E_2} = 2a^2$

zu II) $(x_{E_1} - a^2)^2 = (0 - a^2)^2 \neq 0$; $(x_{E_2} - a^2)^2 = (2a^2 - a^2)^2 \neq 0$

$f_a''(x_{E_1}) = \frac{2a^4}{-a^6} = -\frac{2}{a^2} < 0$; $f_a(x_{E_1}) = 0 \;\Rightarrow\; P_{Max}(0 \mid 0)$

$f_a''(x_{E_2}) = \frac{2a^4}{(2a^2 - a^2)^3} = \frac{2}{a^2} > 0$; $f_a(x_{E_2}) = 4a^2 \;\Rightarrow\; P_{Min}(2a^2 \mid 4a^2)$

Gleichung für g: $g(2a^2) = 4a^2$ bzw. $g(0) = 0 \;\Rightarrow\; g(x) = 2x$

Bestimmung derjenigen Funktionen f_a, für die gilt: $\left|\overline{P_{Max}P_{Min}}\right| = 2\sqrt{5}$ (LE)

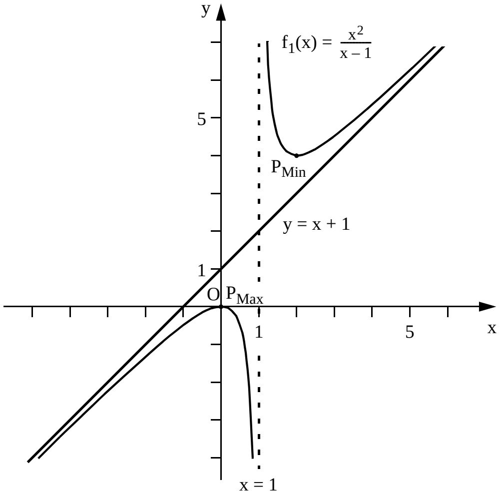
Es ist $\left|\overline{P_{Max}P_{Min}}\right| = \sqrt{(2a^2)^2 + (4a^2)^2}$. Gleichsetzen ergibt

$\sqrt{(2a^2)^2 + (4a^2)^2} = 2\sqrt{5}$, also $20a^4 = 20$, und somit $a^4 = 1$

$\Rightarrow a = 1$ (andere Lösungen entfallen wegen $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ nach Voraussetzung)

Die gesuchte Funktion ist $f_1(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

c) Graph G_1 der Funktion f_1:



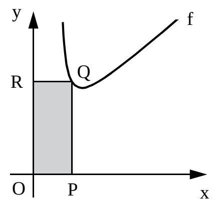
Bestimmung der Werte für x ($x > 1$), für die gilt: $f_1(x) - (x + 1) < 0{,}01$:

$f_1(x) - (x + 1) = \frac{x^2}{x-1} - (x + 1) = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{1}{x-1}$

$f_1(x) - (x + 1) < 0{,}01 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x-1} < \frac{1}{100}$, also $x - 1 > 100$ und damit $x > 101$

Somit gilt die Behauptung für alle $x > 101$

d) Bestimmung von u ($u \in \mathbb{R}$, $u > 1$):



$A_{Rechteck} = u \cdot f_1(u)$ mit $f_1(u) = \frac{u^2}{u-1}$

Zielfunktion: $A(u) = u \cdot \frac{u^2}{u-1} = \frac{u^3}{u-1}$

$$A'(u) = \frac{3u^2(u-1) - u^3 \cdot 1}{(u-1)^2} = \frac{2u^3 - 3u^2}{(u-1)^2}$$

$$A''(u) = \frac{(6u^2 - 6u)(u-1)^2 - (2u^3 - 3u^2) \cdot 2(u-1)}{(u-1)^4}$$

$$= \frac{6u^3 - 6u^2 - 6u^2 + 6u - 4u^3 + 6u^2}{(u-1)^3} = \frac{2u^3 - 6u^2 + 6u}{(u-1)^3}$$

$A'(u) = 0 \;\Leftrightarrow\;$ I) $2u^3 - 3u^2 = 0$ und II) $(u-1)^2 \neq 0$

zu I) $2u^3 - 3u^2 = u^2(2u - 3) = 0$

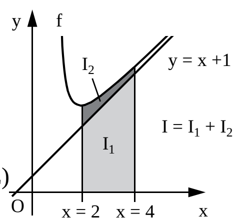
$\Rightarrow 2u - 3 = 0$ ($u = 0$ entfällt, da $u > 1$) $\Rightarrow u = \frac{3}{2}$

zu II) $(u-1)^2 = (\frac{3}{2} - 1)^2 = \frac{1}{4} \neq 0$

$$A''(\tfrac{3}{2}) = \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^3} = \frac{\frac{27}{4} - \frac{27}{2} + 9}{\frac{1}{8}} = 2(27 - 54 + 36) = 18 > 0$$

Für $u = \frac{3}{2}$ ist der Flächeninhalt des Rechtecks mit $A = 6{,}75$ (FE) minimal.

e) $$I = \int_2^4 \frac{x^2}{x-1}\,dx = \int_2^4 \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1}\,dx = \int_2^4 \left(\frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right) dx$$



$$= \int_2^4 \left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1|\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 16 + 4 + \ln 3 - \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 + \ln 1\right) = (8 + \ln 3)\text{ (FE)}$$

$I_1 = 2 \cdot \frac{3+5}{2} = 8$ (FE); $I_2 = I - I_1 = \ln 3$ (FE)

$\Rightarrow I_1 : I_2 = 8 : \ln 3 \approx 7{,}28 : 1$

Bewertungsvorschlag:

a)	Gleichungen der Asymptoten	2 BE
b)	Gleichung für g; Bestimmung von f_a	6 BE
c)	Graph; Ermittlung der x-Werte	3 BE
d)	Bestimmung von u	4 BE
e)	Verhältnis $I_1 : I_2$	4 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A5: Analysis

a) Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen:
Schnittpunkt mit der x-Achse:

$(ax + a)e^{-\frac{x}{a}} = 0 \iff (ax + a) = 0$ (da $e^x \neq 0$ für alle x) $\Rightarrow x = -1$
$\Rightarrow P_x(-1 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse:

$(a \cdot 0 + a)e^{-\frac{0}{a}} = a \Rightarrow P_y(0 \mid a)$

Extrempunkte:

$$f_a'(x) = a \cdot e^{-\frac{x}{a}} + (ax + a)e^{-\frac{x}{a}} \cdot (-\frac{1}{a}) = (a - x - 1)e^{-\frac{x}{a}}$$

$$f_a''(x) = -\frac{1}{a}(a - x - 1)e^{-\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \cdot (-1) = (-1 + \frac{x}{a} + \frac{1}{a} - 1)e^{-\frac{x}{a}}$$

$$= (\frac{x}{a} + \frac{1}{a} - 2)e^{-\frac{x}{a}}$$

$f_a'(x) = 0 \iff (a - x - 1) = 0$ (da $e^x \neq 0$ für alle x) $\Rightarrow x = a - 1$

$$f_a''(a - 1) = (\frac{a-1}{a} + \frac{1}{a} - 2)e^{-\frac{a-1}{a}} = -e^{\frac{1-a}{a}} < 0$$

$$f_a(a - 1) = [a(a - 1) + a]e^{\frac{1-a}{a}} = a^2 \cdot e^{\frac{1-a}{a}}$$

$$\Rightarrow P_{Max}(a - 1 \mid a^2 \cdot e^{\frac{1-a}{a}})$$

b) Flächeninhalt $A_a(t)$:

$$A_a(t) = \int_{-1}^{t} (ax + a)e^{-\frac{x}{a}}\, dx$$

Partielle Integration:

$u(x) = ax + a$; $u'(x) = a$; $v'(x) = e^{-\frac{x}{a}}$; $v(x) = \int e^{-\frac{x}{a}}\, dx = -a \cdot e^{-\frac{x}{a}}$

$$A_a(t) = [(ax + a)(-a)e^{-\frac{x}{a}}]_{-1}^{t} - \int_{-1}^{t} a(-a)e^{-\frac{x}{a}}\, dx$$

$$= -e^{-\frac{t}{a}}(a^2t + a^2) - [a \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot e^{-\frac{x}{a}}]_{-1}^{t}$$

$$= -e^{-\frac{t}{a}}(a^2t + a^2) - (a^3 e^{-\frac{t}{a}} - a^3 e^{\frac{1}{a}}) = -e^{-\frac{t}{a}}(a^2t + a^2 + a^3) + e^{\frac{1}{a}} a^3$$

Grenzwert:

$$\lim_{t \to \infty} A_a(t) = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{a^2t + a^2 + a^3}{e^{\frac{t}{a}}} + e^{\frac{1}{a}} a^3\right) = e^{\frac{1}{a}} a^3$$

c_1) Berechnung von x_S:

Aus g(x) = h(x) folgt

$s(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}75x^2 + 1{,}5x - 1{,}2$; $s'(x) = 0{,}6x^2 - 1{,}5x + 1{,}5$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{0{,}2x_n^3 - 0{,}75x_n^2 + 1{,}5x_n - 1{,}2}{0{,}6x_n^2 - 1{,}5x_n + 1{,}5}$$

$$= \frac{0{,}6x_n^3 - 1{,}5x_n^2 + 1{,}5x_n - 0{,}2x_n^3 + 0{,}75x_n^2 - 1{,}5x_n + 1{,}2}{0{,}6x_n^2 - 1{,}5x_n + 1{,}5} = \frac{0{,}4x_n^3 - 0{,}75x_n^2 + 1{,}2}{0{,}6x_n^3 - 1{,}5x_n + 1{,}5}$$

Mit $x_0 = 1{,}5$ ergibt sich $x_1 = 1{,}4375$; $x_2 = 1{,}4365 \Rightarrow x_S \approx 1{,}4$

Kontrolle: g(1,4) = 2,4788; h(1,4) = 2,5; g(1,4) ≈ h(1,4)

c_2) Flächeninhalt:

$$A_1 = \int_{-1}^{3} f_2(x)dx = 7{,}83 \text{ (FE)}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1{,}4} g(x)\,dx + \int_{1{,}4}^{3} h(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1{,}4} (0{,}2x^3 - 0{,}75x^2 + x + 2)\,dx + \int_{1{,}4}^{3} (-0{,}5x + 3{,}2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{20}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{1{,}4} + \left[-\frac{1}{4}x^2 + 3{,}2x\right]_{1{,}4}^{3}$$

$$= 3{,}286 + 1{,}2 + 7{,}35 - 3{,}99 = 7{,}846 \text{ (FE)}$$

Abweichung in Prozent:

$A_1 \triangleq 100\% \Rightarrow A_2 \triangleq 100{,}204\%$

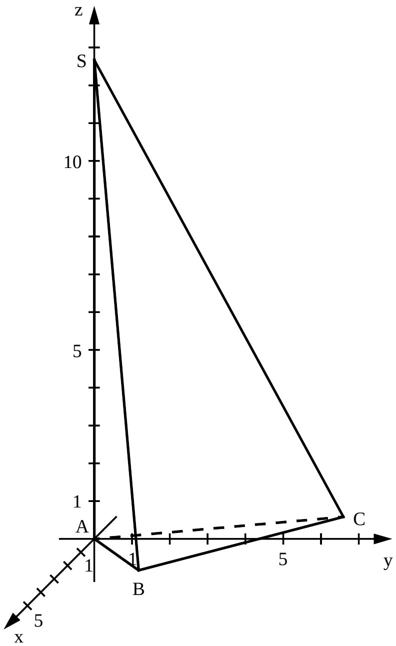
A_1 und A_2 weichen um ca. 0,2% voneinander ab.

Bewertungsvorschlag:

a)	Schnittpunkte; Extrempunkte	6 BE
b)	Fläche $A_a(t)$; Berechnung $\lim\limits_{t \to \infty} A_a(t)$	5 BE
c)	Berechnung von x_S; Berechnung von A_2; Abweichung in Prozent	8 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A6: Geometrie

a)



b) Gleichung für die Ebene ε:

Parametergleichung: $\varepsilon\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}8\\4\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Koordinatengleichung (parameterfreie Gleichung):

$\varepsilon\colon (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) \cdot \vec{n} = 0$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8 & 4 & 2\\ 4 & 8 & 2\end{vmatrix} = (8-16)\vec{i} - (16-8)\vec{j} + (64-16)\vec{k} = \begin{pmatrix}-8\\-8\\48\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} =$

$\begin{pmatrix}-1\\-1\\6\end{pmatrix}$

$\varepsilon\colon \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\6\end{pmatrix} = 0$, woraus $\varepsilon\colon -x - y + 6z = 0$ folgt, also:

ε: x + y – 6z = 0

Abstand des Punktes S von der Ebene ε:

$$d = \frac{\left(\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA}\right) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{38}{3} \end{pmatrix}, \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \ |\vec{n}| = \sqrt{38}$$

$$d = \frac{\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{38}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{38}} = \frac{\frac{38}{3} \cdot 6}{\sqrt{38}} = \frac{76}{\sqrt{38}} = 2\sqrt{38} \text{ (LE)} \approx 12{,}33 \text{ (LE)}$$

Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot d \quad \text{mit} \quad A_G = \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \left|\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 48 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \sqrt{2\,432}, \ d = 2\sqrt{38}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2\,432} \cdot 2\sqrt{38} = \frac{1}{3} \sqrt{92\,416} = \frac{304}{3} \text{ (VE)} \approx 101{,}3 \text{ (VE)}$$

c) $g_{\overline{SS_F}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{38}{3} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$; ε: 0 = –x – y + 6z

$g_{\overline{SS_F}} \cap \varepsilon$: $0 = -(0-t) - (0-t) + 6(\frac{38}{3} + 6t)$, also $0 = t + t + 76 + 36t \Rightarrow t = -2$

$$g_{\overline{SS_F}}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{38}{8} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_F(2 \mid 2 \mid \tfrac{2}{3})$$

Weiterer Lösungsweg:

$$g_{\overline{SS_F}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{38}{3} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}); \quad \varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \ (r, s \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & -t = 8r + 4s \\ \text{(II)} & -t = 4r + 8s \end{array} \Bigg\} \Rightarrow r = s$$
$$\begin{array}{ll} \text{(III)} & \frac{38}{3} + 6t = 2r + 2s \\ \hline \text{(I')} & t = -12r \\ \text{(III')} & \frac{38}{3} - 36r = 4r \\ \hline \end{array}$$

Lösung: $r = \frac{1}{6}$, $s = \frac{1}{6}$, $t = -2$

Koordinaten des Höhenfußpunktes S_F: $S_F(2 \mid 2 \mid \frac{2}{3})$

d) x-y-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

ε_{BCS}: $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{BC} + q\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ \frac{32}{3} \end{pmatrix}$; $p, q \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & x = 8 - 4p - 8q \\ \text{(II)} & y = 4 + 4p - 4q \\ \text{(III)} & 0 = 2 + \frac{32}{3}q \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{3}{16} \\ \hline \text{(I) + (II)} & x + y = 12 - 12 \cdot (-\frac{3}{16}) \end{array}$$

Spurgerade: $y = -x + 14{,}25$

e) $\sphericalangle(\overrightarrow{DS} \mid \overrightarrow{DC}) = 90° \Leftrightarrow \overrightarrow{DS} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ mit $\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{38}{3} - d_z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 - d_z \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{38}{3} - d_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 - d_z \end{pmatrix} = 0$, also $(\frac{38}{3} - d_z)(2 - d_z) = 0$

$\Rightarrow d_z = 2$ ($d_z = \frac{38}{3}$ entfällt, siehe Koordinaten des Punktes S)

Der Punkt $D(0 \mid 0 \mid 2)$ erfüllt die Bedingung $\sphericalangle SDC = 90°$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Zeichnung	2 BE
b)	Gleichung der Ebene ε; Abstand des Punktes S zur Ebene ε; Volumen der Pyramide ABCS	7 BE
c)	Koordinaten des Höhenfußpunktes S_F	3 BE
d)	Gleichung der Spurgeraden	3 BE
e)	Koordinaten des Punktes D mit $\sphericalangle SDC = 90°$	4 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B4: Analysis

a) Definitonsbereich: $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -4$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

– mit der x-Achse: $0 = \frac{1}{2}x\sqrt{x+4} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}x = 0$ oder $\sqrt{x+4} = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -4 \;\Rightarrow\; P_1(0\,|\,0),\ P_2(-4\,|\,0)$

– mit der y-Achse: $y = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sqrt{0+4} \;\Rightarrow\; y = 0,$

$\Rightarrow P_3(0\,|\,0)$ (d.h. $P_1 = P_3$)

Extrempunkte:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} + \frac{x}{4\sqrt{x+4}}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{4+x}\right)^2 + x}{4\sqrt{x+4}} = \frac{3x+8}{4\sqrt{x+4}}$$

$$f''(x) = \frac{3 \cdot 4\sqrt{x+4} - (3x+8) \cdot 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{16\,(x+4)} = \frac{12\,(x+4) - 2\,(3x+8)}{16\,(x+4)\sqrt{x+4}} = \frac{6x+32}{16\sqrt{(x+4)^3}}$$

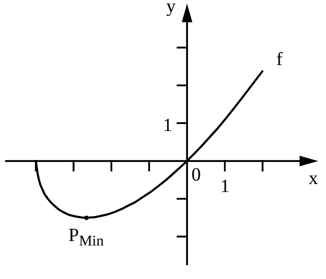
$$f'(x_E) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x_E + 8 = 0 \text{ und } 4\sqrt{x_E+4} \neq 0 \;\Rightarrow\; x_E = -\frac{8}{3}$$

$$f''\!\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{6 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + 32}{16\sqrt{\left(-\frac{8}{3}+4\right)^3}} = \frac{16}{16 \cdot \frac{8}{3\sqrt{3}}} = \frac{3}{8}\sqrt{3} > 0$$

$$f\!\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \sqrt{-\frac{8}{3}+4} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{8}{9}\sqrt{3} \approx -1{,}54$$

$\Rightarrow P_{Min}\left(-\frac{8}{3}\,\middle|\,-\frac{8}{9}\sqrt{3}\right)$ bzw. $P_{Min}(-2{,}\overline{6}\,|\,-1{,}54)$

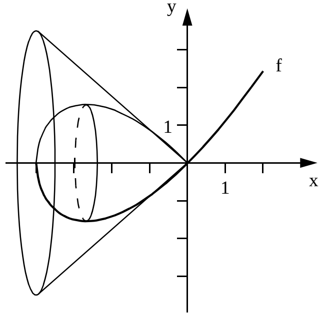
Graph G der Funktion f im Intervall $-4 \le x \le 2$:



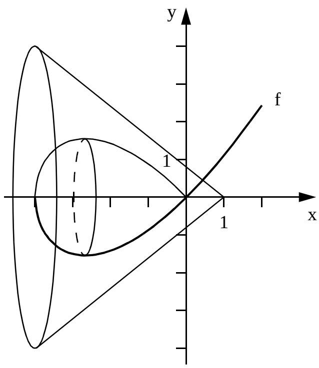
b) $V_K = \pi \int_{-4}^{0} \left(\frac{1}{2}x\sqrt{x+4}\right)^2 dx = \pi \int_{-4}^{0} \left(\frac{1}{4}x^3 + x^2\right) dx$

$$= \pi\left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_{-4}^{0} = \pi\left[0 - \left(16 - \frac{64}{3}\right)\right] = \frac{16}{3}\pi \text{ (VE)} \approx 16{,}76 \text{ (VE)}$$

c) Kegel (1): nicht möglich (s. Skizze; Graphen von f und g schneiden einander)



Kegel (2): möglich (siehe Skizze)



Prozentualer Abfall:

$V_{Kegel(2)} = \frac{\pi}{3} \cdot 4^2 \cdot 5 \text{ (VE)} = \frac{80}{3}\pi \text{ (VE)}$

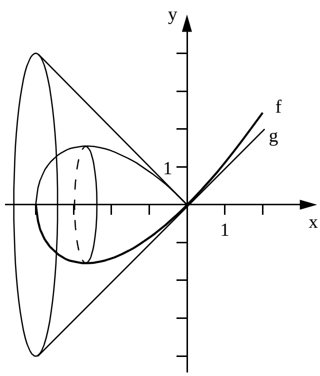
$V_K = \frac{16}{3}\pi \text{ (VE)}$

$V_{Kegel(2)} - V_K = \frac{80}{3}\pi - \frac{16}{3}\pi \text{ (VE)}$

$= \frac{64}{3}\pi \text{ (VE)}$

80% des Kegels (2) ist Abfall.

Kegel (3): möglich (siehe Skizze)



Prozentualer Abfall:
Aus der Skizze gewinnt man die Vermutung, daß die Gerade g die Tangente an G an der Stelle x = 0 ist. Nachweis:
g: $y = x \Rightarrow m = 1$
G: $f'(x) = \frac{3x + 8}{4\sqrt{x + 4}}$; $f'(0) = \frac{8}{4\sqrt{4}} = 1$
Also ist die Vermutung richtig, und es gilt: $K \subset$ Kegel (3)
Berechnung des Abfalls

$V_{Kegel(3)} = \frac{\pi}{3} \cdot 4^2 \cdot 4 \text{ (VE)} = \frac{64}{3}\pi \text{ (VE)}$

$V_K = \frac{16}{3}\pi \text{ (VE)}$

$V_{Kegel(3)} - V_K = \frac{64}{3}\pi - \frac{16}{3}\pi \text{ (VE)} = 16\pi \text{ (VE)}$

75% des Kegels (3) ist Abfall. Die Herstellung aus Kegel (3) ist also günstiger.

d) Aus $\pi \int_0^u [f(x)]^2\,dx = \frac{32}{3}\pi$ folgt $\int_0^u [f(x)]^2\,dx = \frac{32}{3}$

Laut Teilaufgabe b) gilt: $\int_0^u [f(x)]^2\,dx = \left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^u = \frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{3}u^3$, also:

$\frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{3}u^3 = \frac{32}{3} \quad | \cdot 48$

$3u^4 + 16u^3 = 512 \;\Rightarrow\; 3u^4 + 16u^3 - 512 = 0;\;\; (3u^4 + 16u^3 - 512)' = 12u^3 + 48u^2$

$u_{n+1} = u_n - \frac{3u^4 + 16u^3 - 512}{12u^3 + 48u^2}$; Anfangswert: $u_0 = 2$

$\Rightarrow u_1 = 3{,}1\overline{6};\; u_2 = 2{,}8214;\; u_3 = 2{,}7639 \;\Rightarrow\; u \approx 2{,}8$

Für $u \approx 2{,}8$ gilt: $V_R = \frac{32}{3}\pi$ (VE).

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen; Extrempunkte; Zeichnung	6 BE
b)	Volumen des Rotationskörpers K	3 BE
c)	Bestimmung der möglichen Kegel; Berechnung des Abfalls	5 BE
d)	Berechnung von u	5 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B5: Analysis

a) Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R};\; x > 0$

Untersuchung auf Monotonie:

$f_a'(x) = 2(\ln x - a) \cdot \frac{1}{x}$

$f_a'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x - a = 0$ (da $\frac{2}{x} \neq 0$ für alle x), also $\ln x = a$ und somit ist $x = e^a$.

$f_a'(x) < 0$ für $0 < x < e^a \;\Rightarrow\; f_a$ ist monoton fallend.

$f_a'(x) = 0$ für $x = e^a \;\Rightarrow\; f_a$ nimmt lokales Minimum an.

$f_a'(x) > 0$ für $x > e^a \;\Rightarrow\; f_a$ ist monoton wachsend.

b) $f_a''(x) = -\frac{2}{x^2}(\ln x - a) + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2}(\ln x - a - 1) = \frac{-2\ln x + 2a + 2}{x^2}$

$f_a''(e^{1+a}) = \frac{-2(a+1) + 2a + 2}{(e^{1+a})^2} = 0$

$f_a'''(x) = \frac{-2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 - (-2\ln x + 2a + 2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x(1 - 2\ln x + 2a + 2)}{x^4} = \frac{4\ln x - 4a - 6}{x^3}$

$f_a'''(e^{1+a}) = \frac{4(a+1) - 4a - 6}{e^{3+3a}} = -\frac{2}{e^{3+3a}} \neq 0$

$f_a(e^{1+a}) = (\ln e^{1+a} - a)^2 = (1 + a - a)^2 = 1$

$\Rightarrow P(e^{1+a} \mid 1)$ ist Wendepunkt von G_a.

c) Gleichung der Wendetangente t_w:

Aus $f_a'(x) = \frac{2}{x}(\ln x - a)$ mit $P(e^{1+a} \mid 1)$ folgt

$f_a'(e^{1+a}) = \frac{2}{e^{a+1}}(\ln e^{1+a} - a) = \frac{2}{e^{1+a}}(a + 1 - a) = \frac{2}{e^{1+a}}$

$1 = \frac{2}{e^{1+a}} \cdot e^{1+a} + n \;\Rightarrow\; n = -1$

t_w: $y = \frac{2}{e^{1+a}}x - 1$

Gleichung der Normalen n mit $P \in n$:
Allgemein: $y = bx + c$

$n \perp t_w$ und $m = \frac{2}{e^{1+a}}$ ist Anstieg von t_w. Daraus folgt

$b = -\frac{1}{\frac{2}{e^{1+a}}} = -\frac{e^{1+a}}{2}$; $\quad 1 = -\frac{e^{1+a}}{2} \cdot e^{1+a} + c \;\Rightarrow\; c = 1 + \frac{e^{2+2a}}{2} = \frac{2 + e^{2+2a}}{2}$

n: $y = -\frac{e^{1+a}}{2}x + \frac{2 + e^{2+2a}}{2}$

d) $A = \frac{1}{2}m \cdot h$ mit $m = x_2 - x_1$ und $h = 1$

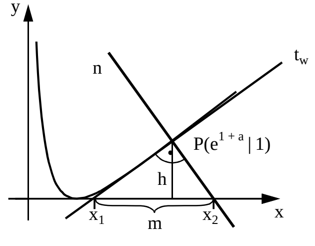
Nullstelle x_1 von t_w:

$0 = \frac{2}{e^{1+a}}x_1 - 1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{e^{1+a}}{2}$

Nullstelle x_2 von n:

$0 = -\frac{e^{1+a}}{2}x_2 + \frac{2 + e^{2+2a}}{2}$

$\Rightarrow x_2 = \frac{2 + e^{2+2a}}{2} \cdot \frac{2}{e^{1+a}} = \frac{2 + e^{2+2a}}{e^{1+a}}$



Berechnung von m:

$m = x_2 - x_1 = \frac{2 + e^{2+2a}}{e^{1+a}} - \frac{e^{1+a}}{2} = \frac{4 + 2e^{2+2a} - e^{2+2a}}{2e^{1+a}} = \frac{4 + e^{2+2a}}{2e^{1+a}}$

Zielfunktion:

$A(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 + e^{2+2a}}{2e^{1+a}} \cdot 1 = \frac{4 + e^{2+2a}}{4e^{1+a}} = \frac{1}{e^{1+a}} + \frac{1}{4} e^{1+a}$

Untersuchung auf lokales Minimum:

$A'(a) = -\frac{1}{e^{1+a}} + \frac{1}{4} e^{1+a}$; $A''(a) = \frac{1}{e^{1+a}} + \frac{1}{4} e^{1+a}$

$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{e^{1+a}} + \frac{1}{4} e^{1+a} = 0 \quad | \cdot e^{1+a}$

$\frac{1}{4} e^{2+2a} = 1$, also $e^{2+2a} = 4$ und somit $(2 + 2a)\ln e = \ln 4$.

$\Rightarrow a = \frac{\ln 4 - 2}{2} = \ln 2 - 1$

$A''(\ln 2 - 1) = \frac{1}{e^{1+\ln 2 - 1}} + \frac{1}{4} e^{1+\ln 2 - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1 > 0$

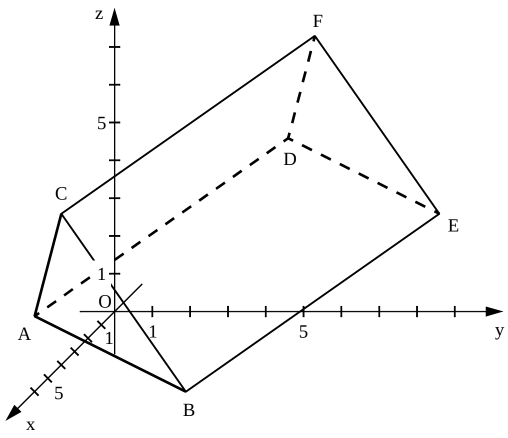
Für $a = \ln 2 - 1 \approx -0{,}31$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks minimal.

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Untersuchung auf Monotonie	3 BE
b)	Nachweis, daß $P(e^{1+a} \mid 1)$ Wendepunkt von G_a ist	4 BE
c)	Gleichung der Wendetangente und der Normalen durch P	5 BE
d)	Berechnung von a	7 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B6: Geometrie

a)



b) Behauptung ist richtig, wenn z.B. gilt: $\overrightarrow{CF} \neq r(\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB})$ mit $r \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - (-8+4)\vec{j} + 8\vec{k} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Es ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \neq r\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ für alle $r \in \mathbb{R}$, also handelt es sich um ein schiefes Prisma.

Weiterer Lösungsweg:
Prisma ABCDEF ist ein schiefes Prisma, wenn die Seitenflächen keine Rechtecke sind, d.h., wenn z. B. gilt: $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB} \neq 0$:

$\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 + 24 - 16 = 4 \neq 0 \Rightarrow \sphericalangle BCF \neq 90°$, also folgt die Beh.

c) Koordinaten des Schnittpunkts:
Ermitteln des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{CF}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow M(3\,|\,3\,|\,6)$$

Gleichung der Geraden g: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

Ebenengleichung:
Parametergleichung:

$$\varepsilon: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix};\ p, q \in \mathbb{R}$$

Koordinatengleichung:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = (16+12)\vec{i} - (-4)\vec{j} + 8\vec{k} = \begin{pmatrix} 28 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ d = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 42 + 4 = 46 \Rightarrow \varepsilon: 7x + y + 2z - 46 = 0$$

Koordinaten des Schnittpunktes:
$7(1 + 2t) + 1 + 2t + 2(9 - 3t) - 46 = 0$, also $10t = 20$ und somit $t = 2$

t in die Geradengleichung von g einsetzen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Schnittpunkt: } S(5\,|\,5\,|\,3)$$

Schnittwinkel $\sphericalangle(\varepsilon\,|\,g)$:

$$\cos\sphericalangle(\varepsilon\,|\,g) = |\cos\sphericalangle(\vec{n}\,|\,\overrightarrow{PM})| = \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{918}} \approx 0{,}330049$$

$\Rightarrow \sphericalangle(\varepsilon\,|\,g) \approx 19{,}27°$

d) $$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 16 + 64} = 6 \text{ (FE)}$$

e) Abstand der Ebenen ε_{ABC} und ε_{DEF}:

$$\varepsilon_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 16$$

$\varepsilon_{ABC}: 2x + y + 2z - 16 = 0$

Abstand des Punktes D von der Ebene ε_{ABC}:

$$d = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 - 16}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3}$$

Der Abstand der beiden Ebenen beträgt $\frac{10}{3}$ (LE).

Volumen des Prismas ABCDEF:

$V = A_G \cdot h = 6 \cdot \frac{10}{3}$ (VE) = 20 (VE)

Bewertungsvorschlag:

a)	Zeichnung	2 BE
b)	Nachweis, daß ABCDEF ein schiefes Prisma	2 BE
c)	Koordinaten des Schnittpunktes; Schnittwinkel	8 BE
d)	Flächeninhalt des Dreiecks ABC	2 BE
e)	Abstand der Ebenen; Volumen des Prismas	5 BE
		19 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1997 / 98

Gymnasium

Sachsen

Aufgaben

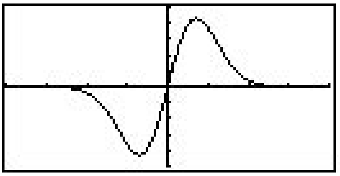
(Ersttermin und Nachtermin)

Aufgabe A1: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$y = f_a(x) = 10x \cdot e^{-ax^2} \quad (x \in D_{f_a}).$$

Die Abbildung zeigt das mit einem grafikfähigen Taschenrechner erzeugte Bild des Graphen der Funktion f_1.



a) Geben Sie für die Funktion f_a den größtmöglichen Definitionsbereich an und führen Sie für die Funktion f_a eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Symmetrie, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema, Koordinaten der Wendepunkte).
Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz von Wendepunkten kann verzichtet werden.

Eine Funktion f_a hat den Wertebereich $-5 \leq y \leq 5$.
Ermitteln Sie für diese Funktion den Wert a.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 13)

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g, auf der die lokalen Extrempunkte der Graphen aller Funktionen f_a liegen.
Weisen Sie nach, dass auf der Geraden g ein Punkt existiert, der nicht Extrempunkt einer Funktion f_a ist.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Der Graph der Funktion f_1, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = t$ ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

d) Durch den Koordinatenursprung O, den Punkt $P(x; 0)$ und den Punkt $Q(x; f_1(x))$ wird für jedes x ($x \in \mathbb{R}$, $x > 0$) ein Dreieck bestimmt.
Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt, den ein solches Dreieck annehmen kann.
Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz des lokalen Maximums kann verzichtet werden.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

Aufgabe A2: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$y = f_a(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a - 2x} \qquad (x \in D_{f_a}).$$

Außerdem ist die zweite Ableitung der Funktion f_a durch

$$f_a''(x) = \frac{-2a + 3x}{2\,(a - 2x)^{3/2}} \qquad (x \in \mathbb{R},\ x < \tfrac{a}{2}) \quad \text{gegeben.}$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen f_a an und führen Sie für die Funktionen f_a eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema).
Weisen Sie nach, dass die Funktionen f_a keine Wendestellen besitzen.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_6 im Intervall $-2 \le x \le 3$ und den Graphen der Funktion f_{12} im Intervall $-2 \le x \le 6$.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 11)

b) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graphen der Funktion f_6 im Punkt $Q(1;\ f_6(1))$.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion h, auf deren Graph alle lokalen Extrempunkte der Graphen von f_a liegen.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) schließt der Graph der Funktion f_a mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein. Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper.
Ermitteln Sie den Wert a so, dass das Volumen dieses Rotationskörpers $\frac{2}{3}\pi$ beträgt.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

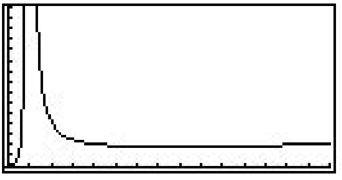
e) Der Graph der Funktion f_{12} und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe A3: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2} \qquad (x \in D_f).$$

Die Abbildung zeigt das mit einem grafikfähigen Taschenrechner erzeugte Bild des Graphen der Funktion f.



a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an.
Der Graph der Funktion f besitzt genau einen lokalen Minimumpunkt.
Berechnen Sie dessen Koordinaten.
Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums kann verzichtet werden.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

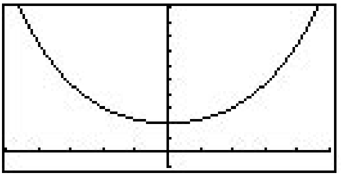
b) Es existiert genau ein Punkt P(x; f(x)) ($x \in \mathbb{R}$, $x > 1$), dessen Abstand zum Koordinatenursprung minimal ist.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes P.
Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz des lokalen Minimums kann verzichtet werden.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

Aufgabe A4: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Für jedes k ($k \in \mathbb{R}$, $k > 0$) ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$y = f_k(x) = \frac{k}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Abbildung zeigt das mit einem grafikfähigen Taschenrechner erzeugte Bild des Graphen der Funktion f_2.



a) Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion f_2 im Punkt $Q(2; f_2(2))$.

Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$, $u > 0$) sind zwei Punkte $P_u(u; f_2(u))$ und $P_u^*(-u; f_2(-u))$ gegeben.
Die Gerade t_u ist Tangente an den Graph der Funktion f_2 im Punkt P_u.
Die Gerade t_u^* ist Tangente an den Graph der Funktion f_2 im Punkt P_u^*.
Ermitteln Sie den Wert u, für den sich die Tangenten t_u und t_u^* rechtwinklig schneiden.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

b) Die Länge eines Kurvenstückes des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion f im Intervall $a \le x \le b$ bezeichnet man als Bogenlänge L. Diese Bogenlänge kann mit der Formel

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$ berechnet werden.

Weisen Sie nach, dass man die Bogenlänge des Graphen der stetig differenzierbaren Funktion f_k im Intervall $a \le x \le b$ durch

$L = \frac{1}{2}\int_a^b (e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}})\,dx$ berechnen kann.

Ermitteln Sie die Bogenlänge L des Graphen der Funktion f_k im Intervall $-k \le x \le k$.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe B1: Analytische Geometrie und lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1; 1; -1)$, $B_t(1; 1 + t; -1 + 2t)$ und $C_t(1 + 2t; 1 - t; -1)$ ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) gegeben.

a) Untersuchen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB_2}$ und $\overrightarrow{AC_4}$ auf lineare Abhängigkeit.

Berechnen Sie die y-Koordinate des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ -8 \end{pmatrix}$ so, dass die Vektoren $\vec{x}$, $\overrightarrow{AB_2}$ und $\overrightarrow{AC_4}$ linear abhängig sind.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass für jeden Wert t die Punkte A, B_t und C_t ein und dieselbe Ebene bestimmen.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Für jedes t sind die Punkte A, B_t und C_t Eckpunkte eines Dreiecks AB_tC_t. Weisen Sie rechnerisch nach, dass jedes Dreieck AB_tC_t ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{B_tC_t}$ ist.

Zeigen Sie, dass eine Gleichung für alle Winkelhalbierenden der Winkel C_tAB_t existiert, die unabhängig vom Wert des Parameters t ist und ermitteln Sie eine Gleichung dieser Winkelhalbierenden.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

d) Berechnen Sie den Wert des Parameters t, für den das zugehörige Dreieck AB_tC_t den Flächeninhalt $\sqrt{6}$ hat.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe B2: Analytische Geometrie und lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind

die Ebenen E_a durch $(21 - 7a)x + (5 - 5a)y - 35z = -35a \quad (a \in \mathbb{R})$,

die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$ sowie

die Punkte $P(15; -\frac{7}{2}; 7)$, $Q(15; 7; 7)$ und $S(2; 1; -4)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P in der Ebene E_1 liegt.
Berechnen Sie den Abstand der Punkte P und Q.
Ermitteln Sie den Wert a, für den der Punkt Q in der Ebene E_a liegt.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Die Gerade g schneidet die Ebene E_1 im Punkt R.
Die Punkte P, Q und R sind Eckpunkte eines in der Ebene E_1 liegenden Dreiecks.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide PQRS.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 8)

c) Ermitteln Sie den Wert a, für den die Ebene E_a orthogonal zur Ebene E_1 ist.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Weisen Sie nach, dass die Gerade s mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (p \in \mathbb{R})$$ in jeder der Ebenen E_a liegt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Aufgabe B3: Analytische Geometrie und lineare Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3; -5; -15)$, $B(2; 4; -1)$ und $C(8; 10; -7)$ sowie die Gerade g durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -20 \\ -23 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$ gegeben.

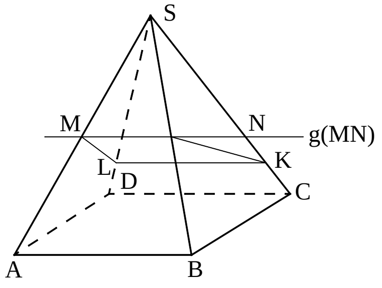
a) Zeigen Sie, dass die durch die Punkte B und C bestimmte Gerade h windschief zur Geraden g verläuft.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Die Höhe h_a auf der Seite $\overline{BC}$ des Dreiecks ABC zerlegt das Dreieck in zwei Teildreiecke. Das flächenmäßig größere der beiden Teildreiecke rotiere um die Höhe h_a.
Zeigen Sie, dass der Punkt F(4; 6; –3) Höhenfußpunkt der Höhe h_a ist.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

c) Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Geraden, die durch den Punkt A verläuft und die die Geraden g sowie h schneidet.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe B4: Analytische Geometrie und lineare Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine gerade Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche durch die Eckpunkte A(–4; 8; 16), B(–9; 18; 6), C(–19; 8; 1), D(–14; –2; 11) und S(1; $\frac{7}{4}$; –4) gegeben.
Auf der Seitenfläche ABS der Pyramide liegen die Punkte M(0; 3; 0) und N(–1; 5; –2). Eine Ebene E, in der die Punkte M und N liegen, schneidet jede der vier Seitenflächen der Pyramide (siehe Skizze).



a) Weisen Sie nach, dass die durch die Punkte M und N bestimmte Gerade g parallel zu einer Grundkante der Pyramide verläuft.
Zeigen Sie, dass der Punkt M auf der Kante $\overline{AS}$ und der Punkt N auf der Kante $\overline{BS}$ liegt.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

b) Die Schnittfigur der Ebene E mit der Pyramide ist das Trapez KLMN, dessen größere der beiden parallelen Seiten die Länge 9 besitzt und dessen Höhe $\frac{3}{2}\sqrt{41}$ beträgt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

Aufgabe C 1: Stochastik

Eine Firma stellt verschiedene Elektronikerzeugnisse her. Eines dieser Produkte besteht aus drei Bauteilen T_1, T_2 und T_3. Falls ein Bauteil ausfällt, ist das Produkt nicht mehr funktionsfähig. Es ist bekannt, dass jedes dieser Teile innerhalb der Garantiezeit mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 ausfällt und dass dieser Ausfall keine Auswirkungen auf die Funktionsfähigkeit der anderen Teile hat. In den Garantiebedingungen erklärt sich die Herstellerfirma bereit, bei jedem Bauteil einmalig die Kosten für den Austausch zu übernehmen. Die Kosten für den Austausch von T_1 betragen 150 DM, von T_2 120 DM und von T_3 30 DM.

a) Die Zufallsgröße X beschreibt die Kosten pro Produkt, die der Herstellerfirma durch die Garantieleistungen entstehen.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X an.
Ermitteln Sie die Kosten, die die Herstellerfirma durch die Garantieleistungen pro Produkt erwarten muß.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Ein Erzeugnis der Firma sind Taschenrechner. Bekannt ist, dass 10% der produzierten Geräte defekt sind. Ursache dafür können die Fehler F_1 und F_2 sein. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fehler F_1 beträgt 0,04. Sowohl Fehler F_1 als auch Fehler F_2 haben 0,25% der produzierten Taschenrechner.

b) Untersuchen Sie, ob die beiden Fehler F_1 und F_2 unabhängig voneinander auftreten.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Ein Kontrolleur benötigt für eine Analyse einen Taschenrechner, der sowohl Fehler F_1 als auch Fehler F_2 aufweist.
Wie viele Geräte müssten der Produktion wenigstens entnommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens ein solcher Rechner dabei ist?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Um Taschenrechner preiswert kaufen zu können, gaben die Gymnasien einer Stadt eine Sammelbestellung von 750 Stück bei dieser Firma ab. Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Rechner unter den 750 gelieferten Geräten, die den Fehler F_1 aufweisen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler F_1 bei weniger als 20 Rechnern auftritt?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Aufgabe C2: Stochastik

Ein Betrieb produziert Glühlampen, Energiesparlampen und Leuchtstoffröhren.

a) Für die Produktion von Glühlampen stehen zwei Maschinen M_1 und M_2 zur Verfügung. Die Maschine M_1 produziert 65% der Glühlampen, wobei der Ausschussanteil 1% beträgt. Bei der Maschine M_2 beträgt der Ausschussanteil 2,5%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine in diesem Betrieb produzierte Glühlampe Ausschuss ist?

Eine zufällig der Produktion entnommene Glühlampe ist Ausschuss. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt diese Glühlampe von Maschine M_2?

Für eine Untersuchung benötigt man ein von Maschine M_2 gefertigtes Ausschussstück.
Wie viele Glühlampen von M_2 müssen der laufenden Produktion mindestens entnommen werden, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 wenigstens ein Ausschussstück unter ihnen befindet?

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

b) Ein Fachgeschäft erhält eine Lieferung von 900 Glühlampen, darunter 150 farbige. Aus der Lieferung werden 50 Glühlampen zufällig entnommen.
Bestimmen Sie unter der vereinfachten Annahme, dass die Anzahl der farbigen Glühlampen in der Stichprobe beschreibende Zufallsgröße binomialverteilt ist, jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
Ereignis A: Unter den 50 ausgewählten Glühlampen sind höchstens 4 farbige.
Ereignis B: Unter den 50 ausgewählten Glühlampen sind mindestens 8 farbige.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Bei der Produktion von Energiesparlampen rechnet dieser Betrieb mit einer Ausschussquote von 3%. Eine Tagesproduktion an Energiesparlampen wird komplett kontrolliert. Dabei werden 39 defekte Lampen ermittelt. Der Produktionsleiter sieht in dieser Zahl die exakte Bestätigung der Ausschussquote.
Wie viele Energiesparlampen wurden an diesem Tag produziert?

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Die Lebensdauer (in Stunden) von Leuchtstoffröhren sei angenähert normalverteilt mit dem Erwartungswert 1 500.
Ermitteln Sie die Standardabweichung, wenn 98% der Leuchtstoffröhren eine Lebensdauer zwischen 1 150 und 1 850 Stunden aufweisen.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Erwartungsbilder

Erwartungsbild zu Aufgabe A1: Analysis

a) Definitionsbereich: $D_{f_a} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

Nullstelle: $0 = 10x_N \Rightarrow x_N = 0$

Symmetrie: $f_a(-x) = 10(-x) \cdot e^{-a(-x)^2} = -10x \cdot e^{-ax^2} = -f_a(x)$

$\Rightarrow$ Zentralsymmetrie zum Koordinatenursprung

Extrempunkte: $f_a'(x) = 10e^{-ax^2} \cdot (1 - 2ax^2)$; $f_a''(x) = 20axe^{-ax^2} \cdot (2ax^2 - 3)$

$f_a'(x_E) = 0$, also $1 - 2ax_E{}^2 = 0 \Rightarrow x_E{}^2 = \frac{1}{2a} \Rightarrow x_{E_1} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$; $x_{E_2} = -\frac{1}{\sqrt{2a}}$

Nachweis:

$f_a''(\frac{1}{\sqrt{2a}}) = 20e^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\frac{2a}{\sqrt{2a}}) < 0$ (da a > 0) $\Rightarrow$ lokales Maximum;

$f_a''(-\frac{1}{\sqrt{2a}}) = 20e^{-\frac{1}{2}} \cdot (\frac{2a}{\sqrt{2a}}) > 0$ (da a > 0) $\Rightarrow$ lokales Minimum;

Koordinaten der lokalen Extrempunkte:

$P_{max}(\frac{1}{\sqrt{2a}}; \frac{10}{\sqrt{2ea}})$; $P_{min}(-\frac{1}{\sqrt{2a}}; -\frac{10}{\sqrt{2ea}})$

Koordinaten der Wendepunkte: $f_a''(x_W) = 0$

$20e^{-ax_W{}^2} \cdot (2a^2x_W{}^3 - 3ax_W) = 0 \Rightarrow x_W(2a^2x_W{}^2 - 3a) = 0$

$\Rightarrow x_{W_1} = 0$; $x_{W_2} = \sqrt{\frac{3}{2a}}$; $x_{W_3} = -\sqrt{\frac{3}{2a}}$

$P_{W_1}(0; 0)$; $P_{W_2}(\sqrt{\frac{3}{2a}}; \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2ae^3}})$; $P_{W_3}(-\sqrt{\frac{3}{2a}}; -\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2ae^3}})$

Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden.

Wertebereich: $5 = \frac{10}{\sqrt{2ea}} \Rightarrow \sqrt{2ea} = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{e}$

b) Gerade: $y = mx$ (da zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung)

$\frac{10}{\sqrt{2ea}} = m \cdot \frac{1}{\sqrt{2a}} \Rightarrow m = \frac{10\sqrt{e}}{e}$ also $y = \frac{10\sqrt{e}}{e} \cdot x$

Der Punkt O(0; 0) ist Punkt der Geraden aber kein lokaler Extrempunkt, da er Wendepunkt ist (siehe Aufgabenteil a)).

Als Nachweis ist es auch möglich zu zeigen, dass O(0; 0) für kein a lokaler Extrempunkt ist:

$\frac{1}{\sqrt{2a}} = 0$ gilt für kein a > 0.

c) Flächeninhalt: $f_1(x) = 10x \cdot e^{-x^2}$

$$A = \int_0^t (10x \cdot e^{-x^2})\,dx = \int_0^{-t^2} (-5 \cdot e^z)\,dz \quad \text{(mit der Substitution } z(x) = -x^2\text{)}$$

$$= [-5e^z]_0^{-t^2} = -5e^{-t^2} - (-5) = -5e^{-t^2} + 5 = A$$

d) Zielfunktion: $A = \frac{1}{2} x \cdot f(x) = 5x^2 \cdot e^{-x^2} \quad (x > 0)$

$A'(x) = e^{-x^2}(10x - 10x^3);\quad A'(x_E) = 0 \quad\Rightarrow\quad 10x_E - 10{x_E}^3 = 0$

Extrema: $x_{E_1} = 0;\quad x_{E_2} = -1;\quad x_{E_3} = 1 \quad (x_{E_1}, x_{E_2}$ entfallen, wegen $x > 0)$

$Q(x_{E_3}; f_1(x_{E_3})) = Q(1; \frac{10}{e}) \quad\Rightarrow\quad$ Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{10}{e} = \frac{5}{e} \approx 1{,}84$

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Nullstelle; Symmetrie; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Extremstellen; Art der Extrema; Koordinaten des lokalen Minimumpunktes; Koordinaten des lokalen Maximumpunktes; Koordinaten eines Wendepunktes; Koordinaten aller Wendepunkte; Ansatz für den Wert a; Wert a	13 BE
b)	Ansatz für die Gleichung der Geraden; Gleichung der Geraden; Nachweis für den Punkt O(0; 0)	3 BE
c)	Ansatz für den Flächeninhalt; Substitution; Stammfunktion; Flächeninhalt in Abhängigkeit von t	4 BE
d)	Zielfunktion; 1. Ableitung; Lösung der kubischen Gleichung; Extremstelle; Flächeninhalt	5 BE
		25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A2: Analysis

a) Definitionsbereich: $a - 2x \geq 0 \quad\Rightarrow\quad D_{f_a} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq \frac{a}{2}\}$

Nullstellen: $x_{N_1} = 0;\quad x_{N_2} = \frac{a}{2}$

Extrempunkte: $f_a'(x) = \frac{a - 3x}{2\sqrt{a - 2x}};\quad f_a''(x) = \frac{-2a + 3x}{2\,(a - 2x)^{3/2}}$

$f_a'(x_E) = 0,$ also $a - 3x_E = 0 \quad\Rightarrow\quad x_E = \frac{a}{3}$

Nachweis: $(a > 0)$

$f_a''(\frac{a}{3}) = \frac{-a}{2} \cdot (\frac{a}{3})^{-3/2} < 0 \quad\Rightarrow\quad$ lokales Maximum; $f_a(\frac{a}{3}) = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}$

Koordinaten der lokalen Extrempunkte: $P_{max}(\frac{a}{3}; \frac{a}{6} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}})$

Wendestellen: $f_a''(x_W) = 0$, d. h. $\frac{-2a + 3x_W}{2(a - 2x_W)^{3/2}} = 0 \Rightarrow x_W = \frac{2a}{3} \notin D_{f_a}$

Also haben die Funktionen keine Wendestellen.

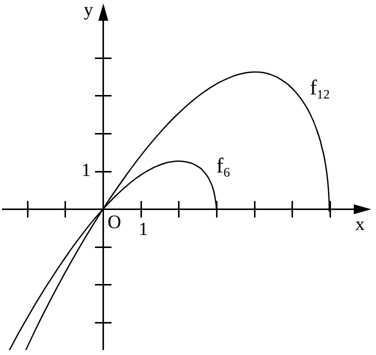
Graph:

f_6: Nullstellen: 0; 3

lokales Maximum: $(2; \sqrt{2})$

f_{12}: Nullstellen: 0; 6

lokales Maximum: (4; 4)



b) y-Wert: $f_6(1) = 1$; Anstieg: $m = f_6'(1) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$

$y = mx + n$ ergibt mit (1; 1) und $m = \frac{3}{4}$ $1 = \frac{3}{4} \cdot 1 + n$ also $n = \frac{1}{4}$

Gleichung der Tangente: $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

c) $P_{max}(\frac{a}{3}; \frac{a}{6} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}})$ ergibt $x = \frac{a}{3} \Rightarrow y = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{3x}{6} \cdot \sqrt{\frac{3x}{3}} = \frac{x}{2}\sqrt{x}$

Funktion h: $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$

d) Volumen des Rotationskörpers:

$$V = \pi \int_0^{\frac{a}{2}} (f(x))^2\,dx = \pi \int_0^{\frac{a}{2}} (\frac{x^2}{4}(a - 2x))\,dx = \pi \int_0^{\frac{a}{2}} (\frac{a}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{a}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{a^4}{384}\pi$$

Wert a: $V = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \frac{2}{3}\pi = \frac{a^4}{384}\pi$ also $a^4 = 256 \Rightarrow a = 4$

e) $A = \int_0^6 (\frac{x}{2} \cdot \sqrt{12 - 2x})\,dx$; Substitution: $z(x) = 12 - 2x$; $\frac{dz}{dx} = -2$

$$\Rightarrow A = \int_{12}^{0} ((-\frac{z}{4} + 3) \cdot \sqrt{z} \cdot (-\frac{1}{2}))\,dz = -\frac{1}{2}\int_{12}^{0} (-\frac{1}{4}z^{\frac{3}{2}} + 3z^{\frac{1}{2}})\,dz$$

$A = -\frac{1}{2}\,[-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\,z^{5/2} + 2z^{3/2}]_{12}^{0} = -\frac{1}{2}\,(\frac{\sqrt{248\,832}}{10} - 2\sqrt{1\,728}\,) = \frac{48\sqrt{3}}{5} \approx 16{,}63$

Lösungsvariante: partielle Integration

$A = \int_0^6 uv'\,dx = [uv]_0^6 - \int_0^6 u'v\,dx$

mit $u = \frac{1}{2}x$; $u' = \frac{1}{2}$; $v' = \sqrt{12-2x}$; $v = -\frac{1}{3}(-2x+12)^{3/2}$

Bewertungsvorschlag:

a) Definitionsbereich; Nullstellen; Ansatz für die 1. Ableitung (Produktregel); 1. Ableitung; Extremstelle; Nachweis des lokalen Maximums; Koordinaten des lokalen Maximumpunktes; Ansatz für die Wendestellen; Nachweis, dass keine Wendestellen existieren; Graph der Funktion f_6; Graph der Funktion f_{12} — 11 BE

b) y-Koordinate des Punktes Q; Anstieg; Gleichung der Tangente — 3 BE

c) Ansatz; Gleichung der Funktion h — 2 BE

d) Ansatz für das Volumen; Stammfunktion; Volumen; Ansatz für den Wert a; Wert a — 5 BE

e) Ansatz; Umformungen; Stammfunktion; Flächeninhalt — 4 BE

25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A3: Analysis

a) Definitionsbereich: $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ x \neq 1\}$

$f'(x) = \frac{(\ln x)^2 - x\cdot 2\cdot \ln x\cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{\ln x - 2}{(\ln x)^3}$ (Produktregel mit u = x und $v = (\ln x)^2$)

$f'(x_{min}) = 0 \Rightarrow \ln x_{min} = 2 \Rightarrow x_{min} = e^2$; $f(e^2) = \frac{e^2}{4} \Rightarrow P_{min}(e^2;\ \frac{e^2}{4})$

b) Für den Abstand d der Punkte P(x; f(x)) (x > 1) gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$d(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{(\ln x)^4}}$

$d'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{x^2}{(\ln x)^4}}}\,(x + \frac{x\ln x - 2x}{(\ln x)^5}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\ln x)^4}}}\,(1 + \frac{\ln x - 2}{(\ln x)^5})$ (da $x = 0 \notin D_f$)

Für die Extremstelle x_E muss gelten: $d'(x_E) = 0$. Wegen $x > 1$ genügt die Untersuchung des 2. Faktors.

$0 = 1 + \frac{\ln x_E - 2}{(\ln x_E)^5} = \frac{(\ln x_E)^5 + \ln x_E - 2}{(\ln x_E)^5}$ Es genügt die Betrachtung des Zählers.

Lösung der Gleichung $(\ln x_E)^5 + \ln x_E - 2 = 0$ durch Substitution $z = \ln x_E$.

$z^5 + z - 2 = 0 \Rightarrow z = 1;\quad \ln x_E = 1 \Rightarrow x_E = e;\quad f(e) = e \Rightarrow P_E(e;\, e)$

(Die Gleichung 5. Grades kann durch Probieren oder mit dem Newton-Verfahren gelöst werden. Da die Existenz genau eines Extrempunktes als gegeben gilt, kann auf die Suche weiterer Lösungen verzichtet werden.)

Lösungsvariante: Betrachtung der Extrema der Funktion $h(x) = d^2(x)$:

$h(x) = x^2 + \frac{x^2}{(\ln x)^4};\quad h'(x) = 2x + \frac{2x\ln x - 4x}{(\ln x)^5}$

$h'(x_E) = 0$ führt auf die selbe Gleichung 5. Grades wie oben.

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; 1. Ableitung; Extremstelle; Koordinaten des lokalen Extrempunktes	4 BE
b)	Zielfunktion; 1. Ableitung; Gleichung 5. Grades; Substitution; Lösung der Gleichung; Koordinaten des Punktes P	6 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4: Analysis

a) $f_2(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}};\quad f_2'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)$

Tangente: $y = mx + n$; Anstieg: $m = f_2'(2) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) = \frac{e^2 - 1}{2e}$

Mit $Q(2;\, f_2(2))$ also $Q\left(2;\, \frac{e^2 + 1}{e}\right)$ gilt $\frac{e^2 + 1}{e} = \frac{e^2 - 1}{2e} \cdot 2 + n$.

Es folgt $n = \frac{2}{e}$ und damit die Gleichung der Tangente $y = \frac{e^2 - 1}{2e}x + \frac{2}{e}$.

Ansatz (Bedingung für rechten Schnittwinkel): $f_2'(u) = -\frac{1}{f_2'(-u)}$

$\frac{1}{2}(e^{u/2} - e^{-u/2}) = -\frac{2}{e^{-u/2} - e^{u/2}} \Rightarrow e^u + e^{-u} - 6 = 0$

1. Lösungsvariante: Substitution $z = e^u$

$z + \frac{1}{z} - 6 = 0 \Rightarrow z^2 - 6z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1;\,2} = 3 \pm \sqrt{8}$

$u_1 = \ln(3 + \sqrt{8}) \approx 1{,}76$ (trifft zu); $u_2 = \ln(3 - \sqrt{8}) \approx -1{,}76$ (entfällt)

2. Lösungsvariante: NEWTON-Verfahren

$f(u) = e^u + e^{-u} - 6$; $f'(u) = e^u - e^{-u}$; $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Startwert: z. B. x = 1 (konvergiert nach 4 Schritten auf 4 Dezimalstellen gegen den Wert u = 1,7627).

Die zweite Lösung kann mit einem anderen Startwert oder anhand der Symmetrieeigenschaften des Graphen gefunden werden.

b) $f_k'(x) = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{k}\,e^{\frac{x}{k}} - \frac{1}{k}\,e^{\frac{-x}{k}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{\frac{-x}{k}}\right)$

Nachweis der Formel:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{\frac{2x}{k}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{2x}{k}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{2 + e^{\frac{2x}{k}} + e^{-\frac{2x}{k}}}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)^2}\,dx \quad \text{(Binomische Formel)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{\frac{-x}{k}}\right) dx$$

Bogenlänge:

$$L = \frac{1}{2}\int_{-k}^{k} \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{\frac{-x}{k}}\right) dx = \frac{1}{2}k\left[e^{\frac{x}{k}} - e^{\frac{-x}{k}}\right]_{-k}^{k} = k\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

Bewertungsvorschlag:

a)	1. Ableitung; Anstieg der Tangente; Gleichung der Tangente; Ansatz für den Wert u; quadratische Gleichung; Wert u	6 BE
b)	Ansatz für den Nachweis; Nachweis; Stammfunktion; Ergebnis	4 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B1: Analyt. Geometrie/lin. Algebra

a)

$B_2(1; 3; 3) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $C_4(9; -3; -1) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AC_4} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Im Falle linearer Abhängigkeit gilt: $\overrightarrow{AB_2} = \lambda\,\overrightarrow{AC_4}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

$0 = \lambda \cdot 8 \;\Rightarrow\; \lambda = 0$; $2 = \lambda \cdot (-4) \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{1}{2}$

Die Vektoren $\overrightarrow{AB_2}$ und $\overrightarrow{AC_4}$ sind also linear unabhängig. Deshalb muss für lineare Abhängigkeit der drei Vektoren gelten:

$$\vec{x} = \lambda\,\overrightarrow{AB_2} + \mu\,\overrightarrow{AC_4} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), \text{ d. h.,} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ -8 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$4 = 8\mu \;\Rightarrow\; \mu = \tfrac{1}{2}; \quad -8 = 4\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = -2; \quad \text{Damit folgt:} \quad y = -6; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

b) Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B_2 und C_4:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & x = 1 + 8s \\ \text{(II)} & y = 1 + 2r - 8s \\ \text{(III)} & z = -1 + 4r \end{array}$$

parameterfreie Form: $\tfrac{1}{2}\,\text{(I)} + \text{(II)} - \tfrac{1}{2}\,\text{(III)} \quad \tfrac{1}{2}x + y - \tfrac{1}{2}z = 2$

$\Rightarrow \quad x + 2y - z = 4$

Einsetzen von B_t und C_t:
B_t: $1 + 2 + 2t + 1 - 2t = 4$; C_t: $1 + 2t + 2(1 - t) - (-1) = 4$
Es ergibt sich jeweils die wahre Aussage 4 = 4. Damit liegen alle Punkte B_t und C_t in der Ebene E.
Lösungsvariante:
Ebene E:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

Dieser Ansatz führt zur selben parameterfreien Form der Ebenengleichung: $x + 2y - z = 4$. Diese Gleichung ist unabhängig von t.

c) Berechnung der Längen der Strecken $\overline{AB_t}$ und $\overline{AC_t}$:
$d(AB_t) = \sqrt{0^2 + t^2 + 4t^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5} \cdot t$;
$d(AC_t) = \sqrt{4t^2 + t^2 + 0^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5} \cdot t$; Es gilt: $d(AB_t) = d(AC_t)$.
Das Dreieck AB_tC_t ist also gleichschenklig. Deshalb geht die Winkelhalbierende des Winkels C_tAB_t durch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{B_tC_t}$.
$M(\tfrac{1}{2}(2 + 2t);\ \tfrac{1}{2} \cdot 2;\ \tfrac{1}{2}(-2 + 2t)) \quad \Rightarrow \quad M(1 + t;\ 1;\ -1 + t)$
Gleichung der Winkelhalbierenden (der Geraden durch A und M):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + st \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R},\ q = st)$$

Diese Gleichung der Winkelhalbierenden ist unabhängig von t.

Lösungsvariante:

$$\overrightarrow{AB_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2t \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AB_{t_0}} = \frac{1}{\sqrt{5}t}\,\overrightarrow{AB_t}; \quad \overrightarrow{AC_t} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC_{t_0}} = \frac{1}{\sqrt{5}t}\,\overrightarrow{AC_t}$$

Richtungsvektor der Winkelhalbierenden:

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB_{t_0}} + \overrightarrow{AC_{t_0}} = \frac{1}{\sqrt{5}t}\begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{w} \text{ ist unabhängig von t.}$$

Damit ergibt sich obige Gleichung der Winkelhalbierenden.

d) Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}gh$

$$g = d(B_tC_t) = \sqrt{(1+2t-1)^2 + (1-t-(1+t))^2 + (-1-(-1+2t))^2}$$

$$= \sqrt{4t^2 + 4t^2 + 4t^2} = \sqrt{12}\,t$$

$$h = d(AM) = \sqrt{(1+t-1)^2 + 0^2 + (-1+t+1)^2} = \sqrt{t^2+t^2} = \sqrt{2}\,t$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{t \cdot \sqrt{12} \cdot t \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{6} = \frac{t^2 \cdot \sqrt{24}}{2} \quad \Rightarrow \quad t^2 = 1 \qquad \text{Es folgt:} \qquad t_1 = -1 \text{ (entfällt)}; \quad t_2 = 1.$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Koordinaten der beiden Vektoren; Ergebnis der Untersuchung auf lineare Abhängigkeit; Ansatz für die y-Koordinate; Lösung des Gleichungssystems; y-Koordinate	5 BE
b)	Ansatz für die Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B_t, C_t; Gleichung der Ebene; Punktproben für B_t und C_t	3 BE
c)	Nachweis der Gleichschenkligkeit; Ansatz für den Richtungsvektor der Winkelhalbierenden; Nachweis der Parameterunabhängigkeit des Richtungsvektors; Gleichung der Winkelhalbierenden	4 BE
d)	Länge der Grundseite des Dreiecks; Länge der Höhe des Dreiecks; Wert t	3 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B2: Analyt. Geometrie/lin. Algebra

a) Ebene E_1: $14x - 35z = -35$

Einsetzen von $P(15; -\frac{7}{2}; 7)$ liefert: $210 - 245 = -35$ w. A. $\Rightarrow$ $P \in E_1$

Abstand der Punkte P und Q: $d = \sqrt{0^2 + \frac{21^2}{2^2} + 0^2} = \frac{21}{2} = 10{,}5$

Q(15; 7; 7): $(21 - 7a) \cdot 15 + (5 - 5a) \cdot 7 - 35 \cdot 7 = -35a$

$\Rightarrow \quad -105a + 105 = 0 \quad \text{also} \quad a = 1$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$

$g \cap E_1$: $14(8 + r) - 35(12 + 3r) = -35 \quad \Rightarrow \quad r = -3$

Aus der Gleichung von g folgt mit r = –3: R(5; –14; 3).

Flächeninhalt der Grundfläche PQR:

E^D ist die senkrechte Ebene zu $\overline{PQ}$ durch R. F ist der Fußpunkt des Lotes von R auf $\overline{PQ}$.

$\Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{RF} \cdot \overrightarrow{PQ} = (x - 5) \cdot 0 + (y + 14) \cdot \frac{21}{2} + (z - 3) \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad y = -14$

Die Gleichung der Ebene E^D lautet demnach: y = –14.

Lotfußpunkt F: $E^D \cap g(\overline{PQ})$

$g(\overline{PQ})$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ -\frac{7}{2} \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{21}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; Aus y = –14 folgt t = –1. Damit ergibt sich F(15; –14; 7)

Abstand der Punkte R und F: $d = \sqrt{10^2 + 4^2} = 2\sqrt{29}$

Flächeninhalt des Dreiecks PQR:

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{RF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot 2\sqrt{29} = \frac{21}{2}\sqrt{29} \approx 56{,}5$

Lösungsvariante:

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{PR} \cdot \sin(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = 0{,}5 \cdot 10{,}5 \cdot \sqrt{226{,}25} \cdot \sin 45{,}7° \approx 56{,}5$

Die Gerade l verläuft durch S und steht senkrecht zu E_1.

l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ Normalenvektor von E_1 ist.

Der Lotfußpunkt L des Lotes vom Punkt S auf die Ebene E_1 ist der Schnittpunkt der Geraden l mit der Ebene E_1.

$l \cap E_1$: $14(2 + 2t) - 35(-4 - 5t) = -35 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \quad \text{also} \quad L(0; 1; 1)$

Die Höhe der Pyramide ist gleich dem Abstand der Punkte L und S.

$d(L, S) = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

Lösungsvariante: Höhe der Pyramide = Abstand des Punktes S von E_1

$d(S, E_1) = |(\vec{x}_0 - \vec{x}_1) \cdot \vec{e}_n| = \left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \right| = \sqrt{29}$

Volumen der Pyramide:
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{21}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} = \frac{203}{2} = 101{,}5$

c) Die Normalenvektoren beider Ebenen müssen sekrecht aufeinander stehen.
$$0 = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21-7a \\ 5-5a \\ -35 \end{pmatrix} = 2(21-7a) - 5(-35) \quad \Rightarrow \quad a = 15{,}5$$

d) Nachweis: Die Gerade s liegt in jeder Ebene E_a:
$$(21-7a)(5p) + (5-5a)(7-7p) - 35(1+2p) = -35a$$
$$-35a = -35a \quad \text{w. A.}$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis für den Punkt P; Abstand; Wert a	3 BE
b)	Ansatz für die Koordinaten des Punktes R; Koordinaten des Punktes R; Ansatz für die Höhe der Grundfläche; Höhe der Grundfläche; Flächeninhalt der Grundfläche; Ansatz für die Höhe der Pyramide; Höhe der Pyramide; Volumen	8 BE
c)	Ansatz für den Wert a; Wert a	2 BE
d)	Ansatz für den Nachweis; Nachweis	2 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B3: Analyt. Geometrie/lin. Algebra

a) Gerade h:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R});$$

Für die Schnittpunkte von g, h muss gelten:
$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & -2 + 3t & = & 2 + 6s \\ \text{(II)} & -20 - t & = & 4 + 6s \\ \text{(III)} & -23 + 2t & = & -1 - 6s \end{array}$$

Aus (I) und (II) folgt: $t = -5$; $s = -\frac{19}{6}$.

Einsetzen in (III) ergibt die falsche Aussage: $-33 = 18$.

Also existieren keine gemeinsamen Punkte von g und h.

Prüfung auf Parallelität:
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \lambda = 2; \\ \Rightarrow \lambda = -6; \\ \Rightarrow \lambda = -3; \end{array}$$

Widerspruch, also $g \nparallel h$.
Die Geraden g und h sind windschief.

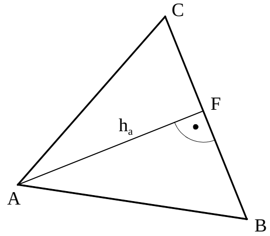
b) Prüfen, ob F(4; 6; –3) auf der Geraden h liegt:

x-Koordinate: $2 + 6s = 4 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$;

y-Koordinate: $4 + 6s = 6 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$;

z-Koordinate: $-1 - 6s = -3 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$; F liegt auf der Geraden h.

Prüfen der Orthogonalität:



$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = 6 + 66 - 72 = 0$$

Da der Punkt F auf h liegt und die Gerade durch die Punkte A und F senkrecht zur Geraden h verläuft, ist F Höhenfußpunkt der Höhe h_a.

Berechnung des Flächeninhalts:

$$\left|\overrightarrow{CF}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}; \quad \left|\overrightarrow{BF}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3}$$

Da $\left|\overrightarrow{CF}\right| > \left|\overrightarrow{BF}\right|$ gilt, ist das Dreieck AFC das gesuchte Dreieck, denn bei gleicher Höhe $\overline{AF}$ ist die Grundseite länger als im Dreieck ABF. Die Rotation liefert einen Kreiskegel.

$$h = \overline{AF} = \sqrt{1^2 + 11^2 + 12^2} = \sqrt{266} \approx 16{,}3$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{266} = 16\pi \cdot \sqrt{266} \approx 819{,}8$$

c) Die gesuchte Gerade muss in der Ebene E(ABC) liegen, da der Punkt A und die Gerade h (h ist die Gerade durch B und C) in dieser Ebene liegen. Da die Geraden g und h windschief sind, schneidet die Gerade g die Ebene E(ABC) in genau einem Punkt S. Der Punkt S muss ebenfalls auf der gesuchten Geraden liegen.

Ebene E(ABC):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (p, q \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad 23x - 13y + 10z + 16 = 0$$

Schnittpunkt S der Ebene E(ABC) mit der Geraden g:

$$23(-2 + 3t) - 13(-20 - t) + 10(-23 + 2t) + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt: S(–2; –20; –23)

Gerade g(AS) (enthält den Punkt A und schneidet g):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ -15 \\ -8 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$$

Nur die Gerade g(AS) kann die gesuchte Gerade sein, da nur ein Schnittpunkt S existiert. Es bleibt zu zeigen, dass die Gerade g(AS) auch h schneidet:
Schnittpunkt von g(AS) und h:

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & 3 - 5r & = & 2 + 6s \\ \text{(II)} & -5 - 15r & = & 4 + 6s \\ \text{(III)} & -15 - 8r & = & -1 - 6s \end{array}$$

Aus (I) und (II) folgt: $r = -1$; $s = 1$.
Einsetzen in (III) liefert die wahre Aussage: $-7 = -7$. Die Gerade g(AS) schneidet h.

Die Gerade g(AS) ist die gesuchte Gerade.

Bewertungsvorschlag:

a) Gleichung der Geraden h; Nachweis, dass die Geraden g und h keine gemeinsamen Punkte besitzen; Nachweis, dass die Geraden g und h nicht parallel sind — 3 BE

b) Nachweis für den Höhenfußpunkt; Auswahl des Teildreiecks; Ansatz für das Volumen; Volumen — 4 BE

c) Gleichung der Ebene, die eine Gerade und den Punkt A enthält; Koordinaten des Schnittpunktes der anderen Geraden mit der Ebene; Gleichung der gesuchten Geraden — 3 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B4: Analyt. Geometrie/lin. Algebra

a) Geraden:
g(MN): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; g(AB): $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$ $(t, s \in \mathbb{R})$

Prüfung der Richtungsvektoren auf Parallelität:
$-5 = \lambda(-1) \Rightarrow \lambda = 5$; $10 = \lambda \cdot 2 \Rightarrow \lambda = 5$; $-10 = \lambda(-2) \Rightarrow \lambda = 5$
Also sind die Geraden parallel.
Nachweis der Lage der Punkte M und N auf den Kanten:

g(AS): $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{25}{4} \\ -20 \end{pmatrix}$; g(BS): $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} 10 \\ -\frac{65}{4} \\ -10 \end{pmatrix}$ $(s_1, s_2 \in \mathbb{R})$

$s_1 = \frac{8}{10}$ $(0 < s_1 < 1) \Rightarrow M \in g(AS)$; $s_2 = \frac{8}{10}$ $(0 < s_2 < 1) \Rightarrow N \in g(BS)$

b) Die Punkte M und N begrenzen eine der parallelen Trapezseiten.
Länge der Seite $\overline{MN}$: $d(MN) = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$
Die Seite $\overline{MN}$ ist die kürzere und die Seite $\overline{KL}$ die längere (Länge 9) der parallelen Trapezseiten.

Flächeninhalt des Trapezes:

$A_T = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{3+9}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{41} = 9\sqrt{41} \approx 57{,}6$

K ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g(SC).
L ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g(SD).

Für den Punkt K gilt:

$\vec{x} = \overrightarrow{OC} + u\overrightarrow{CS} \quad (u \in \mathbb{R}, 0 \le u \le 1)$

$= \begin{pmatrix} -19 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 15 \\ -\frac{25}{4} \\ -5 \end{pmatrix}$

Für den Punkt L gilt:

$\vec{x} = \overrightarrow{OD} + v\overrightarrow{DS} \quad (v \in \mathbb{R}, 0 \le v \le 1)$

$= \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 15 \\ \frac{15}{4} \\ -15 \end{pmatrix}$

Wegen $\overline{CD} \parallel \overline{KL}$ und $\overline{CS} = \overline{DS}$ gilt $u = v$.

$\Rightarrow \quad K(-19 + 20u;\ 8 - \frac{25}{4}u;\ 1 - 5u); \quad L(-14 + 15u;\ -2 + \frac{15}{4}u;\ 11 - 15u)$

Aus dem Abstand $d(K; L) = 9$ folgt:

$$9 = \sqrt{(-14 + 15u + 19 - 20u)^2 + \left(-2 + \frac{15}{4}u - 8 + \frac{25}{4}u\right)^2 + (11 - 15u - 1 + 5u)^2}$$

$$= \sqrt{225u^2 - 450u + 225} = \sqrt{(15u - 15)^2} = |15u - 15|$$

$u_1 = \frac{8}{5}$ (entfällt, da > 0); $\qquad u_2 = \frac{2}{5}$ (trifft zu)

Einsetzen in g(SC) bzw. g(SD) liefert: $K(-11; \frac{11}{2}; -1)$; $L(-8; -\frac{1}{2}; 5)$.

Gleichung der Ebene E = E(MNK):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -11 \\ \frac{5}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (p, q \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad 2x + 14y + 13z = 42$$

(Die Angabe der Gleichung in parameterfreier Form war nicht gefordert.)

Bewertungsvorschlag:

a)	Ansatz für den Nachweis der Parallelität; Nachweis der Parallelität; Ansatz für den Nachweis der Lage der Punkte M und N; Nachweis der Lage der Punkte M und N	4 BE
b)	Abstand der Punkte M und N; Flächeninhalt; Bedingungen für die Lage von K und L; Ansatz für die Koordinaten eines Punktes (K oder L); Koordinaten eines der Punkte K oder L; Ebenengleichung	6 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C1: Stochastik

a) Kosten beim Ausfall:

Ausfall der Bauteile	Kosten in DM
nur T_1	150
nur T_2	120
nur T_3	30
nur T_1 und T_2	270
nur T_1 und T_3	180
nur T_2 und T_3	150
T_1, T_2 und T_3	300
kein Bauteil	0

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	$P(X = x_i)$
0	$0{,}8^3 = 0{,}512$
30	$0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$
120	$0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$
150	$0{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$
180	$0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}032$
270	$0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}032$
300	$0{,}2^3 = 0{,}008$

Erwartungswert:

$$E(X) = 30 \cdot 0{,}128 + 120 \cdot 0{,}128 + 150 \cdot 0{,}16 + 180 \cdot 0{,}032 + 270 \cdot 0{,}032 + 300 \cdot 0{,}008 = 60$$

Die Firma hat mit Kosten von 60 DM pro Produkt zu rechnen.

b) $P(F_2) = P(F_1 \cup F_2) - P(F_1) + P(F_1 \cap F_2) = 0{,}1 - 0{,}04 + 0{,}0025 = 0{,}0625$

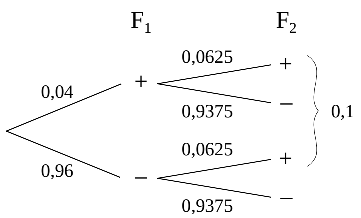
Untersuchung der Unabhängigkeit:

$P(F_1) \cdot P(F_2) = 0{,}04 \cdot 0{,}0625 = 0{,}0025 = P(F_1 \cap F_2)$,

d. h., F_1 und F_2 sind voneinander unabhängig.

Lösungsvariante:

Falls F_1 und F_2 unabhängig sind, gilt folgendes Baumdiagramm:



bedingte Wahrscheinlichkeit:

$P_{F_1}(F_2) = \frac{0{,}0025}{0{,}04} = 0{,}0625.$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zum Ergebnis „Gerät defekt“ führen, beträgt 0,1.

$\Rightarrow$ F_1 und F_2 sind unabhängig.

c) Z … Anzahl der Taschenrechner, die sowohl F_1 als auch F_2 aufweisen.

Z ist binomialverteilt mit $p = 0{,}0025$ ($P(F_1 \cap F_2) = 0{,}0025$).

E_n … Bei n gezogenen Taschenrechnern ist wenigstens einer defekt.

$P(\overline{E_n}) = 0{,}9975^n \;\Rightarrow\; 1 - 0{,}9975^n \geq 0{,}99 \;\Rightarrow\; \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9975} \leq n \;\Rightarrow\; n > 1\,839{,}76$

Es müssten mindesten 1 840 Geräte der Produktion entnommen werden.

d) Y ist binomialverteilt mit n = 750 und p = 0,04. Erwartungswert: E(Y) = 30
$n \cdot p \cdot q = 28{,}8 > 9 \quad \Rightarrow$ Näherung von Moivre - Laplace darf genutzt werden.
$P(Y \le 19) = \Phi\left(\frac{19-30}{\sqrt{28{,}8}}\right) = \Phi(-2{,}05) = 1 - \Phi(2{,}05) = 1 - 0{,}9798 = 0{,}0202$
Lösung unter Beachtung des Korrekturgliedes 0,5:
$P(Y \le 19) = \Phi\left(\frac{19+0{,}5-30}{\sqrt{28{,}8}}\right) = \Phi(-1{,}96) = 1 - 0{,}9750 = 0{,}0250$

Bewertungsvorschlag:

a)	Werte der Zufallsgröße X; Wahrscheinlichkeitsverteilung; Erwartungswert	3 BE
b)	Wahrscheinlichkeit von F_2; Ansatz für den Nachweis der Unabhängigkeit; Antwort	3 BE
c)	Ansatz für die Anzahl; Anzahl	2 BE
d)	Ansatz; Wahrscheinlichkeit	2 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C2: Stochastik

a) Glühlampe ist von Maschine M_1, M_2 produziert: $P(M_1) = 0{,}65$; $P(M_2) = 0{,}35$
Wahrscheinlichkeiten für Ausschussteile: $P_{M_1}(A) = 0.01$; $P_{M_2}(A) = 0{,}025$

$P(A) = 0{,}65 \cdot 0{,}01 + 0{,}35 \cdot 0{,}025 = 0{,}01525$
(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

$$P_A(M_2) = \frac{P(M_2) \cdot P_{M_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}025}{0{,}01525} \approx 0{,}5738$$

X … Anzahl der Ausschussteile unter n Erzeugnissen (von M_2)
X ist binomialverteilt mit $p = P_{M_2}(A) = 0{,}025$.
Wahrscheinlichkeit für kein Ausschussteil unter n Produkten: $0{,}975^n$
$1 - 0{,}975^n \ge 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad n \ge 181{,}89$
Mindestens 182 Glühlampen müssen der Produktion entnommen werden.

b) Wahrscheinlichkeit für eine farbige Glühlampe: $\frac{150}{900} = \frac{1}{6}$
Y … Anzahl der farbigen Glühlampen in der Stichprobe
Y ist binomialverteilt mit n = 50 und $p = \frac{1}{6}$.
$P(A) = P(Y \le 4) \approx 0{,}0643$ (aus Tafel)

$P(B) = P(Y \geq 8) = 1 - P(Y \leq 7) \approx 1 - 0{,}3911$ (aus Tafel)
$= 0{,}6089$

c) Z … Anzahl der defekten Energiesparlampen in der Tagesproduktion
Z ist binomialverteilt mit n (= Tagesproduktion in Stück) und $p = 0{,}03$.
Erwartungswert: $E(Z) = 39 = n \cdot 0{,}03 \Rightarrow n = 1\,300$
Es wurden 1 300 Energiesparlampen erzeugt.

d) N … Lebensdauer der Leuchtstoffröhren in Stunden
N ist normalverteilt mit $\mu = 1\,500$.
98% der Leuchtstoffröhren haben eine Lebensdauer von 1 150 bis 1 850 Stunden, d. h., $\mu \pm 350$.
$P(|N - 1\,500| \leq 350) = 0{,}98 \quad \Rightarrow \quad 2(\Phi(|\frac{350}{\sigma}|)) - 1 = 0{,}98$
Herleitung der Beziehung:
$P(|X - \mu| \leq x) = P(-x \leq X - \mu \leq x) = P(-x + \mu \leq X \leq x + \mu)$
$= \Phi(\frac{x}{\sigma}) - \Phi(-\frac{x}{\sigma}) = \Phi(\frac{x}{\sigma}) - (1 - \Phi(\frac{x}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{x}{\sigma}) - 1$
Es folgt also: $\Phi(\frac{350}{\sigma}) = 0{,}99$ und damit $\frac{350}{\sigma} \approx 2{,}33$ (aus Tafel ablesen).
$\Rightarrow \quad \sigma \approx 150$

Bewertungsvorschlag:

a)	Totale Wahrscheinlichkeit; bedingte Wahrscheinlichkeit; Ansatz für die Anzahl; Anzahl	4 BE
b)	Wahrscheinlichkeit P(A); Wahrscheinlichkeit P(B)	2 BE
c)	Ansatz; Wahrscheinlichkeit	2 BE
d)	Ansatz; Standardabweichung	2 BE
		10 BE

Abiturprüfung Leistungskurs

1997 / 98

Gymnasium

Sachsen-Anhalt

Hinweis:
Der Prüfling hatte nach Empfehlung durch die Lehrkraft je eine Aufgabe aus den Gebieten L1, L2 und L3 zur Bearbeitung auszuwählen.

Gebiet L1: Analysis / Aufgabe 1.1

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch $y = f_a(x) = \frac{1}{8}x^4 - a \cdot x^3 + \frac{27}{8}$, $x, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
Ihre Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem seien mit G_a bezeichnet.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen G_a.
Ermitteln Sie die Werte des Parameters a für den Fall, daß die Funktionen der Funktionenschar f_a genau eine Nullstelle haben.
Zeichnen Sie den Graphen $G_{0,6}$ im Intervall $-2 \leq x \leq 5$.
Weisen Sie nach, daß die Funktion $f_{0,6}$ genau zwei Nullstellen hat.

b) Zeigen Sie, daß alle Graphen G_a genau eine gemeinsame Wendetangente t haben, die parallel zur x-Achse verläuft.
Geben Sie eine Gleichung für diese Tangente t an.

Der Graph $G_{0,6}$ und die Wendetangente t begrenzen eine Fläche vollständig. Bei Rotation dieser Fläche um die Wendetangente t entsteht ein Körper. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens dieses Körpers auf eine Dezimalstelle genau.

c) Im Intervall $-2 \leq x \leq 5$ beschreibe der Graph $G_{0,6}$ nun einen möglichen Flußlauf. Zwei einander kreuzende Wanderwege führen entlang der Koordinatenachsen (Breiten bleiben unberücksichtigt). Um Wanderern eine Orientierung zu geben, will man die kürzeste Entfernung entlang der Wanderwege von deren Kreuzung bis zum Flußlauf ausschildern.
Berechnen Sie unter Verwendung eines Näherungsverfahren diese Entfernung mit einer Genauigkeit von zehn Metern. (Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 100 m im Gelände.)

Gebiet L1: Analysis / Aufgabe 1.2

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch $y = f_a(x) = \frac{a}{x}$, $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, a \in \mathbb{N}, a \neq 0$.
Ihre Graphen seien mit G_a bezeichnet.

a) Zeichnen Sie die Graphen G_3 und G_4 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.

An den Graphen G_4 wird im Punkt $Q(2 \mid 2)$ die Tangente t_4 gelegt.
Stellen Sie eine Gleichung dieser Tangente auf.

An dem Graphen G_3 existiert im I. Quadranten eine Tangente t_3, die zur Tangente t_4 parallel verläuft. Der Berührungspunkt dieser Tangente sei R.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

Auf jedem der Graphen G_a liege ein beliebiger Punkt $S_a(x_a \mid f_a(x_s))$. Die Tangente an einem der Graphen G_a im Punkt S_a und die Koordinatenachsen bilden jeweils ein Dreieck.
Zeigen Sie, daß die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks unabhängig von den Koordinaten des Punktes S_a ist.

b) Die Tangente t_4 (aus Aufgabe a) und der Graph G_3 begrenzen eine Fläche F vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

Bei Rotation der Fläche F um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper.
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens dieses Rotationskörpers.

c) Weisen Sie nach, daß es für jeden Wert von a mit $x > 0$ auf dem Graphen G_a genau einen Punkt gibt, dessen Entfernung vom Koordinatenursprung minimal ist.
Berechnen Sie dessen Koordinaten in Abhängigkeit vom Wert des Parameters a.

Gebiet L 2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind gegeben
die Ebenenschar E_a: $ax_1 + (2 + 3a)x_2 - x_3 + 8 + 4a = 0, \quad a \in \mathbb{R}$,

die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$,

sowie die Punkte $A(10 \mid -8 \mid 6)$ und $B(2 \mid 0 \mid 2)$.

a) Ermitteln Sie die Ebene F der Schar E_a, in der der Punkt B liegt.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene $\overline{F}$ auf, die orthogonal zur Ebene F liegt und durch die Punkte A und B verläuft.

b) Zeigen Sie, daß die Gerade g in allen Ebenen der Schar E_a liegt.

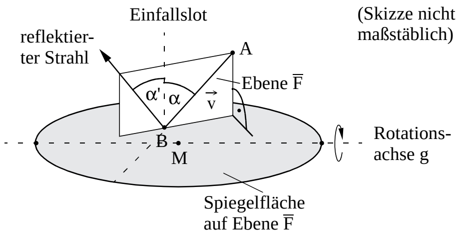
Die folgende Problematik, für die die Ergebnisse der Aufgaben a und b Verwendung finden können, wird gleichfalls im kartesischen Koordinatensystem betrachtet. Eine Einheit entspricht hier einem Dezimeter.

In einer optischen Anlage ist ein Spiegel installiert. Die Spiegelfläche ist kreisförmig und besitzt den Radius $r = \sqrt{62}$ dm und den Mittelpunkt $M(-1 \mid -1 \mid 6)$. Sie kann um den Durchmesser, der auf der Geraden g liegt, rotieren. Dabei liegt die Spiegelfläche (in den praktisch brauchbaren Stellungen) jeweils in einer Ebene der Schar E_a, und die Punkte der Spiegelfläche liegen auf bzw. im Inneren einer Kugel K.

c) Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel K an, und weisen Sie nach, daß der Punkt B bei einer bestimmten Stellung des Spiegels in der Spiegelfläche liegen kann, der Punkt A aber stets außerhalb der Spiegelfläche liegt.

In den nachfolgenden Aufgaben ist diese Anlage so eingerichtet, daß der Strahl $\vec{v}$ bei jeder Stellung des Spiegels vom Punkt A in Richtung des Punktes B verläuft.

d) Bei genau zwei Spiegelstellungen trifft der Strahl $\vec{v}$ auf Randpunkte der Spiegelfläche.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Berechnen Sie das Gradmaß des Einfallswinkels α, wenn der Strahl $\vec{v}$ im Punkt B reflektiert wird (nach Reflexionsgesetz*), und prüfen Sie, ob der reflektierte Strahl den Punkt D(–6 | 16 | 0) trifft.



[*) Reflexionsgesetz: 1. $\alpha = \alpha'$
2. Einfallender Strahl, reflektierter Strahl und Einfallslot liegen in ein und derselben Ebene.]

e) Bei genau einer Stellung des Spiegels wird der Strahl $\vec{v}$ parallel zur x_3-Achse reflektiert.
Ermitteln Sie die Ebene der Schar E_a, in der bei dieser Stellung die Spiegelfläche liegt.

Gebiet L2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind

die Punkte A(0 | 0), B$\left(\frac{64}{7} \mid \frac{48}{7}\right)$ und C$\left(-\frac{125}{7} \mid \frac{300}{7}\right)$ sowie

die Geradenschar g_a: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 2a \\ -7a^2 + 33a - 14 \end{pmatrix}$, $a, t \in \mathbb{R}$,

gegeben.

a) Ermitteln Sie für die Geraden g_4 und g_5 der Schar g_a jeweils eine Geradengleichung in Normalform.
Prüfen Sie, auf welchen der Geraden g_4 und g_5 die Punkte A, B und C liegen.

b) Der an der Geraden BC gespiegelte Punkt A sei der Punkt A'.
Stellen Sie eine Gleichung der Geraden BC auf.
Begründen Sie, daß der Punkt A' auf der Geraden g_4 der Schar g_a liegt und ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes.

c) Die Punkte A, B und C seien die Eckpunkte des Dreiecks ABC.
Weisen Sie nach, daß die Gerade g_3 der Schar g_a Winkelhalbierende dieses Dreiecks ist.

Das Dreieck ABC besitzt einen Inkreis mit der Maßzahl des Radius $r = 5$.
Geben Sie eine Gleichung des Inkreises an.
Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte des Inkreises und des Dreiecks ABC.

Gebiet L3: Wahrscheinlichkeitsrechnung 3.1

Zur Auswahl von Studienbewerbern will eine Universität zwei Aufnahmetests einsetzen. Die Tests sollen gleichwertig sein, d.h., die jeweils einander entsprechenden Aufgaben sollen den gleichen Schwierigkeitsgrad besitzen. In einer Untersuchung bearbeiteten 600 Versuchspersonen die Testaufgaben.
Für zwei einander entsprechende Aufgaben wurde folgendes Untersuchungsergebnis vorgelegt:

Anzahl n_i der Personen	Aufgabe 1 gelöst	Aufgabe 1 nicht gelöst	$\sum$
Aufgabe 2 gelöst	$n_1 = 116$	$n_3 = 174$	290
Aufgabe 2 nicht gelöst	$n_2 = 211$	$n_4 = 99$	310
$\sum$	327	273	600

a) Werten Sie das Untersuchungsergebnis grob, indem Sie die relativen Häufigkeiten der Ereignisse A („Aufgabe 1 gelöst“) und B („Aufgabe 2 gelöst“) miteinander vergleichen.
Zeigen Sie, daß A und B voneinander abhängige Ereignisse sind.

b) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Personen, die die Aufgabe 1 und die Aufgabe 2 nicht gelöst haben (Ereignis C). X kann näherungsweise als normalverteilt mit $n = 600$ und $p = 0{,}15$ angesehen werden.
Weisen Sie nach, daß diese Näherung zulässig ist.
Bestimmen Sie unter Annahme der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Ereignis C höchstens 100 Personen gezählt werden.

c) Die Ereignisse A und B (aus Teilaufgabe a) sollen jeweils mit mindestens $p_0 = 0{,}4$ eintreten.
Ein Mathematiker der Universität zweifelt das Eintreten der Ereignisse A und B mit $p_0 = 0{,}4$ an und vermutet stattdessen $p_1 = 0{,}3$. In eine erste Entscheidung will man zehn zufällig ausgewählte Arbeiten der Versuchspersonen einbeziehen. Wenn in weniger als drei Arbeiten beide Aufgaben gelöst sind, soll p_0 abgelehnt und die Entscheidung zugunsten von p_1 fallen.

Bestimmen Sie den Fehler 1. Art und den Fehler 2. Art für dieses Vorgehen. Überprüfen Sie, ob die relative Häufigkeit für die Ereignisse A und B bei einer Versuchswiederholung mit m = 400 Versuchspersonen auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ bestätigt werden können. Gehen Sie dazu von der Beziehung

$h_N > p_0 + c_\alpha^* \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{N}}$ mit $\Phi(c_\alpha^*) = 1 - \alpha$ und $p_0 = 0{,}4$ aus.

Gebiet L3: Analysis / Aufgabe 3.2

Gegeben ist die Funktionenschar f_a:

$$y = f_a(x) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad x, a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

In einem kartesischen Koordinatensystem bezeichnet man jeden ihrer Graphen als „Kettenlinie“. Eine Kettenlinie beschreibt, wie eine an zwei Pfosten in gleicher Höhe befestigte Kette hängt.

a) Berechnen Sie die Maßzahl des Abstandes jeder Kettenlinie von der x-Achse. Zeigen Sie, daß jede so beschriebene Kettenlinie symmetrisch zur y-Achse ist. Zeichnen Sie die Kettenlinie für a = 2 im Intervall $-4 \le x \le 4$.

b) Da der Abstand zweier Pfosten aus bautechnischen Gründen nicht immer gleich groß gewählt werden kann, der Durchhang jedoch einheitlich sein soll, ist es notwendig, die Länge der Kette in Abhängigkeit vom Abstand zweier Pfosten zu bestimmen.
Berechnen Sie die Maßzahl der Bogenlänge der Kettenlinie für a = 2 im Intervall $-4 \le x \le 4$.

c) Die Kettenlinie für a = 2 soll nun näherungsweise durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades dargestellt werden. Diese ganzrationale Funktion g stimme mit der Funktion f_2 an der Stelle $x_0 = 0$ im Funktionswert, im Wert der ersten Ableitung und im Wert der zweiten Ableitung überein. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

Gebiet L3: Analytische Geometrie / Aufgabe 3.3

Beim Schnitt eines Kegels mit zwei voneinander verschiedenen Ebenen entstehen zwei Ortskurven k_1 und k_2. Beide Kurven werden nachfolgend in ein und demselben kartesischen Koordinatensystem betrachtet.

a) Die Kurve k_1 werde in dem Koordinatensystem durch die Gleichung
$8x^2 + y^2 + 24x + 2 = 0$ beschrieben.
Ermitteln Sie die Koordinaten ihres Mittelpunktes sowie ihrer Scheitel- und Brennpunkte und bestimmen Sie die Art der Ortskurve sowie ihre Lage im Koordinatensystem.

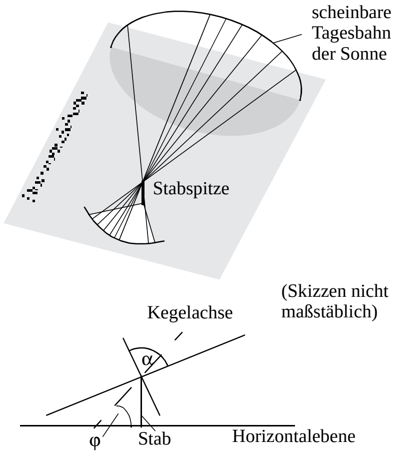
b) Die Kurve k_2 hat die Gestalt einer Hyperbel. Die Maßzahl des Abstandes ihrer beiden Scheitelpunkte ist $\sqrt{3}$, die ihrer linearen Exzentrizität $\frac{3}{2}\sqrt{11}$.

Skizzieren Sie einen Ast der Hyperbel durch Konstruktion von mindestens acht Punkten unter Verwendung nachfolgender Näherungswerte:

$\sqrt{3} \approx 1{,}7$ und $\frac{3}{2}\sqrt{11} \approx 5{,}0$.

Ermitteln Sie ferner die Abszissen gemeinsamer Punkte der Kurven k_1 und k_2, wenn die Kurve k_2 so in Mittelpunktslage im gewählten Koordinatensystem liegt, daß ihre beiden Brennpunkte auf der x-Achse liegen.

Bedingt durch die tägliche Drehung der Erde um ihre Achse beschreibt die Sonne im Laufe ein und desselben Tages scheinbar eine Kreisbahn. Die Sonnenstrahlen, die durch die Spitze eines lotrecht zur Horizontalebene des Geländes errichteten Stabes verlaufen, liegen auf dem Mantel eines Kegels (vgl. Skizze). Dieser Kegel wird von der Horizontalebene des Geländes geschnitten.
Öffnungswinkel α des Kegels und Neigungswinkel φ der Kegelachse zur Geländeebene sind abhängig vom Datum bzw. dem gewählten Standort des Stabes.



(Skizzen nicht maßstäblich)

c) Beschreiben Sie qualitativ die Form aller unter diesen Umständen möglichen Kurven (k), auf welchen sich der Schatten der Spitze des Stabes jeweils im Laufe ein und desselben Tages auf der Geländeebene bewegen kann. Führen Sie dazu eine vollständige Fallunterscheidung durch, wenn mit hinreichender Genauigkeit gelte: $132° \le \alpha < 180°$; $0° \le \varphi \le 90°$.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{8}x^4 - a \cdot x^3 + \frac{27}{8}$, $x, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$f_a'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3ax^2$; $f_a''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6ax$; $f_a'''(x) = 3x - 6a$

a) Extrempunkte:

$f_a'(x) = 0$, also $0 = \frac{1}{2}x^3 - 3ax^2 = x^2(\frac{1}{2}x - 3a) \Rightarrow x_{E_1} = 0; x_{E_2} = 6a$ sind mögliche Extremstellen.
Art der lokalen Extrempunkte:

$f_a''(0) = \frac{3}{2} \cdot 0^2 - 6a \cdot 0 = 0$ (Für die Stelle $x_{E_1} = 0$ erfolgt weitere Untersuchung bei Betrachtung der Wendepunkte.)

$f_a''(6a) = \frac{3}{2}(6a)^2 - 6a \cdot 6a = \frac{1}{2}(6a)^2 = 18a^2$

Wegen $a^2 > 0$ für alle $a \neq 0$ (s.o.) liegt an der Stelle $x_{E_2} = 6a$ ein Tiefpunkt mit den Koordinaten $T_a(6a \mid f_a(6a)) = T_a(6a \mid -54a^4 + \frac{27}{8})$ vor.

Wendepunkte:

$f_a''(x) = 0$, also $0 = \frac{3}{2}x^2 - 6ax = x(\frac{3}{2}x - 6a) \Rightarrow x_{W_1} = 0; x_{W_2} = 4a$ sind mögliche Wendestellen.
Prüfen der Wendepunkteigenschaft:
$f_a'''(0) = 3 \cdot 0 - 6a = -6a$; wegen $a \neq 0$ gilt stets $f_a'''(0) \neq 0$,
$f_a'''(4a) = 3 \cdot 4a - 6a = 6a$; wegen $a \neq 0$ gilt stets $f_a'''(4a) \neq 0$

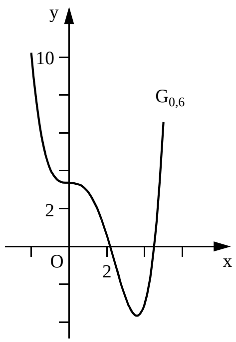
$\Rightarrow W_1(0 \mid \frac{27}{8})$ (Horizontalwendepunkt wegen fa'(0) = fa''(0) = 0) und

$W_2(4a \mid -32a^4 + \frac{27}{8})$.

Werte des Parameters a für den Fall, daß nur eine Nullstelle existiert:
Die Funktionen der Schar f_a besitzen genau eine Nullstelle, wenn der Tiefpunkt $T_a(6a \mid f_a(6a))$ auf der x-Achse liegt, also:

$f_a(x_{E_2}) = -54a^4 + \frac{27}{8} = 0 \Rightarrow -16a^4 + 1 = 0$ und damit $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = +\frac{1}{2}$.

Graph für a = 0,6:



$f_{0,6}$ besitzt genau zwei Nullstellen, weil $f_{0,6}(x)$ als ganzrationale Funktion in $\mathbb{R}$ stetig ist, $f_{0,6}(x_E) < 0$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_{0,6}(x) = +\infty$ und kein weiterer Extrempunkt existiert.
Oder:
$f_{0,6}$ monoton fallend für $x < x_E$ wegen $f'_{0,6}(x_E) \leq 0$ für $x < x_E$, $f_{0,6}$ monoton steigend für $x > x_E$ wegen $f'_{0,6}(x_E) > 0$ für $x > x_E$ und $f_{0,6}(x_E) < 0$.

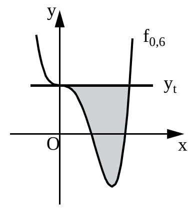
b) Wendetangente mit gegebenen Bedingungen:

Nach Lösungsteil a) ist $W_1(0 \mid \frac{27}{8})$ ein (von a unabhängiger) Horizontalwendepunkt, d.h., es gilt: $m_t = f_a'(0) = 0$, also verläuft die zugehörige Wendetangente parallel zur x-Achse.
Es existiert keine weitere Tangente, die den gestellten Bedingungen genügt, weil im Punkt $W_2(4a \mid f_a(4a))$ $m_t = f_a'(4a) = \frac{1}{2}(4a)^3 - 3a(4a)^2 = -16a^3 \neq 0 \; (a \neq 0)$ gilt, d.h., die Wendetangente verläuft nicht parallel zur x-Achse.

Gleichung der gesuchten Tangente t: $y = \frac{27}{8}$

Maßzahl des Rotationsvolumens des vorgegebenen Körpers:

$$V = \pi \int_a^b [y_t - f_{0,6}(x)]^2 \, dx$$ mit den Integrationsgrenzen



$a = 0$ und $b = \frac{24}{5}$ wegen $f_{0,6}(x) = y_t$, d.h.

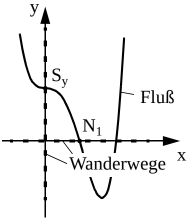
$$\frac{1}{8}x^4 - 0{,}6x^3 + \frac{27}{8} = \frac{27}{8} \;\Rightarrow\; x^3\left(\frac{1}{8}x - 0{,}6\right) = 0,$$

also $x_1 = a = 0$ und $x_2 = b = 0{,}6 \cdot 8 = \frac{24}{5}$.

$$V = \pi \int_0^{\frac{24}{5}} \left(0{,}6x^3 - \frac{1}{8}x^4\right)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{24}{5}} \left(0{,}36x^6 - 0{,}15x^7 + \frac{1}{64}x^8\right) dx$$

$$= \pi\left[\frac{0{,}36}{7}x^7 - \frac{0{,}15}{8}x^8 + \frac{1}{64 \cdot 9}x^9\right]_0^{\frac{24}{5} = 4{,}8} \approx 263{,}5$$

c) Es wird zunächst die Entfernung $\left|\overline{ON_1}\right|$ untersucht, d.h. die Nullstelle der Funktion $f_{0,6}(x)$ ermittelt. Mit Hilfe des NEWTONSCHEN Näherungsverfahrens für stetige Funktionen ergibt sich jede neue Näherung aus $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.



Mit $f_{0,6}(x) = \frac{1}{8}x^4 - 0{,}6x^3 + \frac{27}{8}$, $f'_{0,6}(x) = \frac{1}{2}x^3 - 1{,}8x^2$ und $x_1 = 2$ ergeben sich folgende weitere Werte:

i	x_i	$f_{0,6}(x_i)$	$f'_{0,6}(x_i)$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f_{0,6}(x_i)}{f'_{0,6}(x_i)}$
1	2,0	0,575	–3,200	2,1797
2	2,1797	–0,017	–3,374	2,1747 ≈ 2,2

Weil 1 Längeneinheit 100 m entspricht, ist die

- Entfernung $\overline{ON_1} \approx 2{,}2 \cdot 100\text{m} = 220$ m,
- Entfernung $\overline{OS_y} = \frac{27}{8} \cdot 100\text{m} = 337{,}50$ m.

Die kürzeste Entfernung zum Fluß beträgt etwa 220 m.

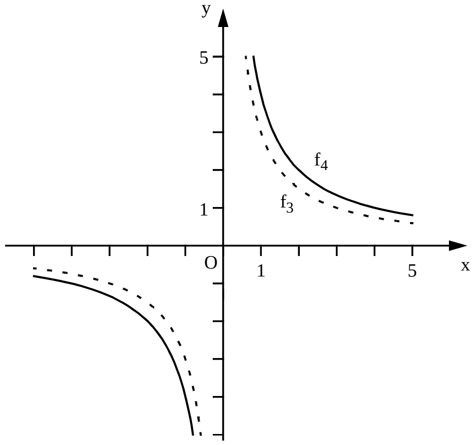
Bewertungsvorschlag:

a)	Untersuchenauf Extrem- und Wendepunkte	11 BE
	Ermitteln der Werte des Parameters a	4 BE
	Zeichnung des Graphen	5 BE
	Nachweisen von genau zwei Nullstellen für $f_{0,6}$	5 BE
b)	Zeigen, daß t existiert	5 BE
	Angeben einer Gleichung für t	1 BE
	Berechnen der Maßzahl des Volumens	7 BE
c)	Berechnen der Entfernung zwischen Kreuzung und Flußlauf	7 BE
		45 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{a}{x} = ax^{-1}$, $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, a \in \mathbb{N}, a \neq 0$.

a) Graphen von $f_3(x)$ und $f_4(x)$:



Gleichung der Tangente an Graphen von f_4 in Q(2 | 2):

Geradengleichung allgemein: $\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = f_4'(x_Q)$;

mit $x_Q = y_Q = 2$ und $f_4'(2) = 4 \cdot (-1) \cdot 2^{-2} = -1$ folgt

$\frac{y-2}{x-2} = -1 \Rightarrow t_4$: $y = -x + 4$.

Berührungspunkt einer Tangente t_3 an den Graphen von f_3, wobei $t_3 \parallel t_4$:

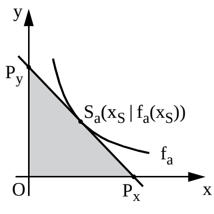
$m_3 = f_3'(x_R) = -1$, also $-1 = 3 \cdot (-1) \cdot x^{-2} \Rightarrow x^2 = 3$ und somit

$x_R = +\sqrt{3}$ ($x_R = -\sqrt{3}$ entfällt, da nicht im I. Quadranten).

Koordinaten des Berührungspunktes R: $R(\sqrt{3} \mid \sqrt{3})$

Maßzahl für Dreiecksflächeninhalt:

Gleichung für Tangente in S_a: $\frac{y - f_a(x_S)}{x - x_S} = f_a'(x_S)$



$$\frac{y - \frac{a}{x_S}}{x - x_S} = -a \cdot \frac{1}{x_S^2}\text{, also}$$

$$y = -\frac{a}{x_S^2}(x - x_S) + \frac{a}{x_S} = -\frac{a}{x_S^2}x + 2\frac{a}{x_S}$$

Schnittpunkte der Tangente mit den Koordinatenachsen:

y-Achse: $P_y(0 \mid 2\frac{a}{x_S})$

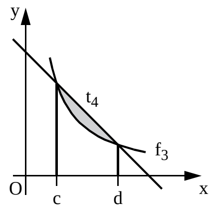
x-Achse: Aus $0 = -\frac{a}{x_S^2}x + 2\frac{a}{x_S}$ folgt $x = 2x_s$, also $P_x(2x_s \mid 0)$.

Flächeninhalt des Dreiecks OP_xP_y:

$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{OP_x}\right| \cdot \left|\overline{OP_y}\right| = \frac{1}{2} \cdot 2x_s \cdot 2 \cdot \frac{a}{x_S} = 2a$

A ist also unabhängig von den Koordinaten des Berührungspunktes S_a.

b) Maßzahl des Flächeninhalts:



$A = \int_c^d [t_4 - f_3(x)]\,dx$, wobei c, d die x-Werte der Schnittpunkte von t_4 und G_3:

$t_4 = f_3(x) \Rightarrow -x + 4 = \frac{3}{x}$, also $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow x_{S_{1,2}} = 2 \pm \sqrt{4-3}$, d.h. $x_{S_1} = c = 1$ und $x_{S_2} = d = 3$

$A = \int_1^3 (-x + 4 - \frac{3}{x})\,dx = [-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3\ln x]_1^3$

$= -\frac{9}{2} + 12 - 3\ln 3 - (-\frac{1}{2} + 4 - 3 \cdot 0) = 4 - 3\ln 3 \approx 0{,}704$

Maßzahl des Volumens für den angegebenen Rotationskörper:

$V = V_1 - V_2 = \pi[\int_c^d (t_4)^2\,dx - \int_c^d [f_3(x)]^2\,dx]$ mit c = 1 und d = 3

$V = \pi[\int_1^3 (-x + 4)^2\,dx - \int_1^3 (\frac{3}{x})^2\,dx] = \pi[\int_1^3 (x^2 - 8x + 16 - \frac{9}{x^2})\,dx]$

$= \pi[\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x + \frac{9}{x}]_1^3 = \pi(9 - 36 + 48 + 3 - \frac{1}{3} + 4 - 16 - 9)$

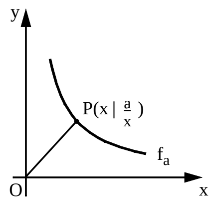
$= \frac{8}{3}\pi \approx 8{,}38$

c) (*Hinweis:* Der nachfolgende Rechenaufwand verringert sich, wenn man die Extremwertberechnung für die Funktion $q(x) = (d(x))^2 = x^2 + \frac{a^2}{x^2}$ durchführt.)

$d(x) = \left|\overline{OP}\right| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2}$

Für die minimale Entfernung muß gelten: $d'(x) = 0$

$d'(x) = \dfrac{1 \cdot (2x + a^2 \cdot (-2)\,x^{-3})}{2 \cdot \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2}} = 0$, also



$2x - \dfrac{2a^2}{x^3} = 0 \;\Rightarrow\; x^4 - a^2 = 0$ und damit $x^4 = a^2$;

somit kommt als Lösung nur $x_E = \sqrt{a}$ in Betracht (Bedingung $x > 0$).

Prüfen, ob bei $x_E = \sqrt{a}$ minimaler Abstand:

Der Nenner von d'(x) ist stets positiv. Weiter gilt wegen $x > 0$, $a \in \mathbb{N}$ und $a \geq 1$:

$\dfrac{x^4 - a^2}{x^3} < 0$ für $x < \sqrt{a}$ und $\dfrac{x^4 - a^2}{x^3} > 0$ für $x > \sqrt{a}$.

Das Vorzeichen von d'(x) wechselt also beim Überschreiten von $x = \sqrt{a}$ von „–" nach „+". Es handelt sich um ein lokales Minimum.

Weiterer Lösungsweg:

$$d'(x) = \frac{x - \frac{a^2}{x^3}}{\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{x^2}}}\;;\; d''(x) = \frac{(1 - a^2\,(-3)\,x^{-4})\,\sqrt{x + \frac{a^2}{x^3}} - \left(x - \frac{a^2}{x^3}\right) \cdot \frac{1\left(2x - \frac{2a^2}{x^3}\right)}{2\sqrt{x^2 + a^2x^{-2}}}}{x^2 + \frac{a^2}{x^2}}\;;$$

$d''(x_E) = d''(\sqrt{a}\,) = \dfrac{2\sqrt{2a}}{a} > 0$ (wegen $a > 0$, $a \in \mathbb{N}$), d.h., an der Stelle $x_E = \sqrt{a}$ liegt eine minimale Entfernung zum Ursprung vor. Das lokale Minimum $x_E = \sqrt{a}$ ist auch das globale Minimum, da an den Intervallgrenzen das lokale Minimum nicht unterschritten wird: Für $x \to 0$ wie auch $x \to +\infty$ gehen die Abstände $d(x) \to \infty$.

Punkt P in Abhängigkeit vom Parameter a: $P(\sqrt{a} \mid \sqrt{a}\,)$

Bewertungsvorschlag:

a)	Zeichnen von G_3 und G_4	4 BE
	Aufstellen einer Gleichung für t_4	3 BE
	Berechnen der Koordinaten von R	4 BE
	Nachweisen der Unabhängigkeit von den Koordinaten von S_a	8 BE
b)	Maßzahl des Inhalts der Fläche	8 BE
	Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers	8 BE
c)	Nachweisen der Existenz und der Eindeutigkeit des Punktes	9 BE
	Koordinaten des Punktes	1 BE
		45 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

Ebenenschar E_a: $ax_1 + (2 + 3a)x_2 - x_3 + 8 + 4a = 0$,

Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, Punkte $A(10\,|\,-8\,|\,6)$, $B(2\,|\,0\,|\,2)$

a) Ebene F aus der Schar E_a:
Wenn B in E_a liegt, dann gilt:
$a \cdot 2 + (2 + 3a) \cdot 0 - 2 + 8 + 4a = 0$, also $2a + 6 + 4a = 0 \Rightarrow\ a = -1$
$\Rightarrow F = E_{-1}$: $-x_1 - x_2 - x_3 + 4 = 0$

Koordinatengleichung der Ebene $\overline{F}$:

Normalenvektor von F: $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene $\overline{F}$ mit drei Bedingungen:
(1) F orthogonal zu F,
(2) $B \in \overline{F}$,
(3) $A \in \overline{F} \quad \Rightarrow$

$\overline{F}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\overrightarrow{n_F} + s\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

Normalenvektor für die Ebene $\overline{F}$: $\overrightarrow{n_{\overline{F}}} = \overrightarrow{n_F} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung für $\overline{F}$:

$\overrightarrow{n_{\overline{F}}} \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} = 0$

$\overline{F}$: $-3(x_1 - 2) - x_2 + 4(x_3 - 2) = -3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = 0$
$\Rightarrow$ Koordinatengleichung für $\overline{F}$: $-3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = 0$

Weiterer Lösungsweg:

$\overrightarrow{n_{\overline{F}}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \overline{F}$: $-3x_1 - x_2 + 4x_3 + d = 0$,
da (z.B.) $A \in \overline{F}$: $-30 + 8 + 24 + d = 0 \ \Rightarrow\ d = -2$

b) Wenn g in jeder Ebene E_a liegt, dann muß gelten:
(1) Der Punkt $P(-1\,|\,-1\,|\,6)$ auf g liegt in E_a.
Nachweis:
$a(-1) + (2 + 3a) \cdot (-1) - 6 + 8 + 4a = -a - 2 - 3a - 6 + 8 + 4a = 0$
Wahre Aussage, also gilt $P \in E_a$.

(2) Der Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Geraden g und der Normalenvektor der Ebene $\overrightarrow{n_{E_a}}$ stehen senkrecht aufeinander:

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_{E_a}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2+3a \\ -1 \end{pmatrix} = -3a + 2 + 3a - 2 = 0, \text{ also } \vec{a} \perp \overrightarrow{n_{E_a}} \;\Rightarrow\; \vec{a} \parallel E_a$$

Da $P \in E_a$ und $\vec{a} \parallel E_a$, liegt die Gerade g in jeder Ebene der Schar E_a.

Weiterer Lösungsweg:
Wenn g in jeder Ebene der Schar E_a liegt, muß die Gleichung von g die Gleichung von E_a erfüllen:

$a(-1 - 3t) + (2 + 3a)(-1 + t) - (6 + 2t) + 8 + 4a =$

$= -a - 3at - 2 + 2t - 3a + 3at - 6 - 2t + 8 + 4a = 0$ Wahre Aussage

c) Gleichung für eine Kugel K:

Kugelgleichung allgemein: K: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$

$\vec{m} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$; $r = \sqrt{62} \;\Rightarrow\;$ K: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 6)^2 = 62$

Lage der Punkte B und A:
Die Lage der Punkte bezüglich der Kugel ergibt sich aus den jeweiligen Abständen von B bzw. A vom Mittelpunkt der Kugel:

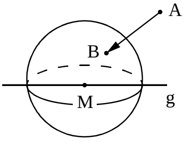
$$\left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-0)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{26} < r$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(-1-10)^2 + (-1+8)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{170} > r$$

B kann bei bestimmter Spiegelstellung in der Spiegelfläche liegen, A niemals.

d) Koordinaten der Randpunkte des Spiegels:

Die gesuchten Randpunkte der Spiegelfläche sind die Durchstoßpunkte der Geraden h(A, B) durch die Kugel K:



h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

h in K einsetzen:

$(2 + 8r + 1)^2 + (0 - 8r + 1)^2 + (2 + 4r - 6)^2 = 62$

$\Leftrightarrow$ $(3 + 8r)^2 + (1 - 8r)^2 + (4r - 4)^2 = 62$

$\Leftrightarrow$ $9 + 48r + 64r^2 + 1 - 16r + 64r^2 + 16r^2 - 32r + 16 = 62$

$\Leftrightarrow$ $144r^2 - 36 = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - \frac{1}{4} = 0$, also $r_1 = \frac{1}{2}$ und $r_2 = -\frac{1}{2}$

Randpunkte: $R_1(6 \mid -4 \mid 4)$ und $R_2(-2 \mid 4 \mid 0)$

Gradmaß für Einfallswinkel:
Wird der einfallende Strahl im Punkt B reflektiert, so ist die Spiegelebene durch die in a) bestimmte Ebene $F = E_{-1}$ gekennzeichnet.

Normalenvektor der Spiegelebene: $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektor des Einfallstrahls: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

Der Einfallswinkel α ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\overrightarrow{n_F}$ und $\vec{v}$:

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{n_F}\,;\,\vec{v}) = \left|\frac{\overrightarrow{n_F}\cdot\vec{v}}{\left|\overrightarrow{n_F}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}\right| = \left|\frac{-8+8-4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{144}}\right| = \left|\frac{-4}{\sqrt{3}\cdot 12}\right| = \left|\frac{-\sqrt{3}}{9}\right|$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{n_F}\,;\,\vec{v}) = 78{,}9°$$

Reflektierter Strahl durch Punkt $D(-6\,|\,-16\,|\,0)$:
Nach dem Reflexionsgesetz muß gelten:

(1) $\alpha = \alpha' = \sphericalangle(\overrightarrow{n_F}\,;\,\overrightarrow{BD})$, d.h.:

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{n_F}\,;\,\overrightarrow{BD}) = \left|\frac{\overrightarrow{n_F}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{n_F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}\right|, \text{ wobei } \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{n_F}\,;\,\overrightarrow{BD}) = \left|\frac{-8+16-2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{324}}\right| = \frac{6}{\sqrt{3}\cdot 18} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{n_F}\,;\,\overrightarrow{BD}) = 78{,}9° = \alpha$$

(2) Einfallender Strahl, reflektierter Strahl und Einfallslot müssen in ein und derselben Ebene liegen:
Gemäß Teil a) ist die Ebene $\overline{F}$ senkrecht zu F und enthält die Punkt A und B. Also ist noch zu zeigen, daß $D \in \overline{F}$.
Koordinaten von D in Gleichung für $\overline{F}$ einsetzen:
$(-3)\cdot(-6) - 16 + 4\cdot 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow 18 - 16 + 0 - 2 = 0$

Aus der Gültigkeit von (1) und (2) folgt: Der reflektierte Strahl trifft den Punkt D.

e) Der Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (parallel zur x_3-Achse) und der Normalenvektor der gesuchten Ebene E_a müssen linear abhängig sein:

$$u\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2+3a \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -8u & = a \\ 8u & = 2+3a \\ -4u + w = -1 & \end{array} \right. \quad -a = 2 + 3a \;\Rightarrow\; a = -\tfrac{1}{2}$$

Mit $a = -\frac{1}{2}$ sind $u = \frac{1}{16}$ und $w = -\frac{3}{4}$. Für die gesuchte Ebene E_a gilt:

$$E_{-\frac{1}{2}}: -\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 + 6 = 0$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Ermitteln der Ebene F	2 BE
	Koordinatengleichung der Ebene $\overline{F}$	5 BE
b)	Nachweisen, daß g in allen Ebenen E_a enthalten ist	3 BE
c)	Kugelgleichung	1 BE
	Nachweisen der Eigenschaften für die Punkte A und B	2 BE
d)	Koordinaten der Randpunkte	6 BE
	Gradmaß des Einfallswinkels α	3 BE
	Prüfen, ob reflektierter Strahl den Punkt D trifft	4 BE
e)	Ermitteln der Ebene, in der die genannte Spiegelfläche liegt	4 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

Punkte: $A(0\,|\,0)$, $B(\frac{64}{7}\,|\,\frac{48}{7})$ und $C(-\frac{125}{7}\,|\,\frac{300}{7})$

Geradenschar g_a: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 2a \\ -7a^2 + 33a - 14 \end{pmatrix}$, $a, t \in \mathbb{R}$

a) Sämtliche Geraden gehen durch $O(0\,|\,0)$, sind also Ursprungsgeraden:

g_4: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 8 \\ -7\cdot 16 + 33\cdot 4 - 14 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, d.h. $m = \frac{a_y}{a_x} = \frac{3}{4}$, also

g_4: $y = \frac{3}{4}x$;

g_5: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 10 \\ -7\cdot 25 + 33\cdot 5 - 14 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 10 \\ -24 \end{pmatrix}$, d.h. $m = -\frac{24}{10}$, also

g_5: $y = -\frac{12}{5}x$.

Lage der Punkte A, B und C bezüglich g_4 und g_5:

Punkt A(0 | 0): Weil sämtliche Geraden Ursprungsgeraden sind, gilt $A \in g_4$ und $A \in g_5$.

Punkt $B(\frac{64}{7} \mid \frac{48}{7})$: Prüfen, ob $B \in g_4$:
$\frac{48}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{64}{7}$ – wahre Aussage, d.h. $B \in g_4$ und $B \notin g_5$, weil sämtliche Geraden der Schar nur einen Punkt (0 | 0) gemeinsam haben.

Punkt $C(-\frac{125}{7} \mid \frac{300}{7})$: Prüfen, ob $C \in g_5$ (wegen des Vorzeichenwechels bei x_C, y_C):
$\frac{300}{7} = -\frac{12}{5} \cdot (-\frac{125}{7})$ – wahre Aussage, d.h.
$C \in g_5$ und $C \notin g_4$.

b) Gleichung für Gerade g(B, C):

$$g(B, C): \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{64}{7} \\ \frac{48}{7} \end{pmatrix} + s^* \begin{pmatrix} \frac{-189}{7} \\ \frac{252}{7} \end{pmatrix} = \frac{16}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Weiterer Lösungsweg:

$$g: \frac{y - \frac{48}{7}}{x - \frac{64}{7}} = \frac{\frac{300}{7} - \frac{48}{7}}{-\frac{125}{7} - \frac{64}{7}} = -\frac{252}{189} = -\frac{4}{3}$$

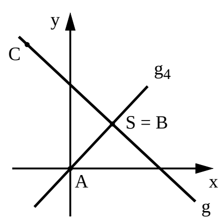
$$y - \frac{48}{7} = -\frac{4}{3}x + \frac{256}{21} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{400}{21}$$

Begründung für die Lage des Spiegelpunktes A':

Richtungsvektor der Geraden g(B, C): $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

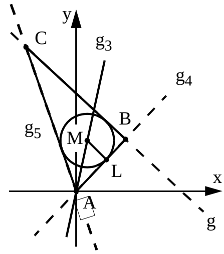
d.h. $m_{g(B,\,C)} = -\frac{4}{3}$.

Wegen $m_{g(B,\,C)} \cdot m_{g_4} = -1$ gilt: $g_4 \perp g(B, C)$.
Da $g_4 \perp g(B, C)$, A auf g_4 liegt und an g(B, C) gespiegelt werden soll, muß A' auch auf g_4 liegen.
S bezeichnet den Schnittpunkt von g(B, C) mit g_4.
Weil $B \in g_4$ (siehe a)), gilt: S = B.



Folglich ist $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OB}$ und somit folgt: $A'(\frac{128}{7} \mid \frac{96}{7})$.

c) g_3 ist Winkelhalbierende im Dreieck ABC:
Weil jede Gerade der Schar durch den Ursprung geht und A im Ursprung liegt, ist g_3 die Winkelhalbierende des Winkels BAC.



Es gilt für g_3:

g_3: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 6 \\ -7\cdot 9 + 33\cdot 3 - 14\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 6 \\ 22\end{pmatrix} = t^*\begin{pmatrix} 3 \\ 11\end{pmatrix}$, d.h. $y = \frac{11}{3}x$

$g(A, B) = g_4$, $g(A, C) = g_5$

Zu zeigen ist: $\sphericalangle(g_3; g(A, B)) = \sphericalangle(g_3; g(A, C))$

Für die Richtungsvektoren der drei Geraden gilt:

$\overrightarrow{a_{g_3}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b_{g_4}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c_{g_5}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12\end{pmatrix}$

Dann ist

(1) $\cos\sphericalangle(g_3; g_4) = \frac{3\cdot 4 + 11\cdot 3}{\sqrt{130}\cdot\sqrt{25}} = \frac{9}{\sqrt{130}}$ $(\sphericalangle(g_3; g_4) \approx 37{,}9°)$,

(2) $\cos\sphericalangle(g_3; g_5) = \frac{3\cdot(-5) + 11\cdot 12}{\sqrt{130}\cdot\sqrt{169}} = \frac{9}{\sqrt{130}}$ $(\sphericalangle(g_3; g_5) \approx 37{,}9°)$.

Da g_3 durch A verläuft und $\sphericalangle(g_3; g_4) = \sphericalangle(g_3; g_5)$, ist g_3 Winkelhalbierende im Dreieck ABC.

Gleichung für den Inkreis des Dreiecks ABC mit $r = 5$:

Mittelpunkt M des Inkreises muß auf g_3 liegen, also: $M(x_M \mid \frac{11}{3}x_M)$ mit $x_M > 0$.

L sei der Lotfußpunkt von M auf g_4, der Abstand $\left|\overrightarrow{LM}\right| = r = 5$ mit $L(x_L \mid \frac{3}{4}x_L)$

$\Rightarrow \overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} x_M - x_L \\ \frac{11}{3}x_M - \frac{3}{4}x_M\end{pmatrix}$.

Da $g(B, C) \perp g_4$ und $\overrightarrow{LM} \perp g_4$ folgt: $g(B, C) \parallel \overrightarrow{LM}$, d.h. $\begin{pmatrix} x_M - x_L \\ \frac{11}{3}x_M - \frac{3}{4}x_M\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -3 \\ 4\end{pmatrix}$.

Aus $\left|\overrightarrow{LM}\right| = 5$ ergibt sich $k = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot 5 = 1$. Daraus folgt:

(I) $\quad x_M - \quad x_L = -3 \quad\Rightarrow$ (I') $\quad x_L = x_M + 3$

(II) $\frac{11}{3}x_M - \frac{3}{4}x_L = 4.$

(I') in (II): $\frac{3}{4}(x_M + 3) - \frac{11}{3}x_M = -4$

$9x_M + 27 - 44x_M = -48 \;\Rightarrow\; -35x_M = -75$, also $x_M = \frac{15}{7}$

$\Rightarrow y_M = \frac{11}{3}x_M = \frac{55}{7}$

Weiterer Lösungsweg:

g_4: $-3x + 4y = 0$;

$d(g_4; M) = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}(-3x_M + 4y_M) = 5$, also $-3x_M + 4\cdot\frac{11}{3}x_M = 25$

$\Rightarrow \frac{35}{3}x_M = 25$, also $x_M = \frac{15}{7}$.

Der Inkreis hat den Mittelpunkt $M(\frac{15}{7} \mid \frac{55}{7})$, und die Kreisgleichung lautet:

$k: (x - \frac{15}{7})^2 + (y - \frac{55}{7})^2 = 25$

Verhältnis der Flächeninhalte von Inkreis und Dreieck:

ΔABC rechtwinklig $\Rightarrow A_\Delta = \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|$ mit

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(\frac{64}{7}\right)^2 + \left(\frac{48}{7}\right)^2} = \frac{80}{7}$ (LE); $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{\left(\frac{189}{7}\right)^2 + \left(\frac{252}{7}\right)^2} = 45$ (LE)

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{80}{7} \cdot 45$ (FE)

Für den Inkreis gilt: $A_O = 25\pi$ (FE)

Daraus folgt: $\frac{A_O}{A_\Delta} = \frac{25\pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{80}{7} \cdot 45} = \frac{7\pi}{72} \approx \frac{31}{100}$

Bewertungsvorschlag:

a)	Normalform der Geradengleichung für g_4 und g_5	3 BE
	Prüfen der Lage der Punkte A, B und C auf den Geraden	3 BE
b)	Gleichung der Geraden BC	3 BE
	Begründen, daß der Punkt A' auf g_4 liegt	3 BE
	Koordinaten von A'	2 BE
c)	Nachweisen, daß g_3 Winkelhalbierende des Dreiecks ist	6 BE
	Gleichung des Inkreises	6 BE
	Verhältnis der Flächeninhalte	4 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.1

a) Grobe Wertung:

Relative Häufigkeit für das Lösen der Aufgabe 1: $h_A = \frac{327}{600} = 0{,}545$

Relative Häufigkeit für das Lösen der Aufgabe 2: $h_B = \frac{290}{600} = 0{,}48\overline{3}$

Die relativen Häufigkeiten (und damit die prozentualen Anteile) richtiger Lösungen sind annähernd gleich.

Nachweis der Abhängigkeit beider Ereignisse:

$P(A \cap B) = \frac{116}{600} = 0{,}19\overline{3}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{327}{600} \cdot \frac{290}{600} = 0{,}545 \cdot 0{,}48\overline{3} \approx 0{,}2634 \neq P(A \cap B)$

A und B sind also voneinander abhängige Ereignisse.

b) Nachweis der Zulässigkeit einer Normalverteilung als Näherung:
X: Anzahl der Personen, die die Aufgaben 1 und 2 nicht gelöst haben
$n = 600;\ p = 0,15$
Zu zeigen: $np(1-p) > 9$
$np(1-p) = 600 \cdot 0,15 \cdot (1-0,15) = 76,5 > 9$
Die Näherung ist also zulässig.

Wahrscheinlichkeit, daß höchstens 100 Personen beide Aufgaben nicht lösen:

Allgemein: $P(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$

$\mu = np = 600 \cdot 0,15 = 90$ und $\sigma = \sqrt{np\,(1-p)} \approx 8,746$

$P(X \le 100) \approx \Phi\left(\frac{100-90}{8,746}\right) \approx \Phi(1,14) \approx 0,873$

c) Alternativtest für $n = 10$
Hypothese H_0: $p_0 = 0,4$ für die Ereignisse A und B, mit einem Annahmebereich für $H_0(p_0)$ bei $k \ge 3$, also $AN = \{3; 4; \ldots; 10\}$.
Für $k \le 2$ wird die Hypothese H_1: $p_1 = 0,3$ akzeptiert, also Ablehnungsbereich für $H_0(p_0)$: $\overline{AN} = \{0; 1; 2\}$.

Fehler 1. Art: H_0 ist wahr, wird jedoch abgelehnt:
$B_{10;\,0,4}(\{0; 1; 2\}) \approx 0,16729 \approx 17\%$

Fehler 2. Art: H_1 ist wahr, wird jedoch abgelehnt, d.h. H_0 wird nicht abgelehnt:
$B_{10;\,0,3}(\{3; 4; \ldots; 10\}) = 1 - B_{10;\,0,3}(\{0; 1; 2\}) \approx 1 - 0,38278$
$\approx 0,61722 \approx 62\%$

Überprüfung für $m = 400$:
$m = 400$ Versuchspersonen; Hypothese H_0: $p_0 \le 0,4$
Signifikanztest mit Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$

Ablehnung von H_0, wenn relative Häufigkeit $h_m > p_0 + c_\alpha^* \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{m}}$, wobei

$\Phi(c_\alpha^*) = 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow c_\alpha^* = 1,64$ (siehe Tabelle für $\Phi(x)$).

$\Rightarrow p_0 + c_\alpha^* \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{m}} = 0,4 + 1,64\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{400}} \approx 0,44017$

$h_A = 0,545 > 0,44017$; $h_B = 0,48\overline{3} > 0,4402 \Rightarrow H_0$ wird abgelehnt.

Bewertungsvorschlag:

a)	Grobe Wertung des Untersuchungsergebnisses	3 BE
	Nachweisen, daß A und B abhängig sind	3 BE
b)	Nachweisen einer Normalverteilung als Näherung	4 BE
	Wahrscheinlichkeit, daß im Ereignis C höchstens 100 Personen gezählt werden	4 BE

c)	Annahmebereich; Ablehnungsbereich	2 BE
	Fehler 1. Art	2 BE
	Fehler 2. Art	2 BE
	Überprüfen für m = 400	5 BE
		25 BE

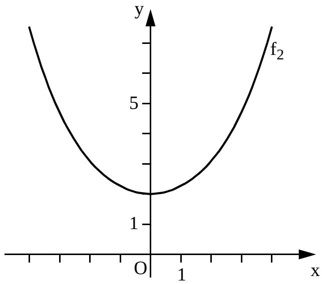
Erwartungsbild zu Aufgabe 3.2

Funktionenschar f_a: $f_a(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

a) Maßzahl des Abstandes jeder Kettenlinie von der x-Achse:

Abstand $d = f_a(0) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{0}{a}} + e^{-\frac{0}{a}}\right) = \frac{a}{2}(2e^0) = a$

Graph von $f_2(x)$:



Symmetrie zur y-Achse:

Spiegelsymmetrie bez. der y-Achse heißt:

$f(x) = f(-x)$, also

$f_a(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

$f_a(-x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{-x}{a}} + e^{-\frac{-x}{a}}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{-\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}\right)$

Damit ist $f_a(x)$ spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse.

b) Bogenlänge $L = \int_c^d \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

Hierbei gilt: $c = -4$, $d = 4$, $f(x) = f_2(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$, $f_2'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

$$L = \int_{-4}^{4} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)\right]^2}\, dx = 2\int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)\right]^2}\, dx \quad \text{(wegen Symmetrie)}$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^x - 2e^{\frac{x}{2}-\frac{x}{2}} + e^{-x}\right)}\, dx = 2\int_0^4 \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 2\int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{e^x + 2 + e^{-x}}\, dx = 2\int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}\, dx = 2\int_0^4 \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) dx$$

$= [2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})]_0^4 = [2(e^2 - e^{-2}) - 2(e^0 - e^0)]$

$= 2(e^2 - e^{-2}) \approx 14{,}5$

c) Annäherung von f_2 durch eine ganzrationale Funktion 2. Grades:

$g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit folgenden Bedingungen:

(1) $f_2(0) = 2 = g(0) = a_0 \Rightarrow a_0 = 2,$

(2) $f_2'(0) = g'(0)$

$f_2'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$; $f_2'(0) = 0$

$g'(x) = 2a_2x + a_1$; $g'(0) = a_1$, also $a_1 = 0$.

(3) $f_2''(0) = g''(0)$

$f_2''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}}$; $f_2''(0) = \frac{1}{2}$

$g''(x) = 2a_2$; $g''(0) = 2a_2$,

d.h. $2a_2 = \frac{1}{2}$, also $a_2 = \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$

Bewertungsvorschlag:

a)	Maßzahl des Abstandes	6 BE
	Nachweisen der Symmetrie	2 BE
	Zeichnung des Graphen	3 BE
b)	Allgemeine Formel für Bogenlänge	2 BE
	Anwenden der Formel auf $f_2(x)$ und Vereinfachung	3 BE
	Integration	3 BE
	Maßzahl der Bogenlänge der Kettenlinie	2 BE
c)	Ermitteln einer Gleichung der Funktion g	4 BE
		25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.3

a) Ermitteln der Parameter des Kegelschnittes:

$8x^2 + y^2 + 24x + 2 = 0$

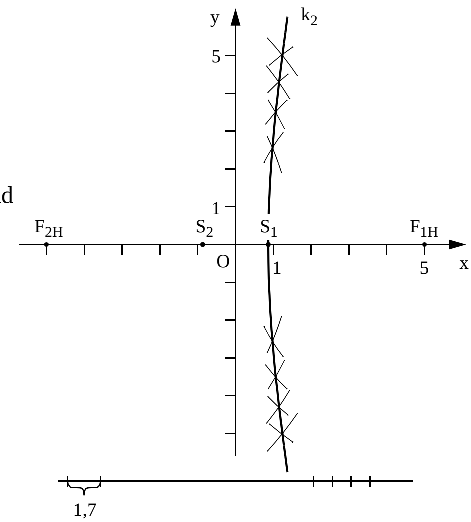
$\Leftrightarrow 8x^2 + 24x + y^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 8(x^2 + 3x) + y^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 8(x + 1{,}5)^2 + y^2 + 2 - 18 = 0$, also $\frac{(x+1{,}5)^2}{2} + \frac{y^2}{16} = 1$.

k_1 ist folglich eine Ellipse mit $a = \sqrt{2}$, $b = 4$,
$M(-1{,}5 \mid 0)$, $e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{14}$, $F_{1E}(-1{,}5 \mid \sqrt{14})$, $F_{2E}(-1{,}5 \mid -\sqrt{14})$.

b) Skizze der vorgegebenen Hyperbel (ein Hyperbelast):
Für k_2 gilt:
$\overline{S_1S_2} = \sqrt{3}$,
$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{3}{2}\sqrt{11}$
$\Rightarrow 2a = \sqrt{3}$, also $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und
$b = 2\sqrt{6}$.



Gemeinsame Punkte der Kurven k_1 und k_2:

k_1: $\frac{(x + 1{,}5)^2}{2} + \frac{y^2}{16} = 1$; k_2: $\frac{x^2}{\frac{3}{4}} - \frac{y^2}{24} = 1$

Durch Umformung erhält man:

(I) $8(x + 1{,}5)^2 + y^2 = 16$

(II) $32x^2 - y^2 = 24$

(I) + (II) $8(x + 1{,}5)^2 + 32x^2 = 40$

Daraus folgt: $8x^2 + 24x + 18 + 32x^2 - 40 = 0$, also $40x^2 + 24x - 22 = 0$

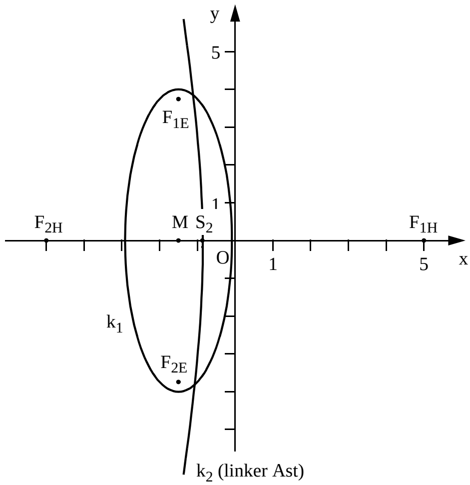
$\Rightarrow x^2 + \frac{6}{10}x - \frac{11}{20} = 0$. Als Lösung ergibt sich:

$x_{1,2} = -\frac{3}{10} \pm \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{55}{100}}$; $x_1 = -\frac{11}{10} = -1{,}1$; $x_2 = \frac{5}{10} = 0{,}5$.

Der Wert $x_2 = 0{,}5$ entfällt, da – wie die Skizze in b) in Verbindung mit den Ellipsenwerten aus a) bzw. die Probe zeigt – für $x = 0{,}5$ keine gemeinsamen Punkte der Hyperbel und der Ellipse existieren.

Gemeinsame Punkte gibt es für $x = -1{,}1$.

.



c) Mit $\frac{\alpha}{2}$ wird der Vergleichswinkel zum Neigungswinkel φ angegeben.

Es gilt für $\frac{\alpha}{2} < \varphi$: Ellipse, $\frac{\alpha}{2} = \varphi$: Parabel und $\frac{\alpha}{2} > \varphi$: Hyperbel,

wobei $\frac{\alpha}{2}$ zwischen 66° und 90° liegen kann.

Für $\varphi < 66°$ ist also nur eine Hyperbel (2 Äste) möglich, für $\varphi = 66°$ kann eine Parabel oder ein Hyperbelast, aber keine Ellipse auftreten, und für $\varphi > 66°$ sind alle drei Fälle möglich.

Bewertungsvorschlag:

a)	Koordinaten des Mittelpunktes, der Scheitel- und Wendepunkte	7 BE
	Art der Ortskurve und Lage im Koordinatensystem	2 BE
b)	Konstruktion eines Astes der Hyperbel	5 BE
	Abszissen gemeinsamer Punkte von k_1 und k_2	5 BE
c)	Qualitative Beschreibung aller Kurven	
	Fall 1: $\varphi < 66°$	1 BE
	Fall 2: $\varphi = 66°$	2 BE
	Fall 3: $\varphi > 66°$	3 BE
		25 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1997 / 98

Gymnasium

Thüringen

Hinweis:
Der Prüfungsteilnehmer hatte von den Aufgaben 1.1 und 1.2 ***eine*** *und von den Aufgaben 2.1 und 2.2 und 2.3* ***zwei*** *zur Bearbeitung auszuwählen.*

Aufgabe 1.1

Für jede reelle Zahl a ($a \neq 0$) ist eine Funktionenschar f_a gegeben durch

$y = f_a(x) = a \cdot (2 - \ln ax) \cdot \ln ax$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich für f_a in Abhängigkeit von a an!

Zeigen Sie, daß $f_a'(x) = \frac{2a}{x}(1 - \ln ax)$ gilt!

Untersuchen Sie den Graphen von $f_a(x)$ auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte!
(Auf den Nachweis für Wendepunkte wird verzichtet.)
Geben Sie gegebenfalls deren Koordinaten an!
Untersuchen Sie für $a > 0$ das Verhalten des Graphen von f_a an den Grenzen seines Definitionsbereiches!

b) Die lokalen Extrempunkte des Graphen aller Funktionen f_a mit $a > 0$ liegen auf einer Kurve.
Geben Sie deren Gleichung an!
Skizzieren Sie diese Kurve sowie die Graphen von f_1 und f_3 im Intervall $0 < x \leq 8$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

c) Weisen Sie nach, daß $F_a(x) = -ax \cdot (\ln ax - 2)^2$ mit $a > 0$ eine Stammfunktion von f_a ist!

Der Graph der Funktion f_a und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Zeigen Sie, daß der Inhalt dieser Fläche von a unabhängig ist!

d) Zeigen Sie, daß es für jede reelle Zahl a ($a \neq 0$) genau zwei Punkte des Graphen der Funktion f_a gibt, in denen die Tangente durch den Koordinatenursprung O verläuft!

e) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t_a an den Graphen von f_a im Punkt

$P(\frac{e^2}{a}\,;\, f_a(\frac{e^2}{a}))$!

f) Berechnen Sie den Abstand der beiden Tangenten t_1 und t_{-1}!

Aufgabe 1.2

Für jede reelle Zahl t ($t \neq 0$) ist eine Funktion f_t gegeben durch

$y = f_t(x) = txe^{-tx+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_t auf Extrem- und Wendepunkte!
Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte!

b) Skizzieren Sie den Graphen von f_1 im Intervall $-1 \leq x \leq 4$ und den Graphen von f_{-1} im Intervall $-4 \leq x \leq 1$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für die n-te Ableitung der Funktion f_t gilt: $f_t^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot t^n \cdot (n - tx) \cdot e^{-tx+1}$ $(n \in \mathbb{N}; n \geq 1)$!

d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Graphen von f_t und f_t'!
Für welches t existiert kein Schnittpunkt?
Alle Schnittpunkte liegen auf einer Kurve.
Geben Sie die Gleichung dieser Kurve an!

e) Für $t > 0$ existiert auf dem Graphen von f_t ein Punkt $P(p; f_t(p))$ mit $p \geq 0$. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch P schneiden diese in den Punkten Q und R.
Berechnen Sie p für den Fall, daß der Flächeninhalt des Rechtecks OQPR maximal wird!
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt in Abhängigkeit von t an!
(Auf Nachweis des globalen Maximums wird verzichtet. O bezeichnet den Koordinatenursprung.)

f) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Graphen von f_1' und f_1''!
Die Graphen von f_1', f_1'' und die y-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie deren Inhalt!

Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind Geraden $g_{a;b}$ durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a; b; t \in \mathbb{R} \text{ sowie}$$

die Punkte $A(1; -1; 1)$, $B(0; 2; -4)$ und $C(4; -3; 2)$ gegeben.

a) Geben Sie eine parameterfreie Gleichung für die Ebene ε an, welche die Punkte A, B und C enthält!
Weisen Sie nach: Die Gerade $g_{2;b}$ ist orthogonal zur Ebene ε !

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S, in dem die Gerade $g_{2;b}$ die Ebene ε schneidet!

c) Weisen Sie nach, daß es kein b ($b \in \mathbb{R}$) gibt, so daß alle Koordinaten des Schnittpunktes S positiv sind!

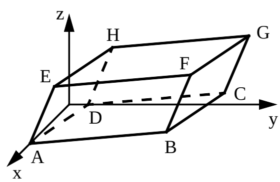
d) Die Gerade $g_{2;b}$ schneidet die y-z-Koordinatenebene in einem Punkt T, der die Spitze einer Pyramide mit den Eckpunkten ABCT bildet.
Das Volumen dieser Pyramide beträgt 7 Volumeneinheiten.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben den Wert des Parameters b!

e) Untersuchen Sie allgemein, für welche a, b ∈ ℝ die folgenden Lagebeziehungen zwischen $g_{a;b}$ und der Ebene ε bestehen:
   (1) $g_{a;b}$ schneidet ε genau in einem Punkt,
   (2) $g_{a;b}$ liegt in der Ebene ε,
   (3) $g_{a;b}$ ist parallel zur Ebene ε und hat mit ε keinen gemeinsamen Punkt!

Aufgabe 2.2

Ein Edelstahlkörper hat die Form eines Spats ABCDEFGH.
Der Spat ist gegeben durch den Punkt A(6; 0; 0) sowie durch die drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte des Spats!

Der Edelstahlkörper wird durch einen Laserstrahl in zwei Teilkörper zerschnitten. Die Schnittebene ε_1 verläuft durch den Mittelpunkt M_1 der Kante $\overline{AB}$, durch den Mittelpunkt M_2 der Kante $\overline{EH}$ sowie durch den Punkt C.

b) Geben Sie eine parameterfreie Gleichung der Schnittebene ε_1 an!

c) Eine Ebene ε_2 wird durch die Punkte A, B und F bestimmt.
   Die Ebenen ε_1 und ε_2 schneiden einander.
   Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden und den Schnittwinkel der beiden Ebenen!

d) Ein vom Punkt U der x-z-Ebene kommender Laserstrahl verläuft in Richtung des Vektors $\overrightarrow{M_1C}$ und trifft im Punkt $S(4; \frac{2}{3}; \frac{8}{3})$ auf die Körperkante $\overline{AE}$.
   Berechnen Sie die Koordinaten das Punktes U!

e) Ein weiterer Laserstrahl, der ebenfalls durch $S(4; \frac{2}{3}; \frac{8}{3})$ verläuft, hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   Überprüfen Sie, ob dieser Laserstrahl das Parallelogramm ABCD im Inneren durchbohrt!

Aufgabe 2.3

Bei der Herstellung von gefärbten Gummibällen treten Farb- und Materialfehler unabhängig voneinander auf. Farbfehler treten bei 2% der hergestellten Menge auf. Nur 90% der produzierten Bälle sind fehlerfrei. Alle produzierten Bälle werden in Kartons zu je 10 Stück verpackt und an Warenhäuser versandt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Karton höchstens ein Ball fehlerhaft ist?

b) In einem Karton befinden sich zwei fehlerhafte Bälle.
Eine Verkäuferin entnimmt diesem Karton zufällig 3 Bälle ohne Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie dabei höchstens einen fehlerhaften Ball entnimmt?

c) Wie viele Kartons sollte das Warenhaus mindestens bestellen, damit spätestens der n-te Karton mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% nur fehlerfreie Bälle enthält?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Tagesproduktion von 100 Kartons mehr als 920 fehlerfreie Bälle vorhanden sind?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Ball genau einen der beiden beschriebenen Fehler?

f) Ein Warenhaus wird von zwei verschiedenen Herstellern beliefert.
Die Lieferung von Hersteller 1 enthält 10% fehlerhafte Bälle, die vom Hersteller 2 enthält 9% fehlerhafte Bälle. Insgesamt stammen ein Drittel aller fehlerhaften Bälle vom Hersteller 1.
Welchen Anteil aller Bälle bezieht das Warenhaus vom Hersteller 1?

g) Ein Vater kauft seinem kleinen Sohn einen solchen Gummiball. Sie werfen damit abwechselnd auf eine aufgestellte Dose. Dabei vereinbaren Sie folgendes Spiel:
Der Vater beginnt. Wenn einer von beiden trifft, ist das Spiel beendet.
Der Vater trifft mit der Wahrscheinlichkeit p.
Der Sohn trifft mit der Wahrscheinlichkeit 1 – p.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Vater?
Für welches p ist das Spiel fair?

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Es muß gelten: $ax > 0$.

$a > 0 \Rightarrow$ Db: $x > 0$, $a < 0 \Rightarrow$ Db: $x < 0$

$$f_a'(x) = a[-\frac{a}{ax} \cdot \ln ax + (2 - \ln ax) \cdot \frac{a}{ax}]$$

$$= a(-\frac{\ln ax}{x} + \frac{2}{x} - \frac{\ln ax}{x}) = \frac{2a}{x}(1 - \ln ax)$$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$0 = f_a(x_0) \Leftrightarrow$ I) $\ln ax_{0_1} = 0$ oder II) $2 - \ln ax_{0_2} = 0$

(I) $\ln ax_{0_1} = 0$, also $x_{0_1} = \frac{1}{a} \Rightarrow P_{x_1}(\frac{1}{a}; 0)$

(II) $2 - \ln ax_{0_2} = 0$, d.h. $\ln ax_{0_2} = 2$ und somit $ax_{0_2} = e^2$, also $x_{0_2} = \frac{e^2}{a}$

$\Rightarrow P_{x_2}(\frac{e^2}{a}; 0)$

Extrempunkte:

$f_a'(x_E) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln ax_E = 0 \quad (\frac{2a}{x} \neq 0$, da $a \neq 0)$

$1 - \ln ax_E = 0$, d.h. $\ln ax_E = 1$, also $x_E = \frac{e}{a}$

$$f_a''(x) = -\frac{2a}{x^2}(1 - \ln ax) + \frac{2a}{x}(-\frac{1}{x}) = \frac{2a}{x^2}(\ln ax - 2)$$

$f_a''(x_E) = f_a''(\frac{e}{a}) = \frac{2a \cdot a^2}{e^2}(\ln a \cdot \frac{e}{a} - 2) = -\frac{2a^3}{e^2}$; $\quad f_a(\frac{e}{a}) = a$, also:

$f_a''(x_E) < 0$ für $a > 0$, d.h. $P_{Max}(\frac{e}{a}; a)$

$f_a''(x_E) > 0$ für $a < 0$, d.h. $P_{Min}(\frac{e}{a}; a)$

Wendepunkte:

$f_a''(x_W) = 0 \Leftrightarrow \ln ax_W - 2 = 0 \quad (\frac{2a}{x^2} \neq 0$, da $a \neq 0)$

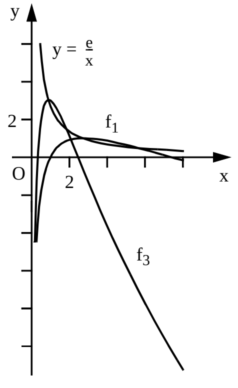
$\ln ax_W - 2 = 0$, also $x_W = \frac{e^2}{a} = x_{0_2} \Rightarrow P_W(\frac{e^2}{a}; 0)$

$a > 0 \Rightarrow$ Db: $x > 0$

$$\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \lim_{x \to \infty} [a(2 - \ln ax) \cdot \ln ax] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f_a(x) = \lim_{x \to 0} [a(2 - \ln ax) \cdot \ln ax] = -\infty$$

Skizze zu b)



b) $a > 0$, $P_{Max}(\frac{e}{a}; a)$

$x = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{x}$, also: $y = a = \frac{e}{x}$

Gleichung der Kurve der Extrempunkte: $y = \frac{e}{x}$, $x > 0$

c) $F_a(x) = -ax \cdot (\ln ax - 2)^2,\ \ a > 0$

$F_a'(x) = -a(\ln ax - 2)^2 - ax \cdot 2(\ln ax - 2) \cdot \frac{1}{x} = (\ln ax - 2)[-a(\ln ax - 2) - 2a]$

$= (\ln ax - 2)(-a\ln ax + 2a - 2a) = a(2 - \ln ax)\ln ax = f_a(x)$

$$A = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e^2}{a}} f_a(x)\,dx = [-ax(\ln ax - 2)^2]_{\frac{1}{a}}^{\frac{e^2}{a}} = -a \cdot \frac{e^2}{a}(\ln e^2 - 2)^2 + (\ln 1 - 2)^2 = 4 \text{ (FE)}$$

A ist konstant, also unabhängig von a.

d) Tangentengleichung: $y = mx$ mit $m = \frac{y_0}{x_0}$; außerdem gilt: $f_a'(x_0) = m$.

$\frac{y_0}{x_0} = f_a'(x_0) \Rightarrow \frac{a(2 - \ln ax_0)\ln ax_0}{x_0} = \frac{2a}{x_0}(1 - \ln ax_0)$

$\Rightarrow 2a - \ln ax_0 - a\ln^2 ax_0 = 2a - 2a\ln ax_0$, also $\ln^2 ax_0 - 4\ln ax_0 + 2 = 0$

Substitution: $\ln ax_0 = z$: $z^2 - 4z + 2 = 0$, also $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$

$\Rightarrow x_{0_1} = \frac{e^{2+\sqrt{2}}}{a},\ \ x_{0_2} = \frac{e^{2-\sqrt{2}}}{a}$

Für beliebiges $a \neq 0$ gibt es jeweils zwei verschiedene x-Werte, also 2 Punkte, in denen die Tangente durch den Ursprung verläuft.

e) $P(\frac{e^2}{a}; 0)$, $f_a'(\frac{e^2}{a}) = -\frac{2a^2}{e^2} = m_t$

Tangente: $y - 0 = -\frac{2a^2}{e^2}(x - \frac{e^2}{a}) = -\frac{2a^2}{e^2}x + 2a$

f) t_1: $y = -\frac{2}{e^2}x + 2$; t_{-1}: $y = -\frac{2}{e^2}x - 2$

Hessesche Normalform von t_1: $\dfrac{\frac{2}{e^2}x + y - 2}{\sqrt{\frac{4}{e^4} + 1}} = 0$

$P(0; -2) \in t_{-1}$ in HNF von t_1, also $d = \left|\dfrac{-2-2}{\sqrt{\frac{4}{e^4}+1}}\right| = \dfrac{4}{\sqrt{\frac{4+e^4}{e^4}}} = \dfrac{4e^2}{\sqrt{4+e^4}}$ (LE)

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1.1	a)	b)	c)	d)	e)	f)
30 BE	12 BE	4 BE	4 BE	4 BE	2 BE	4 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) $f_t'(x) = te^{-tx+1} + tx(-t)e^{-tx+1} = e^{-tx+1}(t - t^2x)$

$f_t''(x) = -te^{-tx+1}(t - t^2x) + e^{-tx+1}(-t^2) = e^{-tx+1}(-2t^2 + t^3x)$

$f_t'''(x) = -te^{-tx+1}(-2t^2 + t^3x) + e^{-tx+1} \cdot t^3 = e^{-tx+1}(3t^3 - t^4x)$

Extrempunkte:

$f_t'(x_E) = 0 \iff t - t^2x_E = 0$ (da $e^{-tx+1} \neq 0$ für $x, t \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow x_E = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$

$f_t''(\frac{1}{t}) = e^0(-2t^2 + t^2) = -t^2 < 0$, also Maximumstelle

$f_t(\frac{1}{t}) = t \cdot \frac{1}{t} \cdot e^0 = 1 \Rightarrow P_{Max}(\frac{1}{t}; 1)$

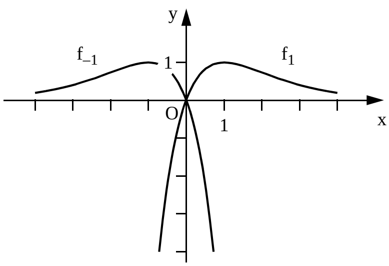
Wendepunkte:

$f_t''(x_W) = 0 \iff -2t^2 + t^3x_W = 0$ (da $e^{-tx+1} \neq 0$ für $x, t \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow x_W = \frac{2}{t}$ $(t \neq 0)$

$f_t'''(\frac{2}{t}) = e^{-1}(3t^3 - 2t^3) = \frac{t^3}{e} \neq 0$, also Wendestelle

$f_t(\frac{2}{t}) = t \cdot \frac{2}{t} \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} \Rightarrow P_W(\frac{2}{t}; \frac{2}{e})$

b)



c) Zu zeigen: $f_t^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot t^n \cdot (n - tx) \cdot e^{-tx+1}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

1. Induktionsanfang:
   $f_t^{(1)}(x) = (-1)^0 \cdot t^1(1 - tx)e^{-tx+1} = e^{-tx+1}(t - t^2x) = f_t'(x)$ wahre Aussage

2.1 Induktionsvoraussetzung für n = k:
   $f_t^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot t^k \cdot (k - tx) \cdot e^{-tx+1}$

2.2 Induktionsbehauptung für n = k + 1:
   $f_t^{(k+1)}(x) = (-1)^k \cdot t^{k+1} \cdot (k + 1 - tx) \cdot e^{-tx+1}$

2.3 Induktionsbeweis:
   $f_t^{(k+1)}(x) = [f_t^{(k)}(x)]' = (-1)^{k-1}t^k[-te^{-tx+1} + (k - tx)e^{-tx+1}(-t)]$
   $= (-1)^{k-1}t^k(-t)[e^{-tx+1}(1 + k - tx)] = (-1)^k \cdot t^{k+1} \cdot (k + 1 - tx) \cdot e^{-tx+1}$
   Übereinstimmung mit 2.2

Aus 1. und 2.3 folgt die Gültigkeit der Aussage für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

d) Schnittpunkt von $f_t(x)$ und $f_t'(x)$:

$tx_S e^{-tx_S+1} = t(1-tx_S)e^{-tx_S+1} \quad | : (te^{-tx_S+1}) \neq 0$

$x_S = 1 - tx_S$, d.h. $x_S = \frac{1}{1+t}$; $y_S = t \cdot \frac{1}{1+t}\, e^{-t\cdot\frac{1}{1+t}+1} = \frac{t}{1+t}\, e^{\frac{1}{1+t}}$

$\Rightarrow S(\frac{1}{1+t};\ \frac{t}{1+t}\, e^{\frac{1}{1+t}})$; für t = –1 existiert kein Schnittpunkt.

Gleichung der Kurve:

$t = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}\ \ (x \neq 0) \ \Rightarrow\ y = \frac{(1-x)\,x}{x}\, e^{\frac{1}{\frac{1}{x}}} = (1-x)e^x$

Gleichung der Kurve der Schnittpunkte: $y = (1-x)e^x$

e) $P(p;\ tpe^{-tp+1})$, $t > 0$, $p \geq 0$

$A(p) = ptpe^{-tp+1} = tp^2e^{-tp+1}$

$A'(p) = t(2pe^{-tp+1} - tp^2e^{-tp+1}) = te^{-tp+1}(2p - tp^2)$

$A''(p) = t[-te^{-tp+1}(2p-tp^2) + e^{-tp+1}(2-2tp)] = te^{-tp+1}(2 - 4tp + p^2t^2)$

Flächeninhalt maximal: $A'(p_E) = 0$

$A'(p_E) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2p_E - tp_E^{\,2} = 0$ (da $t > 0$ und $e^{-tx+1} \neq 0$ für alle $x, t \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow p_E(2 - tp_E) = 0$, also $p_{E_1} = 0$ und $p_{E_2} = \frac{2}{t}$

$A''(0) = t \cdot e^1 \cdot 2 > 0 \ \Rightarrow$ lokale Minimumstelle

$A''(\frac{2}{t}) = \frac{t}{e}(2 - 8 + 4) = -\frac{2t}{e} < 0 \ \Rightarrow$ lokale Maximumstelle

$A_{Max} = A(\frac{2}{t}) = \frac{4}{t^2} \cdot t \cdot e^{-t\cdot\frac{2}{t}+1} = \frac{4}{te}$ (FE)

f) Schnittpunkt von $f_1'(x)$ und $f_1''(x)$:

$f_1'(x) = e^{-x+1}(1-x)$, $f_1''(x) = e^{-x+1}(-2+x)$

$f_1'(x) = f_1''(x) \ \Leftrightarrow\ 1 - x_S = x_S - 2$, also $x_S = \frac{3}{2}$

$f_1'(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{3}{2}+1}(1 - \frac{3}{2}) = -\frac{1}{2\sqrt{e}} \ \Rightarrow$ Schnittpunkt: $S(\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2\sqrt{e}})$

Inhalt der Fläche:

$$A = \left|\int_0^{\frac{3}{2}} [f_1'(x) - f_1''(x)]\,dx\right| = \left|[f_1(x) - f_1'(x)]_0^{\frac{3}{2}}\right| = \left|[e^{-x+1}(2x-1)]_0^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$= \left|e^{-\frac{3}{2}+1} \cdot 2 - e^1(-1)\right| = \frac{2}{\sqrt{e}} + e \text{ (FE)}$$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1.2	a)	b)	c)	d)	e)	f)
30 BE	7 BE	3 BE	5 BE	4 BE	6 BE	5 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) $\varepsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ r, s $\in \mathbb{R}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-14\\-7\end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$x_A + 2y_A + z_A = d$, also $1 - 2 + 1 = 0 = d \;\Rightarrow\; \varepsilon\colon x + 2y + z = 0$

$g_{2;b}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\b\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n} \parallel \vec{a}_{g_{2,b}}$; da $\vec{n} \perp \varepsilon \;\Rightarrow\; g_{2;b} \perp \varepsilon$

b) $g_{2;b}\colon \cap\, \varepsilon$: $8 + t + 2(b + 2t) + t = 0$, also $6t = -2b - 8$, d.h. $t = -\frac{b+4}{3}$

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix}8\\b\\0\end{pmatrix} - \frac{b+4}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}20-b\\b-8\\-b-4\end{pmatrix} \;\Rightarrow$ Schnittpunkt: $S(\frac{20-b}{3}; \frac{b-8}{3}; \frac{-b-4}{3})$

c) (I) $20 - b > 0 \;\Rightarrow\; b < 20$
(II) $b - 8 > 0 \;\Rightarrow\; b > 8$
(III) $-b - 4 > 0 \;\Rightarrow\; b < -4$
Widerspruch zwischen (II) und (III), also können nicht alle Koordinaten von S positiv sein.

d) y-z-Koordinatenebene bedeutet: $x = 0$
$0 = 8 + t_T \;\Rightarrow\; t_T = -8$, $y_T = b - 16$, $z_T = -8 \;\Rightarrow\; T(0; b - 16; -8)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix}0\\b-18\\-4\end{pmatrix}$

$V_P = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BT})| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-1 & 3 & 0\\3 & -2 & b-18\\-5 & 1 & -4\end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\,|280 - 14b|$

Wegen $V_P = 7$ gilt:

$280 - 14b_1 = 42$ $\qquad$ $280 - 14b_2 = -42$

$b_1 = 17$ $\qquad$ $b_2 = 23$

Steht den Schülern bei dieser Aufgabe das Spatprodukt nicht zur Verfügung, könnte folgendermaßen gerechnet werden:

Der Abstand T von ε entspricht der Pyramidenhöhe.

Hessesche Normalform von ε: $\frac{x + 2y + z}{\sqrt{1+4+1}} = 0$

$|d_{T,\varepsilon}| = \frac{2b - 32 - 8}{\sqrt{6}} = \frac{2b - 40}{\sqrt{6}}$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-7\\-14\\-7\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{294}$

$V_P = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ABC} \cdot |d_{T,\varepsilon}| = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{294}}{\sqrt{6}} \cdot |2b - 40| = \frac{7}{6}\,|2b - 40| = 7$

$\Rightarrow 2b_1 - 40 = 6$, also $b_1 = 23$; $2b_2 - 40 = -6$, also $b_2 = 17$

e) $g_{a;b}$ schneidet ε in genau einem Punkt, wenn gilt $\vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$, also wenn $\vec{a}$ nicht senkrecht zu $\vec{n}$ und damit g nicht parallel zu ε:

$\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1 + 2a + 1 = 2a + 2 \neq 0$, d.h. $2a \neq -2$, also $a \neq -1$.

(1) $a \neq -1$, b beliebig

Für (2) und (3) gilt also $a = -1$. Liegt $g_{a;b}$ in ε, muß $\begin{pmatrix}4a\\b\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\b\\0\end{pmatrix} \in$ ε sein:

$-4 + 2b = 0$, also $b = 2$.

(2) $a = -1$, $b = 2$

Im Fall (3) muß $-4 + 2b \neq 0$ gelten, also $a = -1$, $b \neq 2$.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.1	a)	b)	c)	d)	e)
15 BE	3 BE	2 BE	2 BE	4 BE	4 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow B(6; 8; 2)$ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow C(0; 10; 2)$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow D(0; 2; 0)$ $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow E(3; 1; 4)$

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow F(3; 9; 6)$

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow G(-3; 11; 6)$

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow H(-3; 3; 4)$

b) $M_1(6; 4; 1)$, $M_2(0; 2; 4)$

$\varepsilon_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ r, s ∈ ℝ; $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Parameterfreie Gleichung: $\varepsilon_1\colon 5x + 3y + 12z = 54$

c) $\varepsilon_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ r, s ∈ ℝ; $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2\colon 5(6 - 3s) + 3(8r + 9s) + 12(2r + 6s) = 54$

$\Rightarrow 48r + 84s = 24$, also $r = \frac{1}{2} - \frac{7}{4}s$

Gleichung der Schnittgeraden:

$$\vec{x_S} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4}s\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel:

$$\cos\sphericalangle(\varepsilon_1; \varepsilon_2) = \cos\sphericalangle(\vec{n_1}; \vec{n_2}) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{178} \cdot \sqrt{42}} = \frac{70}{\sqrt{7\,476}} \Rightarrow \sphericalangle(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \approx 35{,}94°$$

d) $\overrightarrow{M_1C} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U(x_U; 0; z_U)$, $S(4; \frac{2}{3}; \frac{8}{3})$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_U \\ 0 \\ z_U \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{3} = 6t \Rightarrow t = \frac{1}{9}$$

$x_U = 4 + 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{3}$, $z_U = \frac{8}{3} - \frac{1}{9} = \frac{23}{9} \Rightarrow U(\frac{14}{3}; 0; \frac{23}{9})$

e) g_2: Gerade durch $S(4; \frac{2}{3}; \frac{8}{3})$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ebene ABC:

$\varepsilon_3\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $x + 3y - 12z = 6$

$g_2 \cap \varepsilon_3 = P$:

$4 + 3t_{2_S} + 3(\frac{2}{3} - 5t_{2_S}) - 12(\frac{8}{3} + 3t_{2_S}) = 6$, d.h. $-48t_{2_S} = 32$, also $t_{2_S} = -\frac{2}{3}$

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix};\ P(2;\ 4;\ \tfrac{2}{3})$$

Überprüfung, ob P im Parallelogramm ABCD liegt:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 = 6 - 6s \\ 4 = 8r + 2s \\ \frac{2}{3} = 2r \end{matrix}$$

Lösung: $r = \frac{1}{3}$, $s = \frac{2}{3}$

P liegt im Parallelogramm, da $0 < r = \frac{1}{3} < 1$ und $0 < s = \frac{2}{3} < 1$.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.2	a)	b)	c)	d)	e)
15 BE	1 BE	3 BE	5 BE	3 BE	3 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.3

a) $n = 10,\ p = 0{,}1$

$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^9 \approx 0{,}7361$

b) $\dfrac{\binom{2}{0} \cdot \binom{8}{3} + \binom{2}{1} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{14}{15} \approx 0{,}9333$

c) Wahrscheinlichkeit für 1 Ball fehlerfrei: 0,9
Wahrscheinlichkeit für alle Bälle in einem Karton fehlerfrei: $0{,}9^{10}$
Wahrscheinlichkeit für mindestens 1 Ball je Karton fehlerhaft: $1 - 0{,}9^{10}$
Wegen der Unabhängigkeit der Fehler in einzelnen Kartons:
Wahrscheinlichkeit für mindestens je 1 Ball in n Kartons fehlerhaft: $(1 - 0{,}9^{10})^n$
Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Bälle in allen n Kartons:
$1 - (1 - 0{,}9^{10})^n \ge 0{,}9$, d.h. $(1 - 0{,}9^{10})^n \le 0{,}1 \Rightarrow n \ge 5{,}36$
Das Warenhaus muß mindestens 6 Kartons bestellen.

d) 100 Kartons = 1 000 Bälle $\triangleq$ n, $p = 0{,}9$

$np(1-p) = 1\,000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 90 > 9$ Näherung der Binomialverteilung durch Normalverteilung möglich

$\sigma^2 = 90;\quad \mu = 900$

$P(X > 920) = 1 - P(X \le 920) \approx 1 - \Phi\left(\frac{920 - 900 + 0{,}5}{\sqrt{90}}\right)$

$\qquad = 1 - \Phi(2{,}16) \approx 0{,}01539$

e) F: Farbfehler, M: Materialfehler
$p(F) = 0{,}02;\ P(F \cup M) = 0{,}1$ (90% fehlerfrei)
$P(F \cup M) = 0{,}1 = P(F) + P(M) - P(F \cap M)$
$P(F \cap M) = P(F) \cdot P(M)$ wegen Unabhängigkeit
$\Rightarrow 0{,}1 = 0{,}02 + P(M) - 0{,}02 \cdot P(M)$, also $P(M)(1 - 0{,}02) = 0{,}08$
$\Rightarrow P(M) = 0{,}0816$
$P(F \cap \overline{M}) + P(\overline{F} \cap M) = 0{,}02(1 - 0{,}0816) + 0{,}98 \cdot 0{,}0816 = 0{,}0983$

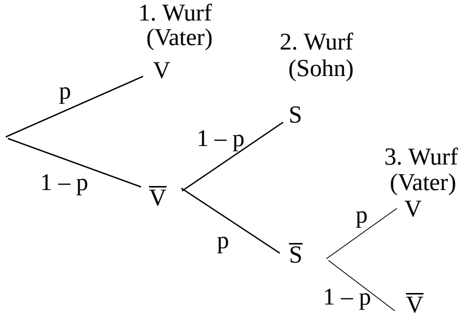
f) F: Ball fehlerhaft, H_1: Ball von Hersteller H_1
p: Wahrscheinlichkeit dafür, daß Ball von H_1

$P_F(H_1) = \frac{P(F \cap H_1)}{P(F)} = \frac{0{,}1 \cdot p}{0{,}1 \cdot p + 0{,}09\,(1-p)} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{0{,}1 \cdot p}{0{,}01 \cdot p + 0{,}09} = \frac{1}{3}$, also $p = \frac{9}{29} \approx 0{,}3103$

Zu demselben Resultat gelangt man bei folgender Überlegung:
Gesamtanteil von Herst. 1: p — fehlerhafte Bälle von Herst. 1: 0,1p
Gesamtanteil von Herst. 2: 1 – p — fehlerhafte Bälle von Herst. 1: 0,09(1 – p)

g) Treffer-Wahrscheinlichkeit Vater: p, Treffer-Wahrscheinlichkeit Sohn: 1 – p
V: Vater gewinnt; S: Sohn gewinnt
$P(V) = p + (1-p) \cdot p \cdot p + (1-p) \cdot p(1-p) \cdot p \cdot p + \ldots$
$\qquad = p + (1-p)p^2 + (1-p)^2 \cdot p^3 + \ldots$
.



Geometrische Reihe mit $a_1 = p$ und $q = p(1-p) < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert

Wegen Grenzwert $s = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$ erhält man:

$P(V) = \frac{p}{1 - (p - p^2)} = \frac{p}{1 - p + p^2}$

Spiel fair für $P(V) = \frac{1}{2}$:

$\frac{p}{1 - p + p^2} = \frac{1}{2}$, also $p^2 - 3p + 1 = 0$, woraus folgt: $p_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$

$\Rightarrow p_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382$ ($p_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$ entfällt als Wahrscheinlichkeit)

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.3	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
15 BE	1 BE	1 BE	2 BE	2 BE	4 BE	2 BE	3 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1997 / 98

Gymnasium

Berlin / C.-F.-v.-Siemens OG

Hinweis: Die Prüfungskandidaten hatten die Kursfolge MA-3/MA-4/MA-1/MA-2 durchlaufen, wobei sich die Kurse entsprechend dem Rahmenplan wie folgt zusammensetzten:

MA-1: – Differentialrechnung
– Trigonometrische Funktionen
– Integralrechnung (insgesamt 75 Std.)

MA-2: – Weiterführung der Integralrechnung
– gebrochenrationale Funktionen
– Weiterführung der Differentialrechnung
– Exponential- und Logarithmusfunktion (insgesamt 75 Std.)

MA-3: – Lineare Gleichungssysteme (25 Std.)
– Analytische Geometrie (35 Std.)
– Wahlgebiet Matrizen (15 Std.)

MA-4: – Grundlagen der Stochastik (25 Std.)
– Verteilungen und Statistik (25 Std.)
– Ergänzungen und Vertiefungen der Stochastik (25 Std.)

Die Prüfungskandidaten wurden während der gesamten Kursphase jahrgangsübergreifend unterrichtet. Zum Prüfungszeitpunkt lagen also noch keine Kenntnisse aus dem zweiten Analysis-Kurs MA-2 vor. Dennoch wurde der Kurs MA-1 zum prüfungsdidaktischen Schwerpunkt gewählt, da sich die schriftliche Prüfung zeitlich unmittelbar diesem Kurs anschloß.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$, $D_f \subset \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie.

b) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die Nullstellen von f. Untersuchen Sie f auf Periodizität.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung der Stelle $x_1 = 2\pi$ mit Hilfe Ihres Taschenrechners, formulieren Sie eine Vermutung hinsichtlich der stetigen Ergänzbarkeit von f an dieser Stelle, und beweisen Sie Ihre Vermutung.
Benutzen Sie dazu die Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

d) Zeigen Sie auf zwei Arten, daß F mit $F(x) = 2 \cdot \sqrt{1-\cos x}$ eine Stammfunktion von f ist, und berechnen Sie die Maßzahlen der Flächen zwischen der x-Achse, dem Graphen von f und den Geraden
(I) $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3}{2}\pi$;
(II) $x = 0$ und $x = 2\pi$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktionenschar f_p mit $f_p(x) = \cos(p \cdot x) - (p \cdot x) - 1$ mit dem Scharparameter $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $D_{f_p} = \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie zunächst durch Superposition die Graphen für p = 1 und p = –2 im Bereich $[-2\pi; 2\pi]$ in das vorgegebene Koordinatensystem (siehe Anlage).

b) Äußern Sie sich begründend zum Einfluß des Parameters p auf die Graphen der Einzelfunktionen und daraus resultierend auf die Graphen der Gesamtfunktionen.

c) Die Graphen von f_p besitzen für alle $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ genau eine Nullstelle. (Nachweis ist nicht erforderlich.) Bestimmen Sie diese, und untersuchen Sie die Schar auf relative und absolute Extrema und auf Wendepunkte. Benutzen Sie dabei jeweils nur ein hinreichendes Kriterium, und äußern Sie sich hinsichtlich der Existenz von relativen Extrema und Wendepunkten.

d) Zeichnen Sie nun auf der Basis Ihrer Ergebnisse aus c) den Graphen für p = 2 in das Koordinatensystem mit ein.

e) Zeigen Sie: Zu jeder Funktion f_p gibt es eine dazu achsensymmetrische Funktion f_{p*}.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Matrix $\mathbf{M}_a = \begin{pmatrix} a & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie diejenigen Parameter a, für die $\mathbf{M}_a$ eine inverse Matrix $\mathbf{M}_a^{-1}$ besitzt. (Sonderfälle bei der Umformung beachten!)

b) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 15 & -9 & -1 \\ 37 & -25 & -9 \\ 17 & -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ und geben Sie dann die inverse Matrix zu $\mathbf{M}_3$ an.

c) Berechnen Sie $\mathbf{M}_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\mathbf{M}_2 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.

Geben Sie nun unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems an:

(I) $2x + y - 4z = -3$
(II) $3x + 2y - 7z = -7$
(III) $4x - 3y + 2z = 19$.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1

a) Symmetrie:
Bedingung für die Symmetrie zum Ursprung: $-f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D_f$.
Mit $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ gilt:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sqrt{1-\cos(-x)}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = -\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = -f(x)$$

f ist zum Koordinatenursprung symmetrisch.

b) Definitionslücken:
Die Definitionslücken ergeben sich aus den Nullstellen der Nennerfunktion.

$$\sqrt{1-\cos(x_L)} = 0 \Leftrightarrow x_L = k \cdot 2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\ ;\ D_f = \mathbb{R}\backslash\{k \cdot 2\pi\} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Nullstellen:
Notwendig und hinreichende Bedingung ist: $f(x_N) = 0$ (und $x_N \in D_f$).
$\sin(x_N) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_N = k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}$. Unter Beachtung von D_f ergeben sich alle Nullstellen als ungerade Vielfache von π: $x_N = (2k+1)\pi$.

Periodizität:
sin und cos haben die Periodenlänge 2π, also haben Zähler und Nennerfunktion die Periodenlänge 2π. Die Quotientenfunktion kann also nur eine kleinere Periodenlänge (zum Beispiel $\frac{\pi}{2}$) besitzen (vergleiche die Funktion tan).
Mit $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $f(\frac{3}{2}\pi) = -1$ besitzt die Funktion keine kleinere Periodenlänge.

c) $f(2\pi + 0{,}1) = 1{,}412\ldots;\ f(2\pi - 0{,}1) = -1{,}412\ldots$
Vermutung: f ist an der Stelle $x_1 = 2\pi$ nicht stetig ergänzbar.
Allgemein: Für $x > 2\pi$ und $x \in \left]2\pi; 2\pi + \pi\right[$ gilt wegen $\sin x > 0$:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}}{\sqrt{1-\cos x}} = \sqrt{1+\cos x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1+\cos(2\pi+\Delta x)} = \sqrt{2}$$

Analog gilt für $x < 2\pi$ und $x \in \left]2\pi - \pi; 2\pi\right[$ wegen $\sin x < 0$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = -\sqrt{1+\cos x} \text{ und somit für } \Delta x < 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(-\sqrt{1+\cos(2\pi+\Delta x)}\right) = -\sqrt{2} \quad \text{q.e.d.}$$

d) Nach dem Hauptsatz muß gelten: $F'(x) = f(x)$.
Mit $(1-\cos x)' = \sin x$ folgt:

$$F(x) = 2 \cdot (1-\cos x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F'(x) = \sin x \cdot (1-\cos x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = f(x) \quad \text{q.e.d.}$$

Integration durch Substitution:
$z = 1 - \cos x$ und $z' = \sin x \Rightarrow dz = dx \cdot \sin x$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = 2\sqrt{z} + C = 2\sqrt{1-\cos x} + C \quad \text{q.e.d.}$$

Zur Flächenberechnung:

(I)Wegen $f(\frac{\pi}{2}) = 1$; $f(\frac{3}{2}\pi) = -1$ und $f(\pi) = 0$ ergibt sich:

$A = F(\pi) - F(\frac{\pi}{2}) - (F(\frac{3}{2}\pi) - F(\pi)) = 2 \cdot F(\pi) - F(\frac{\pi}{2}) - F(\frac{3}{2}\pi) = 4 \cdot \sqrt{2} - 4$

(II) Es liegt ein uneigentliches Integral 2. Art vor.

$$A = \lim_{a \to 0} \int_a^{\pi} f(x)\,dx - \lim_{b \to 2\pi} \int_{\pi}^{b} f(x)\,dx$$

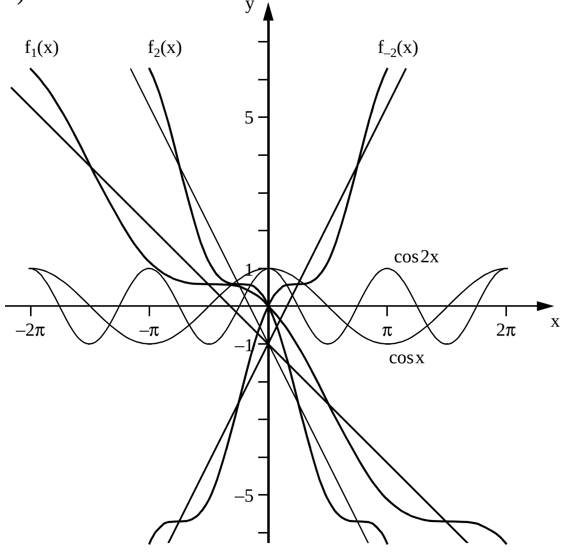
$$= \lim_{a \to 0} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{1 - \cos a}) - \lim_{b \to 2\pi} (2\sqrt{1 - \cos b} - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Untersuchung der Funktion auf Symmetrie	3 BE
b)	Maximaler Definitionsbereich; Nullstellen;	4 BE
	Untersuchung auf Periodizität	3 BE
c)	Aufstellen der Vermutung;	2 BE
	Beweis der Vermutung	6 BE
d)	Beweis, daß F Stammfunktion von f ist;	7 BE
	Maßzahlen der beiden Flächen	7 BE
		32 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2

a) und d)



b) Fallunterscheidung:

1. $p > 0$: Mit wachsendem p fallen die Geraden $g_p(x) = -px - 1$ stärker. Die Kosinusfunktion hat kleinere Periodenlängen. Im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ schlängelt sich der Graph der Gesamtfunktion f_p häufiger um die Gerade g_p.
2. $p < 0$: Mit kleiner werdendem p steigen die Geraden stärker. Die Kosinusfunktion hat kleinere Periodenlängen. Im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ schlängelt sich der Graph der Gesamtfunktion f_p häufiger um die Gerade g_p.

c) $f_p(0) = \cos(0 \cdot p) - 0 \cdot p - 1 = 0$

$x_N = 0$ ist Nullstelle aller Scharfunktionen.

$f_p'(x) = -p \cdot \sin px - p$; $f_p''(x) = -p^2 \cdot \cos px$; $f_p'''(x) = p^3 \cdot \cos px$

Relative Extrema:

notwendige Bedingung: $f_p'(x_E) = 0 \Rightarrow \sin px_E = -1$

$px_E = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi = \frac{(4n+3)\pi}{2} \Rightarrow x_E = \frac{(4n+3)\pi}{2p}$ und $n \in \mathbb{Z}$

hinreichende Bedingung: $f_p'(x_E) = 0$ und $f_p''(x_E) \neq 0$

Im vorliegenden Fall gilt $f_p''(x_E) = 0$. Also ist keine Entscheidung über relative Extrema an dieser Stelle möglich.

Da für jedes $p \neq 0$ die Funktion der Geraden g_p keine obere und untere Schranke besitzt, kann es im Zusammenhang mit b) keine absoluten Extrema von f_p geben.

Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f_p''(x_W) = 0 \Rightarrow \cos px_W = 0$

$px_W = \frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow x_W = \frac{(2n+1)\pi}{2p}$ und $n \in \mathbb{Z}$

hinreichende Bedingung: $f_p''(x_W) = 0$ und $f_p'''(x_W) \neq 0$

$f_p'''(x_W) = p^3 \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \pm p^3$

Es gilt $f_p'''(x_W) \neq 0$ für $p \neq 0$. Damit ist die Existenz der Wendepunkte nachgewiesen.

Bestimmung der Funktionswerte:

$$f_p(x_W) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) - \frac{(2n+1)\pi}{2} - 1 = -\frac{(2n+1)\pi}{2} - 1$$

$W\left(\frac{(2n+1)\pi}{2p} \,\middle|\, -\frac{(2n+1)\pi}{2} - 1\right)$ und $n \in \mathbb{Z}$

Da $\left\{\frac{(4n+3)\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \subset \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ gilt, sind alle Kandidaten fürExtremstellen auch gleichzeitig Wendestellen. Das heißt, an den Stellen x_E liegen Sattelpunkte (Wendepunkte mit horizontalen Tangenten) vor.

e) Die Graphik in d) läßt erkennen, daß f_2 und f_{-2} zueinander achsensymmetrisch sind. Deshalb kann vermutet werden, daß allgemein f_p und f_{-p} zueinander achsensymmetrisch sind. In Analogie zu achsensymmetrischen Funktionen müßte dann gelten: $f_p(x) = f_{-p}(-x)$ für alle $x \in D_{f_p}$.

$f_{-p}(-x) = \cos(-p \cdot (-x)) - (-p \cdot (-x)) - 1 = \cos px - px - 1 = f_p(x)$ q.e.d.

Bewertungsvorschlag:

a)	Zeichnung	7 BE
b)	Einfluß von p auf die Graphen der Einzel- und Gesamtfunktion	8 BE
c)	Bestimmung der Nullstelle	1 BE
	Lokale Extrema; Wendepunkte	16 BE
d)	Zeichnung	3 BE
e)	Nachweis	5 BE
		40 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3

a) Gesucht sind die $a \in \mathbb{R}$, für die $\text{Rang}(M_a) = 3$ gilt, für die also die drei Spaltenvektoren der Matrix linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & a \end{pmatrix} \text{ umformen gemäß folgender Schritte } \begin{pmatrix} \cdot 3 & \\ \cdot a & \cdot 3 \\ & \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -4 \\ 0 & 3-2a & 7a-12 \\ 0 & 17 & -28-3a \end{pmatrix} \text{ umformen gemäß folgender Schritte } \begin{pmatrix} \\ \cdot 17 \\ \cdot(3-2a) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -4 \\ 0 & 3-2a & 7a-12 \\ 0 & 0 & -6a^2+72a-120 \end{pmatrix} \text{ in Dreiecksform}$$

Es ergeben sich die Sonderfälle $a = 0$ (1. Umform.) und $a = \frac{3}{2}$ (2. Umform.).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -40 \end{pmatrix} \text{ für } a = 0 \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 18 & -27 \end{pmatrix} \text{ für } a = \frac{3}{2}$$

M_0 und $M_{\frac{3}{2}}$ sind invertierbar, da $\mathrm{Rang}(M_0) = \mathrm{Rang}(M_{\frac{3}{2}}) = 3$ gilt.

$a^2 - 12a + 20 = 0$ hat die Lösungen $a_{1,2} = 6 \pm 4$. Es gilt: $\mathrm{Rang}(M_a) = 3$ für alle $a \in \mathbb{R}\setminus\{2; 10\}$. Für diese Werte ist M_a invertierbar.

b) $$\begin{pmatrix} 15 & -9 & -1 \\ 37 & -25 & -9 \\ 17 & -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$M_3^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 15 & -9 & -1 \\ 37 & -25 & -9 \\ 17 & -13 & -3 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 19 \end{pmatrix}$$

M_2 ist gemäß a) singulär. Wegen $\mathrm{Rang}(M_2) = 2$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems nach dem Dimensionssatz ein eindimensionaler linearer Vektorraum, nämlich $\mathrm{Kern}(M_2)$.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Kern}(M_2) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (lineare Hülle einer speziellen homogenen Lösung)

Da $\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 19 \end{pmatrix}$ eine spezielle partikuläre Lösung ist, ergibt sich die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems:

$$L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 19 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}\right\}.$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Ermittlung der Parameter a	14 BE
	Betrachtung der Sonderfälle	6 BE
b)	Berechnung des Matrizenprodukts; Berechnung von M_3^{-1}	5 BE
c)	Berechnung des Produkts; Lösungsmenge von $M_2 \cdot \vec{x} = \vec{o}$	7 BE
	Lösung des Gleichungssystems	2 BE
		34 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1997 / 98

Gymnasium

Berlin / Pascal-Oberschule

Aufgabe 1

Mit $f_a(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$, $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ist eine Funktionsschar gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich für die Funktionen f_a in Abhängigkeit von a an.
Führen Sie eine Kurvendiskussion (Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs, Nullstellen, Symmetrieverhalten, Monotonieverhalten, eventuelle lokale Extrema und Wendepunkte) für die Graphen der Funktionen f_a durch.

b) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_4 im größtmöglichen Definitionsbereich.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Wendetangenten an die Graphen der Funktionen f_a in Abhängigkeit von a.

d) Geben Sie die Stammfunktion F_a für die Funktionen f_a an und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f_1 und f_4 und der Geraden $x = \frac{1}{2}$ vollständig begrenzt wird.

e) Gegeben ist weiterhin die Funktion h mit $h(x) = \frac{2}{1-x^2}$ über dem offenen Intervall $(-1; 1)$.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h in das bereits vorhandene Koordinatensystem.
Jede Gerade $x = u$ mit $0 < u < 1$ schneidet den Graphen von h in P_u und den Graphen von f_1 in Q_u.
Für welche reelle Zahl u ist die Streckenlänge $\overline{P_u Q_u}$ minimal? (***38%***)

Aufgabe 2

Die Punkte $A(3\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,3\,|\,0)$, $C(-3\,|\,0\,|\,0)$, $D(0\,|\,-3\,|\,0)$, $E(0\,|\,0\,|\,3)$ und $F\,(0\,|\,0\,|\,-3)$ seien die Eckpunkte eines regulären Oktaeders.

a) Stellen Sie das Oktaeder im dreidimensionalen Koordinatensystem dar (Verkürzungsverhältnis in x-Richtung: $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$, sonst 1 LE: 1 cm).
Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen.

b) Ermitteln Sie den Abstand der Geraden g_1 durch die Punkte A und E und g_2 durch die Punkte B und F.

c) Zeigen Sie, daß die Schwerpunkte der 8 Seitenflächen dieses Oktaeders einen Würfel bilden.
Geben Sie die Koordinaten seiner 8 Eckpunkte an und berechnen Sie das Würfelvolumen.

d) Vom Punkt $P(0\,|\,0\,|\,5)$ wird ein linearer Lichtstrahl genau auf den Schwerpunkt des Dreiecks ABE gerichtet. Dort wird er reflektiert. Schließlich trifft er auf einen Bildschirm in der Ebene ε_B: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.
Geben Sie die Koordinaten des in ε_B entstehenden Bildpunktes an. (***37%***)

Aufgabe 3

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der kanonischen Basis gegeben.

a) Für welche reelle Zahlen t ist $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Nun sei $t = 3$.
Welche Koordinatendarstellung hat der Vektor $\vec{a}$ bez. der Basis B, wenn seine Darstellung bez. der kanonischen Basis $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ lautet?

c) Welche Koordinaten hat der Vektor $\vec{c}$ für $t = 3$ bez. der kanonischen Basis, wenn seine Darstellung bez. der Basis B $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ lautet?

d) Für welche reelle Zahl t spannen die Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ einen zweidimensionalen Unterraum auf, der $\vec{b}_3$ enthält? Geben Sie die Koordinaten von $\vec{b}_3$ bez. der von $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ gebildetenBasis an.

e) Überprüfen Sie, ob $U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ mit: } u_1 = u_3 + 1 \text{ und } u_2 = u_3 - 1 \right\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist. (***25%***)

Erwartungsbild zu Aufgabe 1

a) $f_a(x) = \ln(\frac{a+x}{a-x})$ mit $a > 0$

Definitionsbereich:

Damit $f_a(x)$ definiert ist, muß gelten: $\frac{a+x}{a-x} > 0$.

1. Fall: $a + x > 0$ und $a - x > 0$
$\Rightarrow x > -a$ und $x < a$, also $-a < x < a$

2. Fall: $a + x < 0$ und $a - x < 0$
$\Rightarrow x < -a$ und $x > a$, d.h. $a < x < -a$
Für $a > 0$ existieren keine solchen Werte x.

$\Rightarrow D_{f_a}$: $-a < x < a$

Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs:

$\lim\limits_{x \to a} f_a(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to -a} f_a(x) = -\infty$

Nullstellen:
$f_a(x) = 0$ für $\frac{a+x}{a-x} = 1 \Rightarrow x = 0$

Symmetrie für $a > 0$:

$f_a(x) = \ln(\frac{a+x}{a-x}) = \ln(a+x) - \ln(a-x)$

$f_a(-x) = \ln(\frac{a-x}{a+x}) = \ln(a-x) - \ln(a+x) = -(\ln(a+x) - \ln(a-x)) = -f_a(x)$

$\Rightarrow f_a$ ist punktsymmetrisch

Monotonie, Extrema, Wendepunkte:

$f_a(x) = \ln(a+x) - \ln(a-x)$

$f_a'(x) = \frac{1}{a+x} - \frac{-1}{a-x} = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} = \frac{a-x+a+x}{a^2-x^2} = \frac{2a}{a^2-x^2}$

$f_a''(x) = \frac{4ax}{(a^2-x^2)^2}$

$f_a'(x) > 0$ für alle $x \in D_{f_a}$

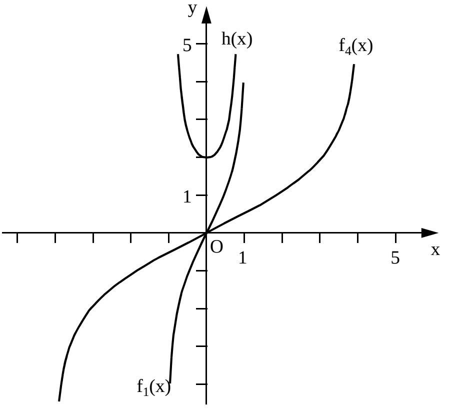
$\Rightarrow f_a(x)$ ist streng monoton steigend und hat keine lokale Extrema.

$f_a''(x) = 0$ für $x = 0$

An dieser Stelle findet in f_a'' ein Vorzeichenwechsel von „–“ auf „+“ statt.

$\Rightarrow$ Wendepunkt $W(0 \mid 0)$

b)



c) Wendetangenten:

$f_a'(0) = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a} \Rightarrow t_a(x) = \frac{2}{a}x$ (Ursprungsgeraden!)

d) $f_a(x) = \ln(a + x) - \ln(a - x)$

* $\int \ln(a + x)\,dx = (a + x)\ln(a + x) - (a + x)$

wegen $\int \ln z\,dz = z\ln z - z + C$ – bzw. ausführlich über partielle Integration:

Mit $u = \ln(a + x)$, $u' = \frac{1}{a+x}$, $v = x$, $v' = 1$ erhält man:

$$\int \ln(a + x)\,dx = x\ln(a + x) - \int \frac{x}{a+x}\,dx \qquad \text{Subst.: } w = a + x$$

$$= x\ln(a + x) - \int \frac{w-a}{w}\,dw = x\ln(a + x) - \int \left(1 - \frac{a}{w}\right)dw$$

$$= x\ln(a + x) - w + a\ln w + C$$

$$= (a + x)\ln(a + x) - (a + x) + C$$

Eine spezielle Stammfunktion ist $G(x) = (a + x)\ln(a + x) - x$

Probe: $G'(x) = \ln(a + x) + 1 - 1$

* $\int \ln(a - x)\,dx = -(a - x)\ln(a - x) + (a - x)$

$H(x) = -(a - x)\ln(a - x) - x$

Probe: $H'(x) = \ln(a - x) + \frac{-(a-x)}{a-x} \cdot (-1) - 1 = \ln(a - x)$

$$\Rightarrow F_a(x) = \int f_a(x)\,dx = (a + x)\ln(a + x) - x + (a - x)\ln(a - x) + x$$

$$= (a + x)\ln(a + x) + (a - x)\ln(a - x) + C$$

$f_1(x) = f_4(x)$ für $\frac{1+x}{1-x} = \frac{4+x}{4-x}$, d.h. $-x^2 + 3x + 4 = -x^2 - 3x + 4$, also $x = 0$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} [\ln(\tfrac{1+x}{1-x}) - \ln(\tfrac{4+x}{4-x})]\,dx$$

$$= [(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x) - (4+x)\ln(4+x) - (4-x)\ln(4-x)]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{3}{2}\ln(\tfrac{3}{2}) - \tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{9}{2}\ln(\tfrac{9}{2}) - \tfrac{7}{2}\ln(\tfrac{7}{2}) + 4\ln 4 + 4\ln 4$$

$$= 1{,}5\ln 3 - 1{,}5\ln 2 - 0{,}5\ln 2 - 9\ln 3 + 4{,}5\ln 2 - 3{,}5\ln 7 + 3{,}5\ln 2 + 16\ln 2$$

$$= 22\ln 2 - 7{,}5\ln 3 - 3{,}5\ln 7 \approx 0{,}199 \text{ (FE)}$$

e) $h(x) = \frac{2}{1-x^2}$; h ist achsensymmetrisch.

$$h'(x) = \frac{-2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$d(u) = h(u) - f_1(u) = \frac{2}{1-u^2} - \ln(\frac{1+u}{1-u})$$

$$d'(u) = \frac{4u}{(1-u^2)^2} - \frac{2}{1-u^2} = \frac{4u - 2(1-u^2)}{(1-u^2)^2}$$

$$d'(u) = 2\,\frac{u^2+2u-1}{(1-u^2)^2}$$

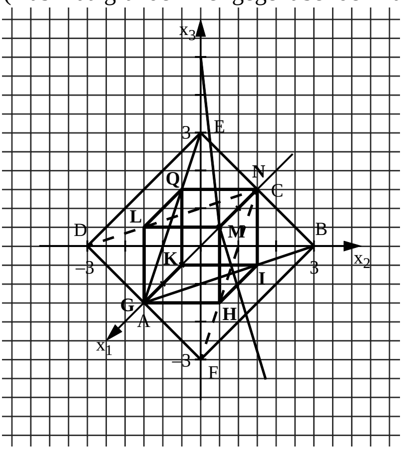
$u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$; nur $u_1 = -1 + \sqrt{2}$ liegt im geforderten Intervall.
Für $d'(u)$ findet an dieser Stelle ein Vorzeichenwechsel von „–“ zu „+“ statt.
Bei $u_1 = -1 + \sqrt{2}$ liegt also ein lokales Minimum.

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich;	3 BE
	Kurvendiskussion	13 BE
b)	Zeichnung	4 BE
c)	Gleichung der Wendetangenten	2 BE
d)	Ermittlung der Stammfunktion;	5 BE
	Berechnung der Fläche	3 BE
e)	Darstellung von h;	2 BE
	Berechnung von u	6 BE
		38 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2

a) (Aus Platzgründen hier gegenüber der Aufgabenstellung verkleinert.)



ε_{ABF}: $x_1 + x_2 - x_3 = 3$
ε_{ABE}: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

Der Schnittwinkel zwischen zwei ebenen Körperflächen kann man ermitteln, indem man die Orientierungen der Normalenvektoren so wählt, daß einer in den Körper hinein- und der andere aus dem Körper herauszeigt, hier z.B.:

ε_{ABF}: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ε_{ABE}: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(in den Körp.) (aus dem Körp.

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 109{,}47°$$

b) g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Abstand der windschiefen Geraden g_1 und g_2 wird unter Verwendung der HESSEschen Normalform ermittelt:

$$\varepsilon_H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_H: x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$d = \left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 2\sqrt{3} \text{ (LE)}$$

c) Der Schwerpunkt kann über das arithmetisches Mittel der Koordinaten der Seitenflächen-Eckpunkte berechnet werden.

$\Rightarrow$ G(1 | –1 | –1); H(1 | 1 | –1); I(–1 | 1 | –1); K(–1 | –1 | –1)
L(1 | –1 | 1); M(1 | 1 | 1); N(–1 | 1 | 1); Q(–1 | –1 | 1)

Alle Kanten haben offensichtlich die Länge 2. $\Rightarrow$ Körper ist ein Parallelepiped.

Nun gilt weiterhin:

$\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$; $\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und

$\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{GL} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ jeweils orthogonal $\Rightarrow$ Das Parallelepiped ist ein Würfel.

$V = 2^3 = 8$ (VE)

d) p_1 – Projektionsstrahl; p_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Wir wählen einen zweiten Punkt auf p_1 – z.B. P' mit u = 2 $\Rightarrow$ P'$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ – und ermitteln dessen Spiegelbild an der Ebene ε_{ABE}.

k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein zu ε_{ABE} orthogonaler Vektor)

Durchstoßpunkt von k in ε_{ABE}:
$2 + v + 2 + v - 3 + v = 3$, also $v = \frac{2}{3}$
Damit erhält man für $v = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ den Punkt P'' auf dem reflektierten Strahl:
P''$\left(\frac{10}{3} \,\middle|\, \frac{10}{3} \,\middle|\, -\frac{5}{3}\right)$

p_2 – reflektierter Strahl; p_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$

p_2 in ε_B einsetzen liefert den Bildpunkt:
$1 + 7k + 1 + 7k + 1 - 8k = 6$, also $k = \frac{1}{2}$
Der Bildpunkt hat die Koordinaten B(4,5 | 4,5 | –3).

Bewertungsvorschlag:

a)	Zeichnung	4 BE
	Berechnung des Schnittwinkels	4 BE
b)	Ermittlung des Abstands der Geraden	6 BE
c)	Koordinaten der Eckpunkte;	4 BE
	Nachweis des Würfels;	5 BE
	Berechnung des Volumens	2 BE
d)	Ermittlung des Bildpunktes	12 BE
		37 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3

a) $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ werden auf lineare Abhängigkeit geprüft.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ t & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3-2t & -1-3t & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid (-3+2t) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7+t & 0 \end{array}\right)$$

Für $t = 7$ ist B keine Basis. Für $t \neq 7$ ist B Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -3 & -10 & -17 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -3 & -10 & -17 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

$\lambda_3 = 2;\ \lambda_2 = -1;\ \lambda_1 = 4 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_3}$

c) $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $t = 7$: $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = 2;\ \lambda_1 = -1;\ \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B*}$

e) U enthält nicht den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn wenn $u_3 = 0$, so ist $u_1 \neq 0$. Also kann U kein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ sein, denn U enthält kein neutrales Element der Addition.

Bewertungsvorschlag:

a)	Ermittlung der t-Werte, für die B Basis ist	6 BE
b)	Koordinatendarstellung von $\vec{a}$ bez. Basis B	6 BE
c)	Koordinatendarstellung von $\vec{c}$ bez. kanonischer Basis	2 BE
d)	Ermittlung von t; Koordinaten von $\vec{b}_3$	5 BE
e)	Überprüfung, ob U Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist	6 BE
		25 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1997 / 98

Gymnasium

Gymnasium Müncheberg

Aufgabe 1

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k mit $f_k(x) = kx\,e^{-kx^2}$ $(k \in \mathbb{R}^+)$.

a) Untersuchen Sie den Graph der Funktion f_3 hinsichtlich folgender Eigenschaften:
   - Symmetrie
   - Schnittpunkte mit den Achsen
   - Extrempunkte, Art der Extrema
   - Wendepunkte
   - Verhalten im Unendlichen.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_3 im Intervall [–2; 2].

c) Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Funktion h, auf der die Hochpunkte der Funktionen der Schar liegen.

d) Für welches k ist der Abstand der Extrempunkte $E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}; y_1\right)$ und $E_2\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}; y_2\right)$ extremal?
   Untersuchen Sie die Art des Extremums, ohne die 2. Ableitung zu bilden.

e) Ermitteln Sie eine Stammfunktion F_k der Funktionen f_k mittels Substitution.
   (mögliches Ergebnis: $F_k(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-kx^2}$)

f) Zeigen Sie, daß die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f_k und der positiven x-Achse einen endlichen Inhalt besitzt.
   Erläutern Sie Ihr Ergebnis.

g) Weisen Sie rechnerisch nach, daß sich je 2 Graphen der Schar an genau drei Stellen schneiden.

h) Für welches k werden die zueinander parallelen Wendetangenten von der 3. Wendetangente orthogonal geschnitten?

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte P(2; –1; 3), Q(6; –3; 9) sowie die Vektoren $\vec{a_t} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b_t} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, daß die Vektoren $\vec{a_t}$ und $\vec{b_t}$ für alle t linear unabhängig sind.

b) Weisen Sie nach, daß die Gerade durch die Punkte P und Q mit der Schar der Ursprungsgeraden mit den Richtungsvektor $\vec{b_t}$ stets denselben Schnittpunkt hat.

c) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h, die durch den Punkt P und den Vektor $\vec{a}_2$ bzw. den Punkt Q und den Vektor $\vec{b}_2$ bestimmt werden.
Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Abstand.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K mit dem Mittelpunkt P, die durch den Koordinatenursprung geht.
(Ergebnis: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 14$)

e) Berechnen Sie die Schnittpunkte T_1 und T_2 der Geraden durch die Punkte P und Q mit der Kugel K.
Ermitteln Sie je eine Gleichung der Tangentialebenen an die Kugel K in den Schnittpunkten.

f) Zur x_1-x_2-Ebene parallele Ebenen schneiden die Kugel K.
Für welche dieser Ebenen hat der Schnittkreis den Mittelpunkt M(2; –1; d) und den Radius 2?

g) Geben Sie die Gleichung einer Ebene F an, so daß die Punkte P und Q spiegelbildlich zur Ebene F liegen.

h) Geben Sie die Koordinaten des Punktes R der x_1-x_3-Ebene an, für den der Umfang aller gleichschenkligen Dreiecke PQR mit der Basis PQ minimal wird.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1

a) $f_3(x) = 3x\,e^{-3x^2}$

Symmetrie:
$f_3(-x) = -3x\,e^{-3x^2} = -f_3(x)$, also punktsymmetrisch

Schnittpunkte mit den Achsen:
y-Achse: $f_3(0) = 0 \Rightarrow P(0;\,0)$

x-Achse: $0 = 3x\,e^{-3x^2} \Rightarrow 3x = 0$ (da $e^{-3x^2} \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow x = 0$

Extremunkte, Art der Extrema:

$f_3'(x) = 3\,e^{-3x^2} + 3x(-6x)\,e^{-3x^2} = (3 - 18x^2)\,e^{-3x^2}$

$f_3''(x) = -6x(3 - 18x^2)\,e^{-3x^2} + (-36x)\,e^{-3x^2} = (-18x + 108x^3 - 36x)\,e^{-3x^2}$

$= (108x^3 - 54x)\,e^{-3x^2}$

$f_3'''(x) = -6x(108x^3 - 54x)\,e^{-3x^2} + (324x^2 - 54)\,e^{-3x^2}$

$= (-648x^4 + 324x^2 + 324x^2 - 54)\,e^{-3x^2}$

$= (-648x^4 + 648x^2 - 54)\,e^{-3x^2}$

$0 = f_3'(x) \Rightarrow 3 - 18x^2 = 0$ (da $e^{-3x^2} \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

$f_3''\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(108 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}^3} - 54 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\right)e^{-3 \cdot \frac{1}{6}} = \left(\frac{18}{\sqrt{6}} - \frac{54}{\sqrt{6}}\right)e^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{36}{\sqrt{6}}\right)e^{-\frac{1}{2}} < 0$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow H\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\, \frac{3}{\sqrt{6e}}\right)$ bzw. $H\left(\frac{\sqrt{6}}{6};\, \frac{\sqrt{6e}}{2e}\right)$ (nachfolgend analog)

Aus der Punktsymmetrie von f_3 folgt: $T\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\, -\frac{3}{\sqrt{6e}}\right)$

Wendepunkte:

$0 = f_3''(x) \Rightarrow 0 = 108x^3 - 54x$ (da $e^{-3x^2} \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow 54x(2x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$, und aus $2x^2 - 1 = 0$ folgt $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$f_3'''(0) = -54 \neq 0$; $W_1(0;\,0)$

$f_3'''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-162 + 324 - 54)\,e^{-\frac{3}{2}} = 108\,e^{-\frac{3}{2}} \neq 0$; $W_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\, \frac{3}{\sqrt{2e^3}}\right)$

Aus der Punktsymmetrie von f_3 folgt: $W_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\, -\frac{3}{\sqrt{2e^3}}\right)$

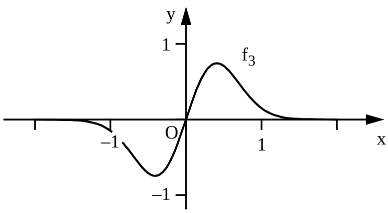
Verhalten im Unendlichen:

$\lim\limits_{x \to \infty} 3x\,e^{-3x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x}{e^{3x^2}}$

Anwendung des Satzes von l'Hospital: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x}{e^{3x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{6x\,e^{3x^2}} = 0$

Analog (oder wegen Punktsymmetrie) ergibt sich: $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x\,e^{-3x^2} = 0$.

b)



c) Ermittlung der Hochpunkte:

$f_k'(x) = k\,e^{-kx^2} + kx(-2kx)\,e^{-kx^2} = (k - 2k^2x^2)\,e^{-kx^2}$

$f_k'(x) = 0 \;\Rightarrow\; k - 2k^2x^2 = 0$ (da $e^{-kx^2} \neq 0$ für $k \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2k}}$

$f_k''(x) = -2kx(k - 2k^2x^2)\,e^{-kx^2} - (4k^2x)\,e^{-kx^2} = (4k^3x^3 - 6k^2x)\,e^{-kx^2}$

$f_k''\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \left(4k^3 \cdot \frac{1}{2k\sqrt{2k}} - 6k^2 \frac{1}{\sqrt{2k}}\right) e^{-\frac{1}{2}} = \left(-4k^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2k}}\right) e^{-\frac{1}{2}} < 0$

$f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = k \cdot \frac{1}{\sqrt{2k}}\, e^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; H\left(\frac{1}{\sqrt{2k}};\ \sqrt{\frac{k}{2e}}\right)$

Bestimmung der Gleichung:

1. Ableitung: $0 = k - 2k^2x^2 = k(1 - 2kx^2) \;\Rightarrow\; 0 = 1 - 2kx^2$ (da $k \in \mathbb{R}^+$)

$\Rightarrow k = \frac{1}{2x^2}$, woraus für $f_k(x)$ folgt:

$f_{\frac{1}{2x^2}}(x) = \frac{1}{2x^2}\, x\, e^{-\frac{1}{2x^2} \cdot x^2} = \frac{1}{2\sqrt{e}x} \;\Rightarrow\; h(x) = \frac{1}{2\sqrt{e}x}$

Weiterer Lösungsweg: Aus $x = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, also $\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot x}$, und $y = \sqrt{\frac{k}{2e}}$ erhält man durch Einsetzen $y = h(x) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{2e}} = \frac{1}{2\sqrt{e} \cdot x}$.

Probe: $h\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \frac{1 \cdot \sqrt{2k}}{2 \cdot \sqrt{e} \cdot 1} = \sqrt{\frac{2k}{4e}} = \sqrt{\frac{k}{2e}}$

d) Aus $H(\frac{1}{\sqrt{2k}};\ \sqrt{\frac{k}{2e}})$ und der Punktsymmetrie von f_k – die analog zu a) gezeigt werden kann – folgt: $T(-\frac{1}{\sqrt{2k}};\ -\sqrt{\frac{k}{2e}})$.

$d^2 = (\frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{1}{\sqrt{2k}})^2 + (\sqrt{\frac{k}{2e}} + \sqrt{\frac{k}{2e}})^2 = \frac{4}{2k} + 4 \cdot \frac{k}{2e} = \frac{2}{k} + \frac{2k}{e} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2}{k} + \frac{2k}{e}}$

$d' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{k} + \frac{2k}{e}}} \cdot (-\frac{2}{k^2} + \frac{2}{e}) \qquad (2\sqrt{\frac{2}{k} + \frac{2k}{e}} \neq 0$, da $k \in \mathbb{R}^+)$

$d' = 0 \Rightarrow -\frac{2}{k^2} + \frac{2}{e} = 0$ und damit $k_1 = \sqrt{e}$; $k_2 = -\sqrt{e}$ (entfällt)

Art des Extremums:

Für $k < \sqrt{e}$ ist $d' < 0$; da die Wurzel positiv ist und mit $e > k^2$ $(k > 0)$ folgt:

$\frac{2}{e} < \frac{2}{k^2}$, also $-\frac{2}{k^2} + \frac{2}{e} < 0$. Für $k > \sqrt{e}$ erhält man analog $d' > 0$.

Wegen des VZW von negativ auf positiv liegt bei $k = \sqrt{e}$ ein Minimum vor.

e) $\int kx\,e^{-kx^2}\,dx$; Substitution: $u = -kx^2$, $\frac{du}{dx} = -2kx$; $du = -2\,kx\,dx$

$\int kx\,e^{-kx^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(-2kx\,e^{-kx^2})\,dx = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + c = -\frac{1}{2}e^{-kx^2} + c$

$\Rightarrow F_k(x) = -\frac{1}{2}e^{-kx^2}$

f) $\int_0^a kx\,e^{-kx^2}\,dx = [-\frac{1}{2}e^{-kx^2}]_0^a = -\frac{1}{2}e^{-ka^2} + \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{a \to \infty}(-\frac{1}{2}e^{-ka^2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Der Flächeninhalt besitzt den von k unabhängigen Grenzwert $\frac{1}{2}$.

g) Es werden zwei beliebige, verschiedene Graphen der Schar gewählt:

$f_{k_1}(x) = k_1x\,e^{-k_1x^2}$; $f_{k_2}(x) = k_2x\,e^{-k_2x^2}$ $(k_1 \neq k_2)$

o.B.d.A. sei $k_1 < k_2$

$k_1x\,e^{-k_1x^2} = k_2x\,e^{-k_2x^2}$ ergibt $x_1 = 0$ (erste Schnittstelle)

$\frac{k_1}{k_2} = \frac{e^{-k_2x^2}}{e^{-k_1x^2}} = e^{-x^2(k_2 - k_1)} = e^{x^2(k_1 - k_2)}$

$\ln(\frac{k_1}{k_2}) = x^2(k_1 - k_2) \Rightarrow x^2 = \frac{\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)}{k_1 - k_2} > 0$, da wegen $k_1 < k_2$ gilt:

$\ln(\frac{k_1}{k_2}) < 0$ und $k_1 - k_2 < 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)}{k_1 - k_2}}$, $x_3 = -\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)}{k_1 - k_2}}$

Es gibt also genau 3 Schnittpunkte.

h) Ermittlung der Wendepunkte:

$f_k''(x) = (4k^3x^3 - 6k^2x)\,e^{-kx^2} = 0 \Rightarrow 4k^3x^3 - 6k^2x = 0$ (da $e^{-kx^2} \neq 0$)

$\Rightarrow 0 = 2xk^2(2kx^2 - 3) \Rightarrow x_1 = 0$

$2kx^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{3}{2k}}$, $x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2k}}$

$$\begin{aligned} f_k'''(x) &= -2kx(4k^3x^3 - 6k^2x)\,e^{-kx^2} + (12k^3x^2 - 6k^2)\,e^{-kx^2} \\ &= (-8k^4x^4 + 12k^3x^2 + 12k^3x^2 - 6k^2)\,e^{-kx^2} \\ &= (-8k^4x^4 + 24k^3x^2 - 6k^2)\,e^{-kx^2} \end{aligned}$$

$f_k'''(0) = -6k^2 \neq 0$

$f_k'''(\sqrt{\frac{3}{2k}}) = (-8k^4 \cdot \frac{9}{4k^2} + 24k^3 \cdot \frac{3}{2k} - 6k^2)e^{-\frac{3}{2}} = (12k^2)e^{-\frac{3}{2}} \neq 0$

$W_1(0; 0)$, $W_2(\sqrt{\frac{3}{2k}}; \sqrt{\frac{3k}{2e^3}})$, $W_3(-\sqrt{\frac{3}{2k}}; -\sqrt{\frac{3k}{2e^3}})$ (wegen Punktsymmetrie)

Anstiege der Wendetangenten:

t_1: $f_k'(0) = k \Rightarrow m_1 = k$; t_2, t_3 sind parallel, da f_k punktsymmetrisch:

$f_k'(\sqrt{\frac{3}{2k}}) = (k - 2k^2 \cdot \frac{3}{2k})e^{-k \cdot \frac{3}{2k}} = (-2k)e^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow m_2 = m_3 = (-2k)\,e^{-\frac{3}{2}}$

t_1 und t_2 bzw. t_3 stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

$k(-2k)e^{-\frac{3}{2}} = -1$, also $k^2 = \frac{1}{2}\,e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}}$ ($k_2 = -\sqrt{\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}}$ entfällt)

Erwartungsbild zu Aufgabe 2

a) Zu zeigen: Es gibt kein $k \in \mathbb{R}$, so daß $\vec{a}_t = k\vec{b}_t$.

(I)	$1 - t = k \cdot 8$	$\Rightarrow 1 - t = -8$, also $t = 9$	
(II)	$2 = -2k \Rightarrow k = -1$		Widerspruch
(III)	$1 = k \cdot t$	$\Rightarrow 1 = -t$, also $t = -1$	

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$; h_t: $\vec{x} = s\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$

Gleichsetzen der Gleichungen von g und h_t ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 2 + 4r = 8s \\ \text{(II)} & -1 - 2r = -2s \\ \text{(III)} & 3 + 6r = s \cdot t \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} + 2 \cdot \text{(II)} & 0 = 4s & \Rightarrow & s = 0 \\ s \text{ in (II)} & -1 - 2r = 0 & \Rightarrow & r = -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

s, r in (III) $3 + 6(-\tfrac{1}{2}) = 0 \cdot k \;\Rightarrow\; 0 = 0$ wahre Aussage für alle t

$\Rightarrow S(0; 0; 0)$

c) Untersuchung der gegenseitigen Lage von g und h:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \;\; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

g und h sind nicht parallel, da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind.
Schnittpunkt:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 2 - r = 6 + 8s \\ \text{(II)} & -1 + 2r = -3 - 2s \\ \text{(III)} & 3 + r = 9 + 2s \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(I')} & 0 = 4 + 8s + r \\ \text{(II')} & 0 = -2 - 2s - 2r \\ \text{(III')} & 0 = 6 + 2s - r \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(I')} + \text{(III')} & 0 = 10 + 10s & \Rightarrow s = -1 \\ s \text{ in (I')} & 0 = 4 - 8 + r & \Rightarrow r = 4 \\ s, r \text{ in (II')} & 0 = -2 + 2 - 8 & \text{Widerspruch} \end{array}$$

Es existiert kein Schnittpunkt, also sind g und h windschief.

Abstand von g und h:
Ebene E mit $g \subset E$ und $h \parallel E$:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \;\; \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Normalengleichung von E:

$$6x_1 + 10x_2 - 14x_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 - 10 - 42 = -40$$

E: $6x_1 + 10x_2 - 14x_3 = -40$

$$\frac{6x_1 + 10x_2 - 14x_3 + 40}{\sqrt{332}} = 0$$

Abstandsberechnung:

$$d(g, h) = d(Q, E) = \left| \frac{36 - 30 - 126 + 40}{\sqrt{332}} \right| = \frac{80}{\sqrt{332}} \approx 4{,}39 \text{ (LE)}$$

d) $r = |\overline{OP}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$ (LE)

$\Rightarrow K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 - 14 = 0$ bzw. $(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 3)^2 - 14 = 0$

e) Schnittpunkte T_1 und T_2:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$; g in K eingesetzt ergibt:

$(2 + 4r - 2)^2 + (-1 - 2s + 1)^2 + (3 + 6r - 3)^2 - 14 = 0$

$\Rightarrow 16r^2 + 4r^2 + 36r^2 = 14$, also $r^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow T_1(4; -2; 6),\ T_2(0; 0; 0)$

Gleichung der Tangentialebenen:

$E_1: (\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{t} - \vec{m}) - r^2 = 0$, d.h. $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ -2+1 \\ 6-3 \end{pmatrix} - 14 = 0$

$\Rightarrow 2(x_1 - 2) - (x_2 + 1) + 3(x_3 - 3) - 14 = 0$

$\Rightarrow 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 28 = 0$

$E_2: -2(x_1 - 2) + (x_2 + 1) - 3(x_3 - 3) - 14 = 0$

$\Rightarrow -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$

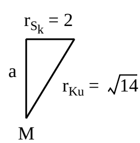
f) Gleichung der Ebene: $x_3 = d$

Abstand Ebene - Mittelpunkt M(2; –1; 3) der Kugel:

$a = \sqrt{14 - 4} = \sqrt{10}$ (LE)

Punkte der Ebene senkrecht über/unter Kugelmittelpunkt M

mit Abstand $\sqrt{10}$ (LE):



$x_{3_1} = 3 + \sqrt{10} \Rightarrow E_1: x_3 = 3 + \sqrt{10}$; $x_{3_2} = 3 - \sqrt{10} \Rightarrow E_2: x_3 = 3 - \sqrt{10}$

g) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq$ Normalenvektor von F; $M_{\overline{PQ}} \in F$ mit $M_{\overline{PQ}}(4; -2; 6)$

In die Normalengleichung einer Ebene $(\vec{x} - \vec{m}_{PQ}) \cdot \vec{n} = 0$ eingesetzt erhält man:

$F: \begin{pmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 + 2 \\ x_3 - 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 56 = 0$

h) Teil 1: Überlegung zur Lage möglicher Punkte R in der x_1-x_3-Ebene

Da die gesuchten Dreiecke gleichschenklig mit der Basis $\overline{PQ}$ sind, steht die Höhe durch R senkrecht auf $\overline{PQ}$ und verläuft durch den Mittelpunkt $M_{\overline{PQ}}$ von $\overline{PQ}$.

Die Punkte R liegen also auf der Schnittgeraden der x_1-x_3-Ebene mit der Ebene, die senkrecht auf $\overline{PQ}$ steht und die den Punkt $M_{\overline{PQ}}$ enthält. Dies ist die Ebene F.

x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$; F: $4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 56$

$\Rightarrow 4x_1 + 6x_3 = 56 \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teil 2: Berücksichtigung des minimalen Umfangs

Die Länge der Basis $\overline{PQ}$ ist fest. Der Umfang ist also nur von der Länge der Schenkel abhängig. Da beide Schenkel gleich lang sind, gilt:

$d(r) = \sqrt{\left(\left(14 - \frac{3}{2}r\right) - 2\right)^2 + 1 + (r-3)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}r^2 - 42r + 154}$

$d^2(r) = \frac{13}{4}r^2 - 42r + 154$ (wenn d(r) minimal, dann auch $d^2(r)$)

$(d^2(r))' = \frac{13}{2}r - 42;$

$(d^2(r))' = 0$, also $0 = \frac{13}{2}r - 42 \Rightarrow r = \frac{84}{13}$

$(d^2(r))'' = \frac{13}{2} > 0$, also Minimum $\Rightarrow R(\frac{56}{13}; 0; \frac{84}{13})$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1	BE	Aufgabe 2:	BE
a) Symmetrie, Schnittpunkte Ableitungen, Extrempunkte Wendepunkte m. Nachw. Verhalten m. Begr.	2 5 3 2	a) lin. Unabh., Paramterbest.	2
b) Zeichnung	2	b) Gleichungen, Nachweis	3
c) Hochpkte allg., Gleichung	4	c) Lagebeziehung Abst. windsch. Geraden	3 3
d) Ansatz, Ableitung, Lösg. Art	4 2	d) Radius, Kugelgleichung	2
e) Stammfunktion	2	e) Schnittpunkte Tangentialebenen	3 3
f) uneigentl. Integral, Erläutg.	3	f) Ebenengleichung über Abst.	3
g) Ansatz, Anzahl der Lösg.	4	g) Ebenengl. über Eigensch. der Spiegelung	3
h) Wendepkte. allg., Anstieg, Bedingung	5	h) Mögliche Lage; Schnittgerade; Lösung	4
	38 BE		29 BE