Abiturprüfung Grundkurs 1998/99

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern
Sachsen
Sachsen-Anhalt
Thüringen
Berlin
Brandenburg

PAETEC

paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH Berlin

Autoren für die einzelnen Bundesländer bzw. die ausgewählten Schulen:

Margit Liskow (Mecklenburg-Vorpommern)
Dr. Rainer Heinrich (Sachsen)
Birgit Maier (Sachsen-Anhalt)
Siegbert Hülle (Thüringen)
Pia Balzer (8. Gymnasium Berlin-Marzahn)
Martin Neuling (Marie-Curie-Oberschule Berlin-Wilmersdorf)
Michael Müller, Bernau

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier.

1. Auflage
1 5 4 3 2 1 | 2003 2002 2001 2000 1999

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes.

Redaktion: Dr. Hubert Bossek, Prof. Dr. habil. Karlheinz Weber
Layout: Marlen Bossek, Thilo Krüger, Günter Liesenberg, Erika Netzmann, Jörg-Peter Schütt
Umschlaggestaltung: Birgit Kintzel
Druck: Saale-Druck Naumburg GmbH

ISBN 3-89517-274-X

Inhalt

Vorwort

Das vorliegende Heft enthält die Aufgaben, die in den zentralen Abiturprüfungen des Schuljahrs 1998/99 für Mathematik-Grundkurse in den Bundesländern Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen gestellt wurden. Da es in Berlin und Brandenburg kein Zentralabitur für das Fach Mathematik gibt, wurden als Beispiele weiterhin die Abiturprüfungsarbeiten von zwei Berliner und einer Brandenburger Schule in das Heft aufgenommen.

Die Erwartungsbilder skizzieren in der Regel einen möglichen Lösungsweg, wobei stets auch wesentliche Zwischenschritte Aufnahme fanden, um den Nachvollzug des Gedankengangs zu erleichtern und für den Lernenden die Möglichkeiten zur Selbstkontrolle zu erhöhen. Die angegebenen Bewertungsvorschläge haben empfehlenden Charakter. Einigen Arbeiten vorangestellte *Hinweise* informieren über länderspezifische Modalitäten der Prüfungsdurchführung.

Hinsichtlich der Symbolik und Zeichensetzung wie auch der Beachtung der reformierten Rechtschreibung folgen die Aufgabentexte den Originalfassungen, woraus teilweise Unterschiede zwischen den Vorgehensweisen in den einzelnen Arbeiten resultieren. Aus Platzgründen war es erforderlich, mitunter „fortlaufende“ Gleichungen oder „Schlussketten“ zu verwenden. Das Zeichen „$\Rightarrow$“ wird dabei als Abkürzung für „daraus folgt“, „daraus ergibt sich“ u. Ä. genutzt, also nicht allein zur Kennzeichnung einer Implikation im strengen Sinne.

Der PAETEC Schulbuchverlag hofft, mit dieser Aufgabensammlung den Lehrkräften Anregungen für die Gestaltung eigener Klausur- und Prüfungsarbeiten sowie den Schülerinnen und Schülern Hilfe bei der Vorbereitung auf das Abitur zu geben. Darüber hinaus erlaubt die geschlossene Veröffentlichung der Prüfungsaufgaben aus einem Schuljahr gewiss interessante Vergleiche bezüglich Schwerpunktsetzung, Anforderungsniveau, Aufgabengestaltung usw. in den verschiedenen Bundesländern, woraus wiederum Ansätze für eigenes Nachdenken erwachsen können.

Die Redaktion

Berlin, September 1999

Abiturprüfung
Grundkurs

1998 / 99

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern

Hinweise:
Die Schüler erhielten zwei Aufgabenblöcke, bestehend aus Pflichtteil P (Aufgaben P1, P2, P3) und den Wahlteilen A und B. Der Pflichtteil war vollständig, von den Wahlaufgaben waren zwei aus Teil A oder zwei aus Teil B zu bearbeiten.
Zur Aufgabenauswahl stand den Schülern eine Zeit von 30 Minuten zur Verfügung, die reine Arbeitszeit betrug 210 Minuten.
Zugelassene Hilfsmittel waren:
Tafelwerk, nichtprogrammierbarer und nichtgrafikfähiger Taschenrechner, Zeichengeräte, Duden (Rechtschreibung)

Aufgabe P1: Analysis

1.1 Gegeben ist eine Funktion f durch die Gleichung $y = f(x) = x^2 \cdot (x-1), \quad x \in \mathbb{R}$.
Ihr Graph im kartesischen Koordinatensystem sei G.
Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte von G.
Zeichen Sie G im Intervall $-1 \leq x \leq 2$.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem G den positiven Teil der x-Achse schneidet.

1.2 Gegeben sind Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) durch
$a_n = 2(n-1)$ und $b_n = n^2 - n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
Untersuchen Sie beide Folgen auf Monotonie.
Bestimmen Sie die Summe s der ersten 20 Glieder der Folge (a_n).
Welches Glied der Folge (b_n) hat den Wert s?
Ermitteln Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n^2}$.

Aufgabe P2: Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(12|4|3)$, $C(4|3|12)$ und $D(4|\frac{4}{3}|1)$ gegeben.

2.1 Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks sind.
Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

2.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt D auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

2.3 Der Vektor $\overrightarrow{CB}$ lässt sich darstellen durch $\overrightarrow{CB} = r\overrightarrow{CD} + s\overrightarrow{CA}, \quad r, s \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Werte für r und s.

Aufgabe P3: Stochastik

Eine Spielbank bietet den Besuchern folgendes Spiel an:
Für einen Einsatz von 3 DM darf der Spieler dreimal einen idealen Würfel werfen und erhält für jede dabei erzielte „Sechs“ von der Bank 5 DM ausgezahlt.

3.1 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einem Spiel mehr als eine „Sechs“ erzielt?
   b) Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl von „Sechsen“ in einem Spiel.
   c) Untersuchen Sie, ob die Bank bei diesem Spiel auf lange Sicht mit Gewinn rechnen kann.

3.2 Die Anzahlen der in einem Spiel zu erzielenden „Sechsen“ seien die Werte einer Zufallsgröße X.
Stellen Sie die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten von X grafisch dar.

(Ergänzend wurde im Aufgabenmaterial eine Tabelle für $\phi(x)$ und $\Phi(x)$ für $0{,}00 \le x \le 2{,}39$ bereitgestellt, auf deren Wiedergabe hier verzichtet wird.)

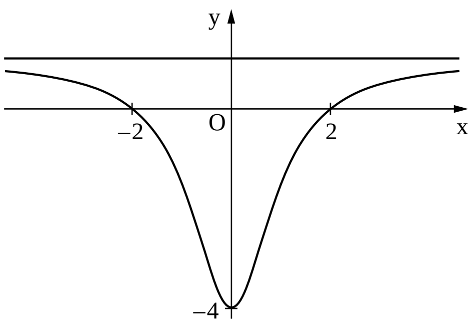
Aufgabe A4: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $y = f(x) = \frac{8-4x}{x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

4.1 Berechnen Sie die Nullstelle, die Polstelle und die lokale Extremstelle von f.
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \le x \le 7$.
Begründen Sie, dass der Graph von f genau einen Wendepunkt hat.

4.2 Die Gerade mit der Gleichung $y = 40$ schneidet den Graphen von f in zwei Punkten.
Berechnen Sie den Abstand dieser Schnittpunkte voneinander.

4.3 Gegeben ist der Graph einer Funktion g, deren Gleichung vom Typ
$y = g(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + b}$
ist (siehe Darstellung).
Bestimmen sie die Werte für a und b.



Aufgabe A5: Analysis

Gegeben sind zwei Funktionen durch
$f(x) = 1 - x^2 + \ln x, \quad x \in \mathbb{R}, x > 0 \quad$ und $\quad g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$.
Ihre Graphen seien G_f und G_g.

5.1 Die Funktion f hat eine ganzzahlige Nullstelle x_1 und eine weitere, x_2, die kleiner als x_1 und nicht ganzzahlig ist.
Bestimmen Sie x_1 und mit einer Genauigkeit von einer Stelle nach dem Komma einen Näherungswert für x_2.
Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes von G_f und untersuchen Sie G_f auf Existenz von Wendepunkten.
Skizzieren Sie G_f und G_g im Intervall $0{,}1 \le x \le 2$.

5.2 Die Graphen G_f und G_g und die Geraden mit den Gleichungen $x = 0{,}5$ bzw. $x = 2$ schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie deren Inhalt.
(Hinweis: $H(x) = x(\ln x - 1)$ ist eine Stammfunktion von $h(x) = \ln x$.)

5.3 Berechnen Sie den Wert von x, für den die Differenz $g(x) - f(x)$ minimal wird.

Aufgabe A6: Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(8|0|0)$, $B(0|6|0)$, $C(-4|3|4)$ und $D(0|0|4)$ gegeben.

6.1 Weisen Sie nach, dass alle vier Punkte in ein und derselben Ebene ε liegen.

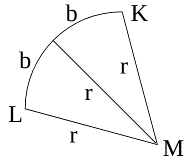
6.2 Stellen Sie das Viereck ABCD in einem räumliche Koordinatensystem dar.

6.3 Durch den Punkt C verlaufe eine Gerade g parallel zur Geraden BD.
Die Gerade g schneidet die Gerade durch A und D im Punkt C'.
Ergänzen Sie die grafische Darstellung durch Einzeichnen von g und C'.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C'.
Geben Sie die Koordinaten eines weiteren Punktes C" von g an.

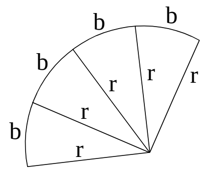
6.4 Begründen Sie, dass das Dreieck ABC' den gleiche Flächeninhalt hat wie das Viereck ABCD.

Aufgabe B4: Analysis

4.1 Ein Teil einer Parkanlage soll in Form eines Kreissektors gestaltet werden (siehe Skizze). Die Linien stellen Wege dar. Der gesamte Flächeninhalt des Sektors MKL soll 600 m^2 betragen. Aus Kostengründen soll die gesamte Weglänge möglichst klein gehalten werden.
Berechnen Sie die minimale Weglänge.



4.2 Eine andere Überlegung geht von vier kongruenten Teilsektoren und einer gesamten Weglänge von 200 m aus (siehe Skizze).
Berechnen Sie für diesen Fall das Maximum des gesamten Flächeninhalts.



Hinweise für 4.1 und 4.2:
Für den Flächeninhalt A jedes einzelnen Teilsektors gilt: $A = \frac{1}{2}rb$. Die Breite der Wege wird bei dieser Rechnung nicht berücksichtigt.

Aufgabe B5: Analysis

Durch $f_1(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, und $f_2(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, sind zwei Funktionen gegeben.

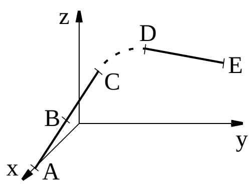
5.1 Es sei $g(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von g sei G.
Ermitteln Sie die Nullstelle von g und die Koordinaten des Extrem- und des Wendepunktes von G.
Skizzieren Sie den Graphen G.

5.2 An G sei in $P(0|g(0))$ die Tangente t gelegt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t.

5.3 Jede Parallele zu y-Achse mit der Gleichung $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, $k < -1$, begrenzt zusammen mit der x-Achse und dem Graphen G eine Fläche A_k vollständig.
Zeigen Sie, dass $H(x) = xe^x$ eine Stammfunktion von g ist.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_k in Abhängigkeit von k.

Aufgabe B 6: Geometrie

Ein Flugobjekt startete im Punkt $A(8|0|0)$ und wurde danach in den Punkten $B(6|1|2)$, $C(4|2|4)$, $D(0|4|4)$ und $E(-4|6|2)$ geortet (siehe Skizze). (1Längeneinheit = 1 km) Der Flug erfolgte zwischen A und C und zwischen D und E geradlinig, dabei zwischen B und C mit einer konstanten Geschwindigkeit.



6.1 Geben Sie die Koordinaten eines Punktes P an, der auf der Flugbahn zwischen A und B liegt und nicht Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist.

6.2 Das Flugobjekt legte die Strecke $\overline{BC}$ in genau 1 min zurück.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit für dieses Teilstück.

6.3 Das Flugobjekt landet unter Beibehaltung der Flugrichtung $\overrightarrow{DE}$ im Punkt L der x-y-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes L.

6.4 Zeigen Sie, dass der Flug von A nach L gänzlich in ein und derselben Ebene ε erfolgt sein kann.

Erwartungsbild zu Aufgabe P1 / Analysis

1.1 Koordinaten der lokalen Extrempunkte von G:

$f'(x) = 3x^2 - 2x;$ $\qquad f''(x) = 6x - 2$

$f'(x_E) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x_E^{\,2} - 2x_E = 0, \quad$ also $\quad x_E(3x_E - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad x_{E_1} = 0, \quad x_{E_2} = \frac{2}{3}$

$f''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E_1} = 0$ lokale Maximumstelle

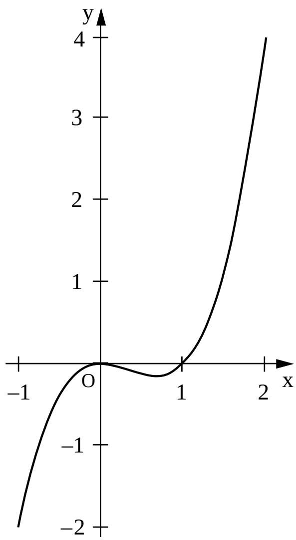
$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{Max}(0 \mid 0)$

$f''(\frac{2}{3}) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E_2} = \frac{2}{3}$ lokale Minimumstelle

$f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9} \cdot (-\frac{1}{3}) = - \quad \Rightarrow \quad P_{Min}(\frac{2}{3} \mid -\frac{4}{27}) = P_{Min}(0{,}\bar{6} \mid \approx -0{,}15)$

Graph der Funktion f im Intervall $-1 \le x \le 2$:

x	$f(x) = x^2(x-1)$
–1	–2
–0,5	–0,375
0	0
1	0
1,5	1,125
2	4



Größe des Schnittwinkels:

Wegen $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1$ hat G im Punkt $P(1 \mid 0)$ den Anstieg $m = 1$

$\Rightarrow \quad \alpha = 45°$

G schneidet den positiven Teil der x-Achse unter einem Winkel von 45°.

1.2 Monotonieuntersuchung:

Folge (a_n) mit $a_n = 2(n-1) = 2n - 2; \quad n \in \mathbb{N}, n \ge 1$

$a_{n+1} = 2(n+1) - 2 = 2n$

$a_{n+1} - a_n = 2n - (2n - 2) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad (a_n)$ ist monoton wachsend

Folge (b_n) mit $b_n = n^2 - n; \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$b_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$

$b_{n+1} - b_n = n^2 + n - (n^2 - n) = 2n > 0 \quad \Rightarrow \quad (b_n)$ ist monoton wachsend

Bestimmung der Summe s:

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0 & s_1 = 0 \\ a_2 = 2 & s_2 = 0 + 2 = 2 \\ a_3 = 4 & s_3 = 2 + 4 = 6 \\ a_4 = 6 & s_4 = 6 + 6 = 12 \\ \vdots & \vdots \\ & s_n = n(n-1) \end{array}$$

$s_{20} = 20 \cdot (20 - 1) = 380$

Hinweis: Da die – zwar offensichtliche – Formel für s_n eigentlich erst bewiesen werden müsste, kann auch die Summenformel für eine arithmetische Folge mit $a_1 = 0$, $d = 2$ und $n = 20$ angewendet werden:

$$s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \quad \Rightarrow \quad s_{20} = 20 \cdot 0 + \frac{20 \cdot 19 \cdot 2}{2} = 380$$

Bestimmung des Gliedes b_k der Folge (b_n), mit $b_k = 380$:

$$380 = k^2 - k, \quad \text{also}$$

$$0 = k^2 - k - 380$$

$$k_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1520}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{39}{2}, \quad \text{also} \quad k_1 = 20 \ \ (k_2 = -19 \ \text{entfällt})$$

Damit gilt: $b_{20} = 380$

Ermitteln der Grenzwerte:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2(n-1)}{n^2 - n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{(a_n)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - n}{4(n-1)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - n}{4n^2 - 8n + 4} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(4 - \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{1}{4}$$

Bewertungsvorschlag:

1.1	Lokale Extrempunkte	4 BE
	Zeichnung	2 BE
	Schnittwinkel	1 BE
1.2	Monotonie	2 BE
	Partialsumme	2 BE
	Wert s	2 BE
	Grenzwerte	2 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P2 / Geometrie

2.1 Zu zeigen ist: △ ABC ist gleichschenklig

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169} = 13;$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{144+16+9} = \sqrt{169} = 13$

Wegen $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$ ist △ ABC gleichschenklig.

Größe der Innenwinkel im △ ABC:

$\cos\sphericalangle ABC = \cos\sphericalangle(\overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{BC}) = \left|\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\right|; \quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{BC}) = \frac{96+4-27}{\sqrt{169}\cdot\sqrt{146}} = \frac{73}{\sqrt{24674}} \approx 0{,}4647 \Rightarrow$

$\sphericalangle(\overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{BC}) = \sphericalangle ABC = 62{,}31°$

Da △ ABC gleichschenklig mit $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$, folgt:

$\sphericalangle BCA = 62{,}31°$ und damit $\sphericalangle CAB = 180° - 2\cdot 62{,}31° = 55{,}38°$

Flächeninhalt des △ ABC:

$A_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\sphericalangle(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\sphericalangle CAB$

$= \frac{1}{2}\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot 0{,}822938 \ \text{(FE)}$

$A_{ABC} \approx 69{,}54$ FE

2.2 Behauptung: $D \in g_{AB}$

g_{AB}: $\quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB}; \ t \in \mathbb{R}, \ 0 \le t \le 1$

(für Punkte der Strecke $\overline{AB}$)

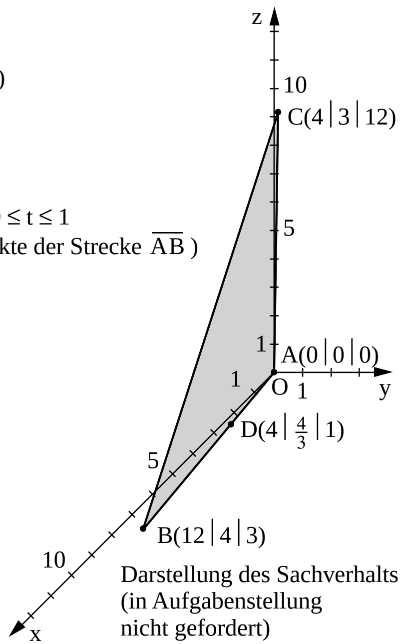
Punktprobe:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad D(4 \mid \frac{4}{3} \mid 1)$

$4 = 12t$, also $t = \frac{1}{3}$

$\frac{4}{3} = 4t$, also $t = \frac{1}{3} \Rightarrow D \in g_{AB}$

$1 = 3t$, also $t = \frac{1}{3}$



Darstellung des Sachverhalts
(in Aufgabenstellung
nicht gefordert)

Lösungsvariante:

$\overrightarrow{AD} = r\overrightarrow{AB}$ mit $r \in \mathbb{R},\ 0 \le r \le 1$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für $r = \frac{1}{3}$ erhält man eine wahre Aussage. Damit gilt: $D \in g_{AB}$

2.3 Bestimmen von r und s:

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \\ -11 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB} = r\cdot\overrightarrow{CD} + s\cdot\overrightarrow{CA}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \\ -11 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{llcll} \text{(I)} & 8 & = & 0\cdot r - 4s & \Rightarrow \quad s = -2 \\ \text{(II)} & 1 & = & -\frac{5}{3}r - 3s & \qquad 1 - \frac{5}{3}r + 6 \\ \text{(III)} & -9 & = & -11r - 12s & \qquad r = 3 \\ \hline \text{In (III)} & -9 & = & -11\cdot 3 - 12\cdot(-2) & \\ & -9 & = & -9 & \qquad \text{wahre Aussage} \end{array}$$

Also gilt: $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{CA}$

Bewertungsvorschlag:

2.1	Nachweis gleichschenkliges Dreieck	2 BE
	Innenwinkel, Flächeninhalt	5 BE
2.2	Punktprobe	2 BE
2.3	Werte für r und s	2 BE
		11 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P3 / Stochastik

3.1 a) A_1: „Mehr als eine Sechs“; $A_1 \in \Omega$

$A_1 = \{(6; 6; 6),\ (x; 6; 6),\ (6; x; 6),\ (6; 6; x) \mid x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}\}$

$A_1 = 16$

$P(A_1) = \frac{16}{6^3} = \frac{2^4}{2^3\cdot 3^3} = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27} \approx 0{,}074$

b) X: Anzahl der „Sechsen“ in (x, y, z); $(x, y, z) \in \Omega$

Werte der Zufallsgröße sind also 0; 1; 2; 3; $p = \frac{1}{6}$; $1 - p \cdot \frac{5}{6}$; $n = 3$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{6^3}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{6^3}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{6^3}$$

$$E(X) = 0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1 \cdot \frac{75}{6^3} + 2 \cdot \frac{15}{6^3} + 3 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{108}{216} = 0{,}5$$

c) Y – Zufallsgröße:

Y gibt den Gewinn der Bank in D-Mark in Abhängigkeit von X an.

$X = 0 \Rightarrow Y = 3$ (3 – 0)
$X = 1 \Rightarrow Y = -2$ (3 – 5)
$X = 2 \Rightarrow Y = -7$ (3 – 10)
$X = 3 \Rightarrow Y = -12$ (3 – 15)

Der Erwartungswert dieser Zufallsgröße Y gibt den „durchschnittlichen“ Gewinn an.

$$E(Y) = 3 \cdot P(X = 0) - 2 \cdot P(X = 1) - 7 \cdot P(X = 2) - 12 \cdot P(X = 3)$$

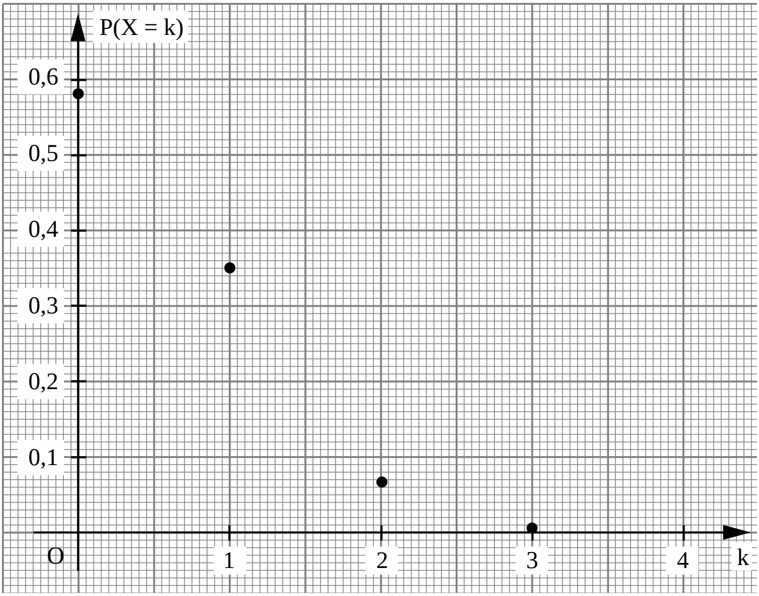
$$= 3 \cdot \frac{125}{6^3} - 2 \cdot \frac{75}{6^3} - 7 \cdot \frac{15}{6^3} - 12 \cdot \frac{1}{6^3}$$

$$= \frac{1}{6^3} (375 - 150 - 105 - 12) = \frac{108}{216} = 0{,}5$$

Also kann die Spielbank langfristig mit einem Gewinn von durchschnittlich 0,50 DM pro Spiel rechnen.

3.2 Grafische Darstellung:

k	0	1	2	3
P(X = k)	0,58	0,35	0,069	0,0046



Bewertungsvorschlag:

3.1 a) Wahrscheinlichkeit	1 BE
b) Erwartungswert	2 BE
c) Gewinnaussicht auf lange Sicht	1 BE
3.2 Grafische Darstellung	2 BE
	6 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4 / Analysis

4.1 Nullstelle von f:

$0 = \frac{8-4x}{x^2}$, also $8 - 4x = 0, \quad x \neq 0$

$x_N = 2$

Polstelle von f:

$x_P = 0$

Lokale Extremstelle von f:

$f(x) = \frac{8-4x}{x^2} = \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x} = 8 \cdot x^{-2} - 4 \cdot x^{-1};$

$f'(x) = -16x^{-3} + 4x^{-2};$

$f''(x) = 48x^{-4} - 8x^{-3}$

x_E ist lokale Extremstelle von f, wenn

a) $\frac{4}{x_E^2} - \frac{16}{x_E^3} = 0$ und b) $\frac{48}{x_E^4} - \frac{8}{x_E^3} \neq 0$

zu a): $\frac{4}{x_E^2} - \frac{16}{x_E^3} = 0$ also $\frac{4}{x_E^2} = \frac{16}{x_E^3}$ $\Rightarrow$ $4x_E^3 = 16x_E^2$

$x_E^2(4x_E - 16) = 0$ $\Rightarrow x_E = 0 \notin D_f;$

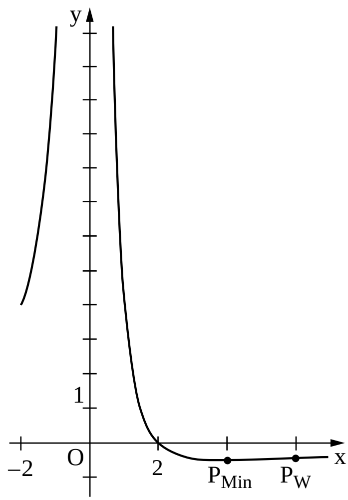
$4x_E - 16 = 0,$ also $x_E = 4$

Zu b): $f''(4) = \frac{48}{4^4} - \frac{8}{4^3} = \frac{3}{4^2} - \frac{2}{4^2} = \frac{1}{16} \neq 0$

$\Rightarrow$ $x_E = 4$ ist lokale Extremstelle von f.

Grafische Darstellung von f im Intervall $-2 \leq x \leq 7$:

x	$f(x) = \frac{8-4x}{x^2}$
–2	4
–1,5	$6,\overline{2}$
–1	12
0	–
1	4
2	0
3	$-0,\overline{4}$
4	–0,5
5	–0,48
6	$-0,\overline{4}$
7	–0,41



Behauptung: Der Graph von f hat genau einen Wendepunkt.

x_W ist Wendestelle von f, wenn gilt a) $f''(x_W) = 0$ b) $f'''(x_W) \neq 0$

zu a) $f''(x_W) = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{48}{x_W^4} = \frac{8}{x_W^3}$, also $8x_W^4 - 48x_W^3 = 8x_W^3(x_W - 6)$

$\Rightarrow$ $x_W = 0 \notin D_f$; $x_W = 6$

zu b) $f'''(x_W) = -192x^{-5} + 24x^{-4}$; $f'''(6) = \frac{192}{6^5} + \frac{24}{6^4} = -\frac{32}{6^4} + \frac{24}{6^4} = \frac{-8}{6^4} \neq 0$

Daraus folgt:

f besitzt genau einen Wendepunkt. ($P_W(6 \mid -\frac{4}{9})$ – Angabe nicht verlangt)

4.2 Abstand der Schnittpunkte:

Aus $y = 40$ und $y = f(x) = \frac{8-4x}{x^2}$ folgt

$40 = \frac{8-4x}{x^2}$, also $40x^2 + 4x - 8 = 0 \Rightarrow$

$x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0$ mit $x_1 = \frac{2}{5}$ $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Da die Schnittpunkte denselben y-Wert besitzen, ergibt sich ihr Abstand aus der Summe der Beträge ihrer Abszissen: $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4+5}{10} = \frac{9}{10}$

Abstand: 0,9 LE

4.3 Bestimmen der Werte für a und b:

$y = g(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + b}$

Aus der Darstellung kann man entnehmen:

(I) $g(-2) = 0$; (II) $g(2) = 0$; (III) $g(0) = -4$

Aus (I) folgt $\frac{4+a}{4+b} = 0 \Rightarrow a = -4$

Aus (III) und $a = -4$ folgt $\frac{0-4}{0+b} = -4 \Rightarrow b = 1$

Damit gilt: $y = g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

Bewertungsvorschlag:

4.1	Nullstelle, Polstelle, lokale Extremstelle	5 BE
	Skizze	2 BE
	Begründung für Wendepunkt	2 BE
4.2	Schnittpunkte und deren Abstand	3 BE
4.3	Bestimmen von a und b	2 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A5 / Analysis

5.1 Nullstellen von f:

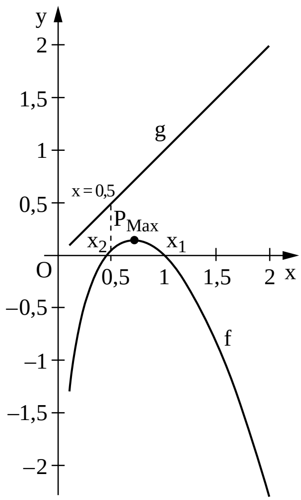
$0 = 1 - x_1^2 + \ln x_1 \Rightarrow x_1 = 1$ ist offensichtlich, denn

$0 = 1 - 1^2 + \underbrace{\ln 1}_{0}$.

Die zweite Nullstelle $x_2 \approx 0{,}5$ lässt sich z. B. durch Probieren ermitteln:
$1-(0{,}5)^2 + \ln 0{,}5 \approx 1 - 0{,}25 - 0{,}693 \approx 0$
Koordinaten des Extrempunktes von G_f:
$f'(x) = -2x + \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{1}{x}$, also $2x^2 = 1$ und damit $x^2 = \frac{1}{2}$.
$\Rightarrow \quad x = +\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \notin D_f)$
$f''(x) = -2 - \frac{1}{x^2}$; $\quad f''(\sqrt{\frac{1}{2}}) = -2-2 = -4 < 0$; $\quad f(\sqrt{\frac{1}{2}}) \approx 1 - \frac{1}{2} - 0{,}35 = 0{,}15$
$\Rightarrow \quad P_{Max}(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid 0{,}15)$
Wendepunkte von G_f:
$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 - \frac{1}{x^2} = 0$, also $-2x^2 = 1$.
Diese Gleichung besitzt in $\mathbb{R}$ keine Lösungen $\Rightarrow$ G_f hat keine Wendepunkte.

Grafische Darstellung von G_f und G_g:

x	$f(x) = 1 - x^2 + \ln x$
0,1	−1,31
0,2	−0,65
0,4	−0,08
0,5	0,06
$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}707$	0,15
1	0
1,5	−0,84
2	−2,31



5.2 Flächeninhalt:
$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1)$

$$\int_{0,5}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{0,5}^{2} [x - (1 - x^2 + \ln x)]\,dx$$
$$= \int_{0,5}^{2} (x^2 + x - 1 - \ln x)\,dx = [\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - x - x(\ln x - 1)]_{0,5}^{2}$$
$$= \frac{8}{3} + 2 - 2 - 2(\ln 2 - 1) - [0{,}041\overline{6} + 0{,}125 - 0{,}5 - 0{,}5(\ln 0{,}5 - 1)]$$
$$\approx 2{,}767 \approx 2{,}77 \quad (\text{FE})$$

5.3 Extremwertermittlung :

$D(x) = g(x) - f(x)$, d.h. $D(x) = x^2 + x - \ln x - 1$

$D'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x}$

$D'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 - \frac{1}{x} = 0$, also $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}}$, also $x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

($x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} < 0$ entfällt)

Nachweis:

$D''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$

$D''(\frac{1}{2}) = 2 + 4 = 6 > 0 \Rightarrow$ An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ ist $g(x) - f(x)$ minimal.

$(D(\frac{1}{2}) \approx 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}69 - 1 = 0{,}44$ (LE))

Bewertungsvorschlag:

5.1	Nullstellen	2 BE
	Extrempunkt Existenz von Wendepunkten	4 BE
	Skizze	2 BE
5.2	Flächeninhalt	3 BE
5.3	Extremwertermittlung	3 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A6 / Geometrie

6.1 Behauptung: A, B, C, D liegen in ein und derselben Ebene

Es genügt zu zeigen: $D \in \varepsilon_{ABC}$

ε_{ABC}: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} + r\overrightarrow{AC}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad t, r \in \mathbb{R}$$

Wenn $D \in \varepsilon_{ABC}$, dann muss gelten: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(I) $-8 = -8t - 12r$

(II) $0 = 6t + 3r$ $\Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

(III) $4 = 4r$ $\Rightarrow r = 1$

Eingesetzt in (I) erhält man die wahre Aussage $-8 = -8 \cdot (-\frac{1}{2}) - 12 \cdot 1 = -8$.

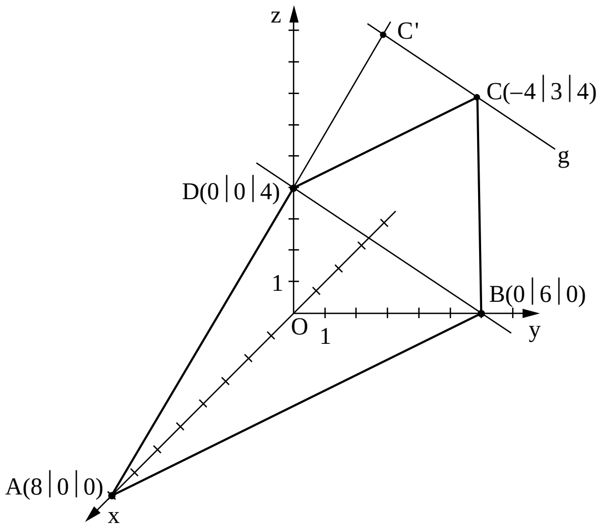
Daraus folgt: $D \in \varepsilon_{ABC}$

Lösungsvariante:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$ und $D \notin g_{AB}$, sind g_{AB} und g_{ED} zwei parallele Geraden, die eine Ebene aufspannen.

6.2 Darstellung des Vierecks ABCD:



6.3 Koordinaten des Punktes C':

g: $\quad \vec{x} = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{BD}, \quad$ da $g \parallel \overline{BD}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

g_{AB}: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Existiert ein Schnittpunkt C', dann gilt:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{llcl}
\text{(I)} & -4 = 8 - 8r & \Rightarrow & r = \frac{3}{2} \\
\text{(II)} & 3 - 6t = 0 & \Rightarrow & t = \frac{1}{2} \\
\text{(III)} & 4 + 4t = 4r & &
\end{array}
$$

Eingesetzt in (III) erhält man die wahre Aussage $4 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$,

d.h., g und g_{AB} schneiden einander in C'.

Koordinaten des Schnittpunktes C':

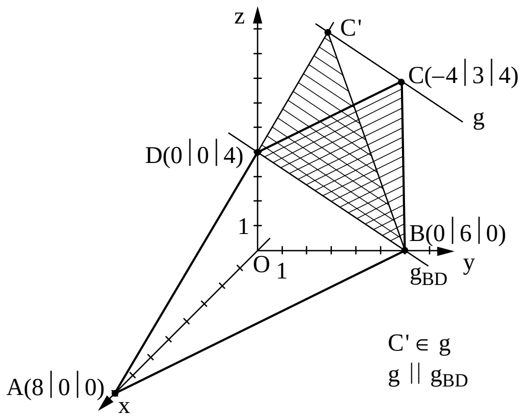
$$
\left.
\begin{array}{ll}
g: & \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\[2ex]
g_{AB}: & \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{array}
\right\} C'(-4|0|6)
$$

Koordinaten eines weiteren Punktes C'' auf g:

Für z.B. $t = -1$ erhält man:

$$
\overrightarrow{OC''} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C''(-4|9|0)
$$

6.4 Begründung für $A_{ABCD} = A_{ABC'}$:



Die Verschiebung des Punktes C auf der Geraden g erzeugt bezüglich der Grundseite $|\overline{BD}|$ flächengleiche Dreiecke △ DBC und △ DBC'. So gilt:

$A_{ABC'} = A_{ABD} + A_{DBC'} = A_{ABD} + A_{DBC} = A_{ABCD}$

Bewertungsvorschlag:

6.1	Nachweis	4 BE
6.2	Räumliche Darstellung	2 BE
6.3	Einzeichnen von g und C'	1 BE
	Koordinaten von C' und C"	5 BE
6.4	Begründung des gleichen Flächeninhalts	2 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B4 / Analysis

4.1 Berechnung der minimalen Weglänge:

Zielfunktion: $U = 3r + 2b$

Nebenbedingungen: $\left.\begin{array}{l} A_{MKL} = 600\ m^2 \\ A_{Teils.} = \frac{1}{2}\, r \cdot b \\ 2 \cdot A_{Teils.} = r \cdot b \end{array}\right\}\ 600 = r \cdot b \Rightarrow b = \frac{600}{r}$

Zielfunktion in Abhängigkeit von r:

$U(r) = 3r + \frac{1200}{r}$

$U'(r) = 3 - \frac{1200}{r^2}$

$U'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3r^2 = 1200, \quad \text{also } r^2 = 400$

$r = 20 \qquad (r = -20 \text{ entfällt})$

$U''(r) = \frac{2400}{r^3}; \quad U''(20) = \frac{2400}{8000} = 0{,}3 > 0 \Rightarrow$

r = 20 m ist ein lokaler Minimumwert.

Minimale Weglänge:

Aus r = 20 folgt $b = \frac{600}{20} = 30; \quad U(20) = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 30 = 120$

Minimale Weglänge: 120 m

4.2 Berechnung des maximalen Flächeninhalts:

Zielfunktion: $A = 4A_{Teils.} = 2r \cdot b$

Nebenbedingungen: $U = 5r + 4b = 200 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{200 - 4b}{5}$

Zielfunktion nur in Abhängigkeit von b:

$A(b) = 2 \cdot b \cdot \frac{200 - 4b}{5} = -\frac{8}{5}\, b^2 + 80b$

$A'(b) = -\frac{16}{5}\, b + 80; \quad A'(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{16}{5}\, b + 80 = 0, \quad \text{also} \quad b = \frac{400}{16} = 25$

Nachweis:
$A''(b) = -\frac{16}{5} < 0 \quad \Rightarrow \quad b = 25$ ist lokaler Maximumwert.

Inhalt der Fläche:
Mit $b = 25$ und $r = \frac{200 - 4 \cdot 25}{5} = 20$ ergibt sich
$A = 80 \cdot 25 - \frac{8}{5} \cdot 625 = 1000.$
Das Maximum des gesamten Flächeninhalts beträgt $A = 1000\ m^2$.

Bewertungsvorschlag:

4.1	Minimale Weglänge	7 BE
4.2	Maximum des Flächeninhalts	7 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B5 / Analysis

5.1 Nullstelle von g:

$g(x) = e^x(x + 1)$

$0 = e^{x_N}(x_N + 1) \quad \Rightarrow \quad (\text{da } e^{x_N} \neq 0 \text{ für alle } x)\ x_N + 1 = 0, \quad \text{also} \quad x_N = -1$

Koordinaten des Extrempunktes von G:

$g'(x) = e^x(x + 1) + e^x = e^x(x + 2); \quad g''(x) = e^x(x + 2) + e^x = e^x(x + 3)$

$g'(x_E) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{x_E}(x_E + 2) = 0, \quad \text{also} \quad x_E + 2 = 0 \ (\text{da } e^{x_E} \neq 0) \ \Rightarrow \ x_E = -2$

$$\left.\begin{aligned} g''(-2) &= e^{-2}(-2 + 3) = \frac{1}{e^2} > 0 \\ g(-2) &= e^{-2}(-2 + 1) = -\frac{1}{e^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad P_{Min}\left(-2 \,\middle|\, -\frac{1}{e^2}\right) \approx P_{Min}(-2 \,|\, -0{,}135)$$

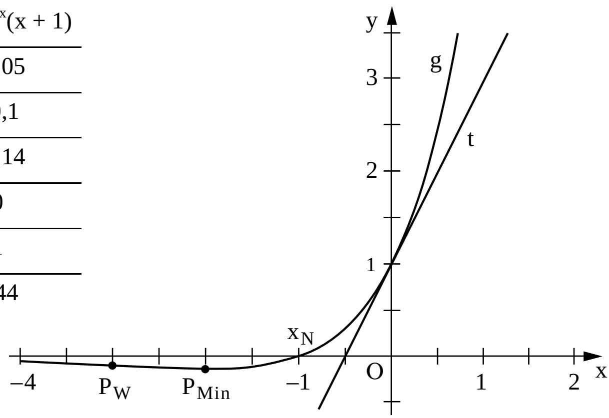
Koordinaten des Wendepunktes von G:

$g''(x_W) = 0 \ \Rightarrow \ e^{x_W}(x_W + 3) = 0, \quad \text{also} \quad x_W + 3 = 0 \ (\text{da } e^{x_W} \neq 0) \ \Rightarrow \ x_W = -3$

$$\left.\begin{aligned} g'''(x) &= e^x(x + 4) \\ g'''(-3) &= e^{-3}(-3 + 4) = -\frac{3}{e^3} < 0 \\ g(-3) &= e^{-3}(-3 + 1) = -\frac{2}{e^3} \end{aligned}\right\} P_W\left(-3 \,\middle|\, -\frac{2}{e^3}\right) \approx P_W(-3 \,|\, -0{,}09957)$$

Grafische Darstellung der Funktion g:

x	$g(x) = e^x(x + 1)$
–4	–0,05
–3	–0,1
–2	–0,14
–1	0
0	1
1	5,44



5.2 Tangentengleichung:

$P(0|1)$; $g'(x) = e^x(x + 2)$; $g'(0) = e^0(0 + 2) = 2 \Rightarrow m = 2$

Aus $1 = 2 \cdot 0 + n$ folgt $n = 1$ und damit t: $y = 2x + 1$.

5.3 Behauptung: $H(x) = xe^x$ ist eine Stammfunktion von g.

Wenn H(x) Stammfunktion von g ist, muss gelten:

$H'(x) = g(x)$ mit $g(x) = e^x(x + 1)$.

$H'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x) = g(x)$

Inhalt der Fläche A_k:

$$\left| \int_k^{-1} g(x)\,dx \right| = \left| [xe^x]_k^{-1} \right| = \left| -1 \cdot e^{-1} - ke^k \right| = ke^k + \frac{1}{e}$$

$A_k = (ke^k + \frac{1}{e})$ (FE); $k \in \mathbb{R}$, $k < -1$

Bewertungsvorschlag:

5.1	Nullstelle, Extrem- und Wendepunkt	5 BE
	Skizze	2 BE
5.2	Tangentengleichung	3 BE
5.3	Nachweis der Stammfunktion	2 BE
	Flächeninhalt in Abhängigkeit von k	2 BE
		14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B6 / Geometrie

6.1 Koordinaten eines Punktes P auf $\overline{AB}$:

$$\text{z.B.: } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}25\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 0{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow P(7{,}5|0{,}25|0{,}5)$$

6.2 Geschwindigkeit auf Teilstrecke $\overline{BC}$:

Allgemein: $v = \frac{s}{t}$, $s = |\overline{BC}|$, $t = 1$ min

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(4-6)^2 + (2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$v = \frac{3\,\text{km}}{1\,\text{min}} = 180\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Für die Teilstrecke $\overline{BC}$ beträgt die Geschwindigkeit $v = 180\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

6.3 Koordinaten des Punktes L:

$$g_{DE}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OD} + t\,\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

Alle Punkte der x-y-Ebene, also auch der Punkt $L \in g_{DE}$, haben die z-Koordinate 0. Also muss gelten: $4 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$

Damit ergibt sich:

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } L(-8|8|0)$$

6.4 Es ist zu zeigen: $A, B, C, D, E, L \in \varepsilon$:

Da $B \in \overline{AC}$ und $L \in g_{DE}$, genügt es zu zeigen: $E \in \varepsilon_{ACD}$; $E(-4|6|2)$.

$$\varepsilon_{ACD}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AC} + r\,\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ist $E \in \varepsilon_{ACD}$, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & -4 &=& 8 - 4t - 8r \\ \text{(II)} & 6 &=& 2t + 4r \\ \text{(III)} & 2 &=& 4t + 4r \\ \hline \text{(II)} - \text{(III)} & 4 &=& -2t \quad \Rightarrow \quad t = -2 \\ \text{Aus (II)} & 6 &=& 2\cdot(-2) + 4r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5}{2} \end{array}$$

Probe: I $-4 = 8 - 4 \cdot (-2) - 8 \cdot \frac{5}{2} = 8 + 8 - 20 = -4$ wahre Aussage

II $6 = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot \frac{5}{2} = -4 + 10 = 6$ wahre Aussage

III $2 = 4 \cdot (-2) + 4 \cdot \frac{5}{2} = -8 + 10 = 2$ wahre Aussage

$\Rightarrow \quad E \in \varepsilon_{ACD}$

Damit ist gezeigt, dass der Flug von A nach L, wie behauptet, gänzlich in ein und derselben Ebene erfolgt sein kann.

Bewertungsvorschlag:

6.1	Koordinaten von P	2 BE
6.2	Geschwindigkeit	3 BE
6.3	Koordinaten von L	4 BE
6.4	Nachweis	5 BE
		14 BE

Abiturprüfung Grundkurs

1998 / 99

Gymnasium

Sachsen

Aufgaben

(Ersttermin und Nachtermin)

Aufgabe A1: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$y = f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ und $y = g(x) = -x \cdot e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Die Gerade w ist Tangente an den Graph der Funktion f im Wendepunkt des Graphen (Wendetangente).

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an.
Geben Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die Art der Extrema der Funktion f an.
Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Wendetangente w.
Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz des Wendepunktes kann verzichtet werden.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 7)

b) Die Gerade h verläuft durch den Wendepunkt des Graphen der Funktion f und ist orthogonal zur Wendetangente w.
Durch die Geraden h und w und die x-Achse wird ein Dreieck bestimmt.
Durch die Geraden h und w und die y-Achse wird ein weiteres Dreieck bestimmt. Weisen Sie rechnerisch nach, dass beide Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

c) Die Graphen der Funktionen f und g besitzen genau zwei gemeinsame Punkte $S_1(x_1;\, y_1)$ und $S_2(4;\, y_2)$.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Graphen der Funktionen f und g nur in einem der beiden Punkte denselben Anstieg haben.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion G mit $y = G(x) = 4 \cdot (x+4)\, e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)} \quad (x \in \mathbb{R})$ eine Stammfunktion der Funktion g ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Stammfunktion der Funktion g, deren Graph durch den Punkt $P(4;\, -4)$ verläuft.
Die Graphen der Funktionen f und g begrenzen eine Fläche vollständig.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

e) Für jedes u $(u \in \mathbb{R},\ 0 < u < 4)$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $x = u$ den Graph der Funktion f im Punkt P_u und den Graph der Funktion g im Punkt Q_u. Für genau einen Wert u wird die Länge $l(u)$ der Strecke $\overline{P_u Q_u}$ maximal. Bestimmen Sie eine Gleichung der Zielfunktion l und ermitteln Sie diese maximale Streckenlänge.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Aufgabe A2: Analysis

Gegeben sind die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1}{6}x(x-8)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ und die Gerade g durch die Gleichung $y = 2x + 8$.

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an und berechnen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion f.
Weisen Sie die Art der Extrema nach.
Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.
Ermitteln Sie alle Argumente x, deren Funktionswert größer als das lokale Maximum der Funktion f ist.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 10)

b) Weisen Sie nach, dass die Gerade g Tangente an den Graphen der Funktion f ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung einer zur Geraden g parallelen Gerade, die ebenfalls Tangente an den Graphen der Funktion f ist.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

c) Die Gerade g und der Graph der Funktion f begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie deren Inhalt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Für jedes u $(u \in \mathbb{R},\ 0 < u < 8)$ sind der Punkt $P_u(u;\ f(u))$ und der Koordinatenursprung Eckpunkte eines zu den Koordinatenachsen achsenparallelen Rechtecks.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_u, dessen zugehöriges Rechteck den größtmöglichen Flächeninhalt unter allen so gebildeten Rechtecken besitzt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

e) Jede durch den Koordinatenursprung verlaufende Gerade hat mindestens einen gemeinsamen Punkt mit dem Graphen der Funktion f.
Ermitteln Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte dieser Geraden mit dem Graphen der Funktion f in Abhängigkeit vom Anstieg der Geraden.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe A3: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Gegeben sind die Funktionen f durch

$y = f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} \quad (x \in D_f)$

und g durch $y = g(x) = 2 \cdot \ln(x^2 + 1) \quad (x \in D_g)$.

a) Geben Sie für jede der beiden Funktionen den größtmöglichen Definitionsbereich sowie die Nullstellen an.
Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie des Graphen.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Unter allen Tangenten an den Graph der Funktion f existiert genau eine mit maximalem Anstieg.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}, a > 0$) ist eine Funktion f_a durch
$y = f_a(x) = a \cdot \frac{4x}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$ gegeben.

Weisen Sie nach, dass für jedes a ($a \in \mathbb{R}, a > 0; x \in \mathbb{R}$) die Funktion F_a mit
$y = F_a(x) = 2a \cdot \ln(x^2 + 1) \quad (x \in \mathbb{R})$ Stammfunktion der Funktion f_a ist.

Für jedes a wird durch den Graph der Funktion f_a, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = \sqrt{e - 1}$ eine Fläche vollständig begrenzt.
Ermitteln Sie den Wert a, für den der Inhalt dieser Fläche 8 beträgt.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe A4: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Gegeben sind die Funktionen f und g durch
$y = f(x) = \ln(2x - 1) \quad (x \in D_f)$ und
$y = g(x) = 2{,}5 \cdot \ln(x - 3) \quad (x \in \mathbb{R}, x > 3)$

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

b) Die Graphen beider Funktionen schneiden sich im Punkt S.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes S an.
Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Tangenten an die Graphen der Funktionen f und g im Punkt S.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit
$y = F(x) = \frac{1}{2} \cdot ((2x - 1) \cdot \ln(2x - 1) - (2x - 1))$
eine Stammfunktion der Funktion f ist.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Durch den Graphen der Funktion f, den Graphen der Funktion g und die x-Achse wird eine Fläche vollständig begrenzt.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

e) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 1$) begrenzen der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = a$ eine Fläche vollständig.
Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche für $a = 1{,}5$ die Maßzahl $\ln 2 - 0{,}5$ hat.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Aufgabe B1: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind vier in der Ebene E liegende Punkte $A(3;\, 0;\, -1)$, $B(4;\, -1;\, -2)$, $C(-1;\, 3;\, 1)$ und $D(-4;\, 6;\, 4)$ sowie die Punkte $P_t(2;\, t;\, -\frac{2}{3}t)$ $(t \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Trapez und kein Parallelogramm ist.
Zeigen Sie rechnerisch, dass das Trapez ABCD keinen rechten Winkel hat.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

b) Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Punktes P_t, der in der Ebene E liegt.
Untersuchen Sie, ob dieser Punkt Diagonalenschnittpunkt des Trapezes ABCD ist.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

c) Ermitteln Sie die Länge der Strecke $\overline{CD}$.
Auf der Geraden durch die Punkte C und D existiert ein Punkt C_1, so dass das Trapez ABC_1D den doppelten Flächeninhalt wie das Trapez ABCD hat.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_1.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe B2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(– 1; 1; 0), B(7; – 3; 0), C(4; 6; 0) und H(2; 2; 0) gegeben.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind, und begründen Sie, dass dieses Dreieck in der x-y-Koordinatenebene liegt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Berechnen Sie die Größe des Innenwinkels CBA des Dreiecks ABC.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC 30 beträgt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Punkt H der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC ist.
Die Punkte $S_i (i \in \mathbb{N})$ seien die Spitzen von Pyramiden $ABCS_i$ mit dem Höhenfußpunkt H.
Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes S_i so, dass das Volumen der zugehörigen Pyramide 100 beträgt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

d) Es existieren Punkte $P_i (i \in \mathbb{N})$ so, dass die Pyramiden $ABCP_i$ mit der Grundfläche ABC gleich lange Seitenkanten $\overline{AP_i}$, $\overline{BP_i}$ und $\overline{CP_i}$ haben.
Berechnen Sie die Koordinaten aller Punkte P_i, für die das Volumen der zugehörigen Pyramide $ABCP_i$ 100 beträgt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe B3: Geometrie / Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(4; 3; 0), B$\left(-1; \frac{1}{2}; 0\right)$ und C(5; 2; 0) gegeben.

a) Es existieren Kreise in der x-y-Koordinatenebene, die durch die Punkte A und B gehen.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Menge aller Mittelpunkte dieser Kreise.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Es gibt genau einen Kreis k, bei dem die Strecke $\overline{AB}$ Durchmesser ist.

b) Stellen Sie eine Gleichung des Kreises k auf.
Untersuchen Sie rechnerisch die Lage des Punktes C bezüglich des Kreises k.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Der Kreis k ist der Grundkreis eines geraden Kreiskegels K mit der Spitze $S(x;\ y;\ z > 0)$ und mit einem Volumen von $\frac{125}{8}\pi$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S.
Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen einer Mantellinie des Kreiskegels K und der Grundkreisebene (Neigungswinkel des Kreiskegels).

Durch parallel in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R},\ a < 0)$ einfallendes Licht wird für bestimmte Werte von a von dem lichtundurchlässigen Kreiskegel K ein „Schatten“ in der x-y-Koordinatenebene erzeugt.
Ermitteln Sie alle Werte a, für die ein solcher Schatten entsteht.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

Aufgabe B4: Geometrie / Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(10;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ 5;\ 9)$ und $C_a(3 + a;\ 4;\ 10 - a)$ $(a \in \mathbb{R})$ gegeben. Die Ebene E ist durch die Punkte A, B und C_2 bestimmt.

a) Stellen Sie für die Ebene E eine Gleichung in allgemeiner Form auf.
Die Punkte A, B und C_2 sind Eckpunkte eines Dreiecks.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob das Dreieck ABC_2 rechtwinklig ist.

Auf der Seite $\overline{AB}$ existiert ein Punkt D so, dass für das Verhältnis des Flächeninhaltes A_1 des Dreiecks ABC_2 zum Flächeninhalt A_2 des Dreiecks DBC_2 gilt:
$A_1 : A_2 = 1 : 5$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

b) Es existieren Dreiecke ABC_a, für die die Größe der Winkel BC_aA jeweils 90° beträgt.
Berechnen Sie für diese Dreiecke jeweils den Wert des Parameters a.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Alle Punkte C_a liegen in der Ebene E.
Ermitteln Sie rechnerisch alle Werte a, für die die Ebene E durch die Punkte A, B und C_a eindeutig bestimmt ist.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Aufgabe C 1: Stochastik

Die eingehenden Leserbriefe einer Jugendzeitschrift beschäftigen sich erfahrungsgemäß zu 45 % mit Thema „Liebe und Sexualität“, zu 25 % mit Thema „Musik“, zu 15 % mit Thema „Sport“ und zu 15 % mit Thema „Sonstiges“.
Es wird angenommen, dass sich jeder Brief genau einem der vier Themen zuordnen lässt.

a) Die eingehenden Zuschriften werden im Verlag auf vier in einer Reihe liegende Stapel sortiert, wobei jeder Stapel ein Thema repräsentiert.
Wie viele verschiedene Anordnungen der Stapel in dieser Reihe sind möglich?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

b) Die Zeitschrift lost unabhängig vom Thema unter allen Leserbriefen eines bestimmten Zeitraumes 5 Preise aus.
Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
Ereignis E: Alle 5 Preise gehen an Zuschriften zum Thema „Liebe und Sexualität“.
Ereignis F: Mindestens ein Preis geht an eine Zuschrift zum Thema „Musik“.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Jacqueline, die Sportredakteurin der Zeitschrift, benötigt dringend 5 Zuschriften zum Thema „Sport“.
Sie entnimmt der noch nicht sortierten Post 20 Zuschriften.
Wie viele Zuschriften zum Thema „Sport“ kann sie dabei erwarten?
Wie viele Zuschriften müsste sie der laufenden Post entnehmen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % wenigstens eine Zuschrift zum Thema „Sport“ erhält?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

d) Die Zeitschrift organisiert wöchentlich eine TV-Show, bei der ein Gast am Ende der Show genau einmal ein Glücksrad dreht, welches in 20 gleich große, von 1 bis 20 nummerierte Sektoren eingeteilt ist. Trifft der Gast den Sektor „1“, erhält er eine Reise für 2000 DM, trifft er einen Sektor, dessen Nummer die Ziffer 2 enthält, erhält er einen DISC-Man für 100 DM, bei allen anderen Sektoren eine Blümchen-CD für 30 DM.
Berechnen Sie den Geldbetrag, den die Zeitschrift längerfristig pro Veranstaltung für den Preis einkalkulieren muss.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

e) Jacqueline verleiht ihrer Freundin Franziska 10 Exemplare der Zeitschrift, bei denen in genau sechs Exemplaren der Sportbeitrag zum Thema Fußball, in genau zwei Exemplaren zum Thema Basketball und in genau zwei Exemplaren zum Thema Judo ist. Die Zeitschriften sind nicht geordnet. Franziska, die ein absoluter Fußball-Fan ist, prüft nun nacheinander die Zeitschriften, bis sie den ersten Beitrag zum Thema Fußball findet.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie diesen Beitrag in der zweiten gezogenen Zeitschrift findet.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie diesen Beitrag erst in der fünften gezogenen Zeitschrift findet.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Aufgabe C 2: Stochastik

Ein Glücksrad ist in 20 gleichgroße Sektoren unterteilt. Davon sind genau einer blau, genau einer rot und alle restlichen Sektoren weiß gefärbt. Bei einem Glücksspiel beträgt der Einsatz je Drehung 2 DM. Wird der rote Sektor bei einer Drehung ermittelt, erhält der Spieler 30 DM, beim blauen Sektor 10 DM ausgezahlt. Bei den weißen Sektoren wird nichts ausgezahlt. Die Ergebnisse der Drehungen sind voneinander unabhängig.

a) Bestimmen Sie die Höhe des Gewinns (Auszahlung abzüglich des Einsatzes), den ein Spieler bei einer Drehung erwarten kann.
Welcher Betrag sollte beim Ermitteln des roten Sektors an den Spieler gezahlt werden, wenn die anderen Bedingungen bleiben und der Betreiber des Glücksrades durchschnittlich 0,20 DM je Drehung „verdienen“ will?

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Wie viele Drehungen müssen mindestens durchgeführt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einmal den roten Sektor zu ermitteln, mindestens 95 % beträgt?

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Ein weiteres Glücksrad ist in 10 gleichgroße Sektoren unterteilt. Die Ergebnisse der Drehungen sind voneinander unabhängig. Nach jeder Drehung wird der ermittelte Sektor markiert. Das Rad wird zehnmal gedreht.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der danach alle 10 Sektoren markiert sind.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Das in Aufgabenteil c) beschriebene Glücksrad wird zweimal gedreht und die ermittelten Sektoren werden markiert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der danach zwei markierte Sektoren nebeneinander liegen.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

e) Ein „elektronisches Glücksrad" in einem Spielautomaten ist so programmiert, dass sich die Gewinnchance mit zunehmender Anzahl von Versuchen eines Spielers in einer Serie verringert. Die Gewinnwahrscheinlichkeit P_G wurde dafür in Abhängigkeit von der Anzahl z der Versuche durch $P_G(Z) = \frac{1}{2\sqrt{z+2}}$ definiert.

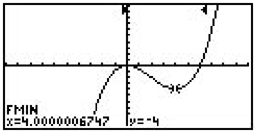
Jacqueline behauptet, nach 20 Versuchen sei die Gewinnwahrscheinlichkeit noch größer als 10 %.
Überprüfen Sie diese Behauptung.
Franziska möchte das Spiel abbrechen, bevor die Gewinnchance kleiner als 0,07 ist.
Ermitteln Sie, nach welchem Versuch Franziska das Spiel spätestens beenden muss.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Erwartungsbild zu Aufgabe A1: Analysis

a) Nullstellen der Funktion f: $x_1 = 0$; $x_2 = 6$

(Ermittlung mit TRACE, Verwendung des ROOT-Befehls oder Lösung der Gleichung $0 = x^2(\frac{1}{8}x - \frac{3}{4})$)



Koordinaten der lokalen Extrempunkte:

$P_{max}(0; 0)$ (lokales Maximum)

$P_{min}(4; -4)$ (lokales Minimum)

(Ermittlung mit TRACE, Verwendung des FMAX- bzw. FMIN-Befehls)

Gleichung der Tangente w:

$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

Wendestelle: $f''(x_w) = 0$; $\frac{3}{4}x_w = \frac{3}{2}$; $x_w = 2$

Koordinaten des Wendepunktes: $P_w(2; -2)$

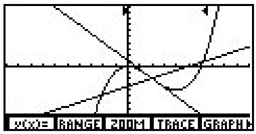
Anstieg der Wendetangente: $f'(2) = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$

Ansatz für Gleichung der Tangente: $-2 = -\frac{3}{2} \cdot 2 + n \Rightarrow n = 1$

Gleichung der Wendetangente w: $y = -\frac{3}{2}x + 1$

(Zur Kontrolle kann die Tangente im GTR-Bild eingezeichnet werden.)

b) Anstieg der Geraden h: $m_h = -\frac{1}{m_w} = \frac{2}{3}$



Gleichung der Geraden h:

$y = \frac{2}{3}x + n \Rightarrow -2 = \frac{2}{3} \cdot 2 + n$, also $n = -\frac{10}{3}$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

Abszissen der Schnittpunkte der Geraden mit der x-Achse:

w: $0 = -\frac{3}{2}x + 1$; h: $0 = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$

$x_1 = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $x_2 = 5$

Ordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der y-Achse:

w: $y_3 = 1$; h: $y_4 = -\frac{10}{3}$

Dreieck D_1: Grundseite g: $5 - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}$; Höhe h: $|-2| = 2$

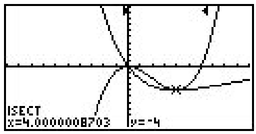
Flächeninhalt A_1: $A_1 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\frac{13}{3} \cdot 2}{2} = \frac{13}{3}$

Dreieck D_2: Grundseite g: $1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3}$; Höhe h: 2

Flächeninhalt A_2: $A_2 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\frac{13}{3} \cdot 2}{2} = \frac{13}{3}$

$\Rightarrow A_1 = A_2$ w.z.b.w.

c) Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen f und g:
$S_1(0; 0)$; $S_2(4; -4)$:
(Ermittlung mit TRACE, INTERSECTION-Befehl)



Der gemeinsame Anstieg wird bei S_2 vermutet.
1. Ableitung der Funktion g:

$u = -x$; $u' = -1$; $v = e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)}$; $v' = -\frac{1}{4} \cdot e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)}$

$g'(x) = -e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)} + x \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)} = e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)} \cdot \left(-1 + \frac{1}{4}x\right)$

$g'(4) = e^0 \cdot (-1 + 1) = 0$; $f'(4) = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ Die Funktionen f und g haben im Punkt $S_2(4; -4)$ denselben Anstieg.

Nachweis, dass im Punkt S_1 nicht derselbe Anstieg vorliegt:

$g'(0) = e^1 \cdot (-1) = -e$; $f'(0) = 0 \Rightarrow$ Die Funktionen f und g haben im Punkt $S_1(0; 0)$ nicht denselben Anstieg.

Damit ist gezeigt, dass die Graphen der Funktionen in genau einem der beiden Punkte denselben Anstieg besitzen.

d) Nachweis der Stammfunktion:

$G(x) = 4 \cdot (x+4) \cdot e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)}$; $u = (x+4)$; $u' = 1$; $v = e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)}$; $v' = -\frac{1}{4} e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)}$

$G'(x) = 4 \cdot \left[e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)} + (x+4) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)}\right] = 4\, e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)} \cdot \left(1 + (x+4) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\right)$

$= e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)} \cdot (4 + (x+4) \cdot (-1)) = e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)} \cdot (4 - x - 4) = -x\, e^{\left(-\frac{x}{4}+1\right)}$

w.z.b.w.

Gleichung der speziellen Stammfunktion $\tilde{G}$:
P(4; – 4)

$$y = 4 \cdot (x + 4) \cdot e^{\left(-\frac{x}{4} + 1\right)} + c$$

$$-4 = 4 \cdot 8 \cdot e^{0} + c \Rightarrow -4 = 32 + c, \text{ also } c = -36$$

$$\tilde{G}(x) = 4 \cdot (x + 4) \cdot e^{\left(-\frac{x}{4} + 1\right)} - 36$$

Flächeninhalt:
Lösungsvariante 1:

$$A = \int_0^4 (f(x)) - g(x))\, dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x \cdot e^{\left(-\frac{x}{4} + 1\right)}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 4 \cdot (x + 4) \cdot e^{\left(-\frac{x}{4} + 1\right)}\right]_0^4$$

$$= 8 - 16 - 32 \cdot e^{0} - 0 + 16e = -40 + 16e \approx 3{,}49$$

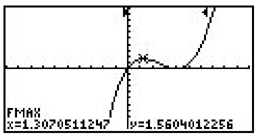
Lösungsvariante 2:
Nutzung eines GTR-Programmes zur numerischen Integration liefert:

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2\right) dx = -8; \quad \int_0^4 \left(-x \cdot e^{\left(-\frac{x}{4} + 1\right)}\right) dx = -11{,}49; -8 - (-11{,}49) = 3{,}49$$

e) Zielfunktion: $l(u) = f(u) - g(u)$

$$l(u) = \frac{1}{8}u^3 - \frac{3}{4}u^2 + u \cdot e^{\left(-\frac{u}{4} + 1\right)} \qquad (0 < u < 4)$$

Lösungsvariante 1:
Die Zielfunktion wird mit dem GTR dargestellt und im angegebenem Intervall auf Maxima untersucht.
(TRACE oder FMAX-Befehl)



u = 1,307
Die gesuchte Streckenlänge ist l(1,307) = 1,56.

Lösungsvariante 2:

$$l'(u) = \frac{3}{8}u^2 - \frac{3}{2}u + e^{\left(-\frac{u}{4}+1\right)} \cdot \left(1 - \frac{u}{4}\right)$$

Untersuchung der Funktion l' auf Nullstellen: $u_1 = 1{,}307$ (trifft zu); $u_2 = 4$ (entfällt)
Die gesuchte Streckenlänge ist $l(u_1) = 1{,}56$.

Bewertungsvorschlag:

a) Nullstellen; Koordinaten der lokalen Extrempunkte; Art der Extrema; 1. Ableitung; Wendestelle; Anstieg der Wendetangente; Gleichung der Wendetangente — 7 BE

b) Anstieg der Geraden h; Gleichung der Geraden h; Abszissen der Schnittpunkte der Geraden h und w mit der x-Achse; Grundseiten und Höhen der beiden Dreiecke; Schlussfolgerung — 5 BE

c) Koordinaten des Punktes S_1; Koordinaten des Punktes S_2; 1. Ableitung der Funktion g; Anstieg der Graphen für x = 4; Anstiege der Graphen für x = 0 und Schlussfolgerung — 5 BE

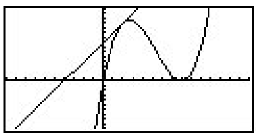
d) Erkennen der notwendigen Ableitungsregeln; Nachweis der Stammfunktion; Ansatz für spezielle Stammfunktion; spezielle Stammfunktion; Ansatz für Flächeninhalt; Flächeninhalt — 6 BE

e) Zielfunktion; maximale Streckenlänge — 2 BE

25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A2: Analysis

Gegeben sind die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1}{6}x \cdot (x-8)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = 2x + 8$.
Die Abbildung vermittelt einen Eindruck vom Graphen der Funktion f und der Geraden g:



Für die weiteren Berechnungen ist es z. T. günstig, den Funktionsterm auszumultiplizieren.

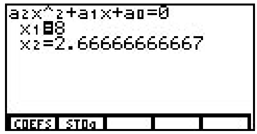
$$f(x) = \frac{1}{6}x \cdot (x-8)^2 = \frac{1}{6}x \cdot (x^2 - 16x + 64) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{32}{3}$$

a) Nullstellen: $0 = \frac{1}{6}x \cdot (x-8)^2 \Rightarrow x_{N_1} = 0; x_{N_2} = 8$

Extremstellen:

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{32}{3}$; $f''(x) = x - \frac{16}{3}$; $f'''(x) = 1$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{32}{3}$



Lösen der quadratischen Gleichung mit dem GTR liefert: $x_{E_1} = 2{,}\overline{6}$ und $x_{E_2} = 8$

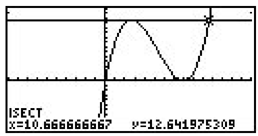
Nachweis der Extrema mithilfe der 2. Ableitung:
$f''(2{,}\overline{6}) = -2{,}\overline{6} \Rightarrow$ lokales Maximum; $f''(8) = 2{,}\overline{6} \Rightarrow$ lokales Minimum
Die Ergebnisse sollten grafisch überprüft werden.

Koordinaten des Wendepunktes:

$f''(x_w) = 0$, also $0 = x - \frac{16}{3} \Rightarrow \quad x_w = \frac{16}{3}$; $f'''(\frac{16}{3}) = 1 \Rightarrow$ Wendepunkt existiert.

$f(\frac{16}{3}) = (\frac{1}{6} \cdot \frac{16}{3}) \cdot (-\frac{8}{3})^2 = \frac{512}{81}$; $P_w(\frac{16}{3}; \frac{512}{81})$

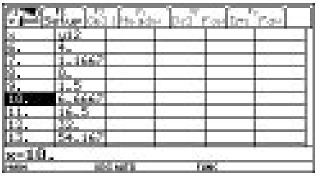
Lokales Maximum: $f(2{,}\overline{6}) \approx 12{,}64$ (Ermittlung mit GTR-Befehl FMAX oder mit Trace)

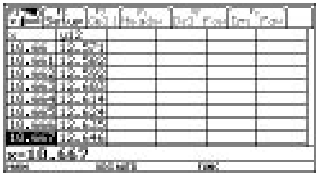


Darstellen der konstanten Funktion y = 12,64 und
suchen der Schnittstelle des Graphen dieser Funktion mit dem Graphen der Funktion f (INTERSECTION) liefert: $x_s = 10{,}\overline{6}$.

Antwort: Für alle $x > 10{,}\overline{6} \quad (x \in \mathbb{R})$ ist der zugehörige Funktionswert größer als das lokale Maximum der Funktion f.

Lösungsvariante der letzten Teilaufgabe:
Ermitteln des lokalen Maximums und Anlegen einer Wertetabelle mit dem GTR bei hinreichend kleiner Schrittweite. Ablesen, für welche Argumente x die zugehörigen Funktionswerte größer als 12,64 sind.





b) Die Gerade g ist dann Tangente an den Graphen der Funktion f, wenn der Anstieg der Gerade gleich der ersten Ableitung der Funktion ist.
$2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{32}{3} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{26}{3}$

Lösungen mit GTR ermittelt: $x_{B_1} = 2$ und $x_{B_2} = 8{,}\overline{6}$.

Aus dem Bild des Graphen (GTR) wird klar: Nur der Punkt B(2; f(2)) ist möglicher Berührungspunkt.
Nachweis, dass der Punkt B auf der Geraden g liegt:
$f(2) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (-6)^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad B(2;\, 12)$

Einsetzen in Gleichung der Geraden: $2 \cdot 2 + 8 = 12 \Rightarrow 12 = 12$ (wahre Aussage)
B ist gemeinsamer Punkt der Geraden g und des Graphen der Funktion f; in B haben beide denselben Anstieg und B ist kein Wendepunkt von f. Deshalb ist die Gerade g Tangente an den Graphen der Funktion f.

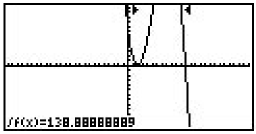
Lösungsvariante:
Aufstellen der Gleichung der Tangente im Punkt B liefert:
$y = 2 \cdot x + n \quad \Rightarrow \quad 12 = 2 \cdot 2 + n \quad \Rightarrow \quad n = 8; \qquad y = 2 \cdot x + 8$
Diese Gleichung beschreibt auch die Gerade g.

Parallele Gerade:
Der Anstieg 2 tritt nur noch an der Stelle $x_{B2} = 8{,}\overline{6}$ auf.
$y = 2 \cdot 8{,}\overline{6} + n$; $f(8{,}\overline{6}) = 0{,}642$; $\Rightarrow$ $0{,}642 = 2 \cdot 8{,}\overline{6} + n$, also $n \approx -16{,}69$.
Gleichung der Parallelen: $y = 2x - 16{,}69$
(Kontrolle der Lösung mit dem GTR wird empfohlen.)

c) Ermitteln der Schnittstellen der Geraden g mit dem Graphen der Funktion f:
$x_{S1} = 2$ und $x_{S2} = 12$ (mithilfe von INTERSECTION-Befehl oder TRACE)

Flächeninhalt:

$$A = \int_2^{12} \left(2x + 8 - \left(\frac{1}{6}x \cdot (x-8)^2\right)\right) dx \approx 138{,}9 \text{ (FE)}$$



(Darstellen der Integrandenfunktion und Nutzung des Integrationsbefehls im Grafik-Modus oder Nutzung eines Programms zur Berechnung bestimmter Integrale)

d) Zielfunktion:

$A(u) = u \cdot f(u) \quad (0 < u < 8)$

$= u \cdot \frac{1}{6} u \cdot (u-8)^2 = \frac{1}{6} u^4 - \frac{8}{3} u^3 + \frac{32}{3} u^2$

$A'(u) = \frac{2}{3} u^3 - 8u^2 + \frac{64}{3} u$; $A''(u) = 2u^2 - 16u + \frac{64}{3}$

$A'(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = u(\frac{2}{3} u^2 - 8u + \frac{64}{3})$

$x_{E1} = 0$ (entfällt); $x_{E2} = 4$ (trifft zu); $x_{E3} = 8$ (entfällt); (Lösung mit GTR)

$A''(4) = 32 - 64 + \frac{64}{3} = -\frac{32}{3}$ $\quad \Rightarrow$ lokales Maximum

$f(4) = \frac{32}{3}$ $\quad \Rightarrow$ $P_4(4; \frac{32}{3})$

e) Jede monoton fallende Gerade durch den Koordinatenursprung besitzt mit dem Graph der Funktion f genau einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Koordinatenursprung.
Steigt die Gerade ebenso wie der Graph der Funktion f im Koordinatenursprung oder ist der Anstieg 0, so existieren genau zwei Schnittpunkte.
Steigt die Gerade „flacher“ oder „steiler“ als der Graph der Funktion f im Koordinatenursprung, so existieren genau drei Schnittpunkte.

Der Anstieg m des Graphen im Koordinatenursprung entspricht der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x = 0. Daraus folgt:

$m = \frac{32}{3}$ oder $m = 0$ $\quad \Rightarrow$ genau zwei gemeinsame Punkte

$m > 0$ und $0 < m \neq \frac{32}{3}$ $\quad \Rightarrow$ genau drei gemeinsame Punkte

$m < 0$ $\quad \Rightarrow$ genau ein gemeinsamer Punkt

Bewertungsvorschlag:

a) Nullstellen; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Extremstellen; Nachweis der Art der Extrema; Wendestelle; Koordinaten des Wendepunktes; Nachweis der Existenz des Wendepunktes; Ansatz für Argumente; Angabe der Argumente — 10 BE

b) Ansatz; Berührungsstellen; Nachweis des Berührungspunktes; Ansatz für weitere Tangente; Gleichung dieser Tangente — 5 BE

c) Integrationsgrenzen; Flächeninhalt — 2 BE

d) Zielfunktion; erste Ableitung; Lösungen der kubischen Gleichung; Nachweis des Maximums; Koordinaten des Punktes P_u — 5 BE

e) Anstieg des Graphen im Koordinatenursprung; Angabe der Anzahl für einen Fall; Angabe der Anzahl aller Fälle — 3 BE

25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A3: Analysis

a) Definitionsbereiche: $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ $D_g = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

Nullstellen der Funktion f: $x_N = 0$

Nullstellen der Funktion g: $x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x_N = 0$

Symmetrie: $f(-x) = \frac{-4x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{4x}{-x^2 + 1} = -f(x)$

$\Rightarrow$ zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung

b) *Lösungsvariante 1:*

Anschaulich wird aus dem GTR-Bild klar, dass es sich nur um die Tangente im Koordinatenursprung handeln kann. Das Ablesen der 1. Ableitung an der Stelle 0 ergibt 4.

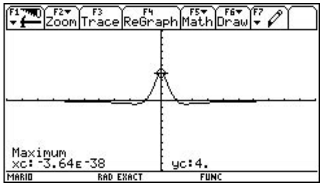
Gleichung der Tangente: $y = 4x$

Lösungsvariante 2:

Bei maximalem Anstieg muss die 1. Ableitung der Funktion auf Maxima untersucht werden.

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

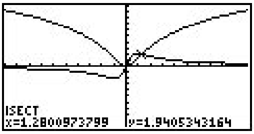
Darstellung des Graphen der Funktion f' und Untersuchung auf Maxima liefert:

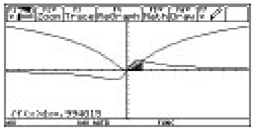


Der maximale Anstieg liegt bei x = 0 vor.
Die erste Ableitung an dieser Stelle beträgt 4.
Gleichung der Tangente: y = 4x

c) Inhalt der eingeschlossenen Fläche:
Ermitteln der Schnittstellen mit INTERSECTION bzw. TRACE liefert:
$x_{S1} = 0$ und $x_{S2} \approx 1{,}28$

$$A = \int_0^{1,28} (f(x)-g(x))\,dx = \int_0^{1,28} \left(\frac{4x}{x^2+1} - 2\ln(x^2+1)\right) dx \approx 1{,}940 - 0{,}994 = 0{,}946\,(\text{FE})$$





d) Nachweis:

$$F_a'(x) = 2a \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \qquad \text{(Kettenregel)}$$
$$= a \cdot \frac{4x}{x^2+1} = f(x) \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Ermittlung des Wertes a:
Integrationsgrenzen:
$x_{S1} = 0$ (Die Graphen der Funktionen f_a verlaufen durch den Koordinatenursprung.)
$x_{S2} = \sqrt{e-1}$

$$A_a(x) = \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{4ax}{x^2+1}\,dx = \left[2a \cdot \ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{e-1}} = 2a \cdot \ln(e-1+1) = 2a$$

$$A_a = 2a = 8 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Bewertungsvorschlag:

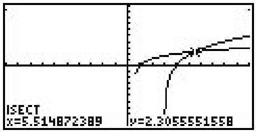
a) Definitionsbereiche; Nullstellen der Funktionen f und g; Symmetrie	3 BE
b) Ansatz für Gleichung der Tangente; Gleichung der Tangente	2 BE
c) Ansatz für Flächeninhalt; Flächeninhalt	2 BE
d) Nachweis der Stammfunktion; Ansatz für Wert a; Wert a	3 BE
	10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4: Analysis

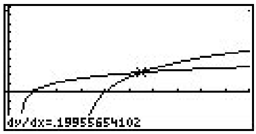
a) Größtmöglicher Definitionsbereich der Funktion f:
Der Term in der Klammer muss größer als 0 sein.
$\Rightarrow \quad x > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{2}\}$

b) Schnittpunkt der Graphen der Funktionen f und g:

Ermittlung mit grafischer Darstellung, Verwendung von TRACE oder INTERSECTION-Befehl liefert: S(5,5; 2,3)



Aus der 1. Ableitung der Funktionen an der Schnittstelle lässt sich der jeweilige Steigungswinkel der Tangenten ermitteln.
Ermitteln der 1. Ableitung an der Schnittstelle aus der Grafik ergibt:
$f'(5,5) \approx 0,2 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha_f \approx 0,2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_f \approx 11,3°$;
$g'(5,5) \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha_g \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_g \approx 45°$
Schnittwinkel α: $45,0° - 11,3° = 33,7° \approx 34°$



Lösungsvariante: Ermitteln der Ableitungen rechnerisch (war nicht gefordert)

$f'(x) = \frac{2}{2x-1}$; $f'(5,5) = 0,2$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{2,5}{x-3}$; $g'(5,5) = 1$

Die Berechnung des Schnittwinkels erfolgt wie oben oder mittels der Schnittwinkelformel: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{0,8}{1 + 0,2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 33,7°$.

c) $F(x) = \frac{1}{2}((2x-1) \cdot \ln(2x-1) - (2x-1))$
Wir betrachten zunächst nur das Produkt $z = (2x-1) \cdot \ln(2x-1)$
Nach Produktregel:

$u = 2x - 1; \quad u' = 2; \qquad v = \ln(2x-1); \quad v' = \frac{2}{2x-1}$

$\Rightarrow \quad z' = 2 \cdot \ln(2x-1) + (2x-1) \cdot \frac{2}{2x-1} = 2 \cdot \ln(2x-1) + 2$

Damit erhält man:

$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot [2\ln(2x-1) + 2 - 2] = \frac{1}{2} \cdot [2\ln(2x-1)] = \ln(2x-1)$

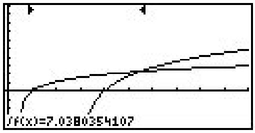
w.z.b.w.

d) Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen sind zunächst die Nullstellen der Graphen von f und g zu ermitteln. Aus der grafischen Darstellung (TRACE oder ROOT-Befehl) folgt: $x_{Nf} = 1$; $x_{Ng} = 4$

(Sollte man die Nullstellen rechnerisch ermitteln wollen, so sind die Gleichungen $2x - 1 = 1$ bzw. $x - 3 = 1$ zu lösen.)

Die Integration ergibt folgende Flächeninhalte:

$$A_1 = \int_1^{5,5} f(x)\,dx \approx 7{,}0\ (FE); \quad A_2 = \int_4^{5,5} g(x)\,dx \approx 2{,}0\ (FE)$$



$$A = A_1 - A_2 \approx 5{,}0\ (FE)$$

e) Nachweis:

$$A = \int_1^{1,5} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left[(2x-1) \cdot \ln(2x-1) - (2x-1)\right]_1^{1,5}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ((2 \cdot \ln 2 - 2) - (\ln 1 - 1)) = \frac{1}{2} \cdot (\ln 2^2 - 2 - \ln 1 + 1) = \frac{1}{2} \cdot (\ln 4 - 1)$$

$$= \ln(4^{\frac{1}{2}}) - 0{,}5 = \ln 2 - 0{,}5$$

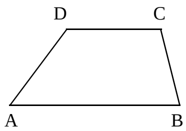
w.z.b.w.

Bewertungsvorschlag:

a) Definitionsbereich	1 BE
b Koordinaten des Punktes S; beide Anstiege der Tangenten; Schnittwinkel	3 BE
c) Ansatz für Nachweis; Nachweis	2 BE
d) ein Flächeninhalt einer Teilfläche; Flächeninhalt	2 BE
e) Ansatz für Nachweis; Nachweis	2 BE
	10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B1: Geometrie /Algebra

a)



Prüfen der Vektoren der möglichen Trapezseiten auf Parallelität:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$-7 = \lambda \cdot (-5) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{7}{5}$$

$$6 = \lambda \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{BC}$$

Das Viereck ist ein Trapez, aber kein Parallelogramm, da es nur ein Paar parallele Seiten besitzt.
Prüfen auf Orthogonalität:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = -18 \neq 0 \Rightarrow \quad \sphericalangle\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \neq 90°$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -36 \neq 0 \Rightarrow \quad \sphericalangle\,(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) \neq 90°$$

Es genügte die Berechnung eines Winkels je Schenkel des Trapezes, da die Summe der an einem Schenkel anliegenden Winkel 180° ergibt. Damit können auch die nicht berechneten Winkel keine rechten Winkel sein.
$\Rightarrow$ Das Trapez besitzt keinen rechten Winkel.

Lösungsvariante: Berechnung der Winkel mit dem Programm „Winkel“.

b) Gleichung der Ebene E:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (r, s \in \mathbb{R})$$

(I) $x = 3 + r - 7s$
(II) $y = -r + 6s$
(III) $z = -1 - r + 5s$

Addieren von (I) zu (II) und zu (III) liefert:
$x + y = 3 - s$
$x + z = 2 - 2s$
Gleichung der Ebene E: $-x - 2y + z = -4$
(Es wird empfohlen, zum Herstellen der allgemeinen Form der Ebenengleichung ein GTR-Programm, z. B. das Programm „Ebene“, zu nutzen.)

Einsetzen der Koordinaten des Punktes P_t liefert:

$-2 - 2t - \frac{2}{3}t = -4$, also $-\frac{8}{3}t = -2$ und damit $t = \frac{3}{4} \Rightarrow P_{\frac{3}{4}}\left(2; \frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$.

Um zu prüfen, ob der Punkt $P_{\frac{3}{4}}$ Diagonalenschnittpunkt des Trapezes ist, wird zunächst für beide Diagonalen je eine Gleichung aufgestellt und mit zwei Punktproben ermittelt, ob der Punkt auf jeder der Diagonalen liegt.

$$g(AC): \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Punktprobe:

$2 = 3 - 4t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} = 3t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad P_{\frac{3}{4}} \in g(AC)$

$-\frac{1}{2} = -1 + 2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{4}$

$$g(BD): \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Punktprobe:

$2 = 4 - 8s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{4}$

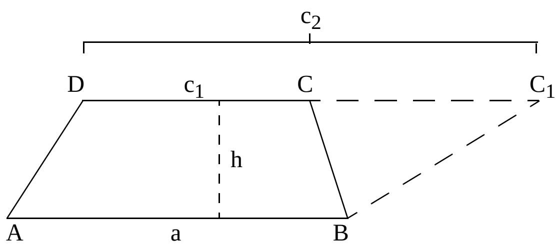
$\frac{3}{4} = -1 + 7s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad P_{\frac{3}{4}} \in g(BD)$

$-\frac{1}{2} = -2 + 6s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{4}$

$P_{\frac{3}{4}}$ ist Diagonalenschnittpunkt im Trapez ABCD.

c) Länge der Seite $\overline{CD}$:

$d(C; D) = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} \approx 5{,}20$



Lösungsvariante 1:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{DC}|) \cdot h \qquad A_2 = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{DC_1}|) \cdot h$

$A_2 = 2\,A_1$

$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{DC}|) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{DC_1}|) \cdot h$

$2\,(|\overline{AB}| + |\overline{DC}|) = (|\overline{AB}| + |\overline{DC_1}|)$

$|\overline{AB}| + 2\,|\overline{DC}| = |\overline{DC_1}|$

Mit $|\overline{AB}| = \sqrt{3}$ und $|\overline{DC}| = \sqrt{27}$ folgt daraus:

$\sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{27} = |\overline{DC_1}|$, also $7 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2}$.

Dabei sind x, y, z die Koordinaten des Punktes C_1. Da dieser Punkt auf der Geraden g(DC) liegt, kann man die entsprechenden Koordinaten durch die Darstellung in der Gleichung der Geraden ersetzen.

$g(DC)\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$

$$7 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-4+3t+4)^2 + (6-3t-6)^2 + (4-3t-4)^2} = \sqrt{27t^2} = 3t\sqrt{3}$$

$$7 \cdot \sqrt{3} = 3t\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{7}{3}$$

Einsetzen in Gleichung der Geraden (DC) liefert: $C_1(3; -1; -3)$

Lösungsvarianten 2:

Stücke des Trapezes ABCD	Stücke des Trapezes ABC_1D
a	a
c_1	c_2
h	h
Flächeninhalt A_1	A_2

$$\begin{aligned} 2A_1 &= A_2 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a + c_1) \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot (a + c_2) \cdot h \\ 2 \cdot (a + c_1) &= (a + c_2) \\ 2a + 2c_1 &= a + c_2 \\ a + 2c_1 &= c_2 \end{aligned}$$

Die Länge der Seite c_2 ist also die Summe der Längen der Seite a und des Doppelten der Seite c_1.
Wegen $a = \sqrt{3}$ und $c_1 = 3\sqrt{3}$ folgt $c_2 = 7\sqrt{3}$

Mit Einführung von Vektoren erhält man $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD} + 7\sqrt{3}\,(\overrightarrow{DC})_0$,wobei $(\overrightarrow{DC})_0$ der in Richtung von $\overrightarrow{DC}$ verlaufende Einheitsvektor ist:

$$(\overrightarrow{DC})_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$\overrightarrow{OC_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 7\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_1(3; -1; -3)$$

Bewertungsvorschlag:

a) Koordinaten zweier Vektoren; Nachweis der linearen Abhängigkeit zweier Vektoren; Nachweis, dass ABCD kein Parallelogramm ist; Ansatz für Größe eines Winkels; Angabe der Größe eines Winkels; Größe eines weiteren Winkels und Schlussfolgerung — 6 BE

b) Gleichung der Ebene E; Ansatz für Punkt P_t; Koordinaten des Punktes $P_{\frac{3}{4}}$; Gleichung einer Diagonalen; Ansatz für Untersuchung auf Diagonalenschnittpunkt; Schlussfolgerung — 6 BE

c) Länge der Strecke; Ansatz für Koordinaten des Punktes C_1; Koordinaten des Punktes C_1 — 3 BE

15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B2: Geometrie / Algebra

a) Die drei Punkte liegen in der x-y-Koordinatenebene, da die z-Koordinate jeweils 0 ist. Es ist zu prüfen, ob sie auf ein und derselben Geraden liegen.

$$g(AB):\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Punktprobe für den Punkt C liefert:

x-Koordinate: $4 = -1 + 8t \;\Rightarrow t_1 = \frac{5}{8}$ y-Koordinate: $6 = 1 - 4t \;\Rightarrow t_2 = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ Der Punkt C liegt nicht auf der Geraden g(AB). Die Punkte A, B und C bilden in der x-y-Koordinatenebene ein Dreieck.

b) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}}{\sqrt{64+16}\cdot\sqrt{9+81}} = \frac{60}{\sqrt{7200}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \sphericalangle CBA = 45^\circ$$

Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{80}\cdot\sqrt{90}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{14400} = \frac{1}{4}\cdot 120$$

$= 30$ w.z.b.w.

c) *Lösungsvariante 1:*
Der Punkt H ist Schnittpunkt der Höhen genau dann, wenn $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ H ist Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

Die Punkte S_i liegen auf der senkrecht zur x-y-Ebene durch Punkt H verlaufenden Geraden, d.h., sie haben die Koordinaten $S_i(2; 2; z_i)$.

$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot |h| = 10 \Rightarrow 10\,|h| = 100$, also $|h| = 10$

$S_1(2; 2; -10)$ $\qquad$ $S_2(2; 2; 10)$
(Laut Aufgabenstellung genügte die Angabe der Koordinaten eines Punktes.)

Lösungsvariante 2:
Schnitt von zwei Höhen:

Gleichungen zweier Geraden:

g(AB): $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad (t \in \mathbb{R})$

(I) $x = -1 + 8t$
(II) $y = 1 - 4t$ $\quad \Rightarrow \quad x + 2y = 1$ bzw. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

g(AC): $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad (s \in \mathbb{R})$

(I) $x = -1 + 5s$
(II) $y = 1 + 5s$ $\quad \Rightarrow \quad -x + y = 2$ bzw. $y = x + 2$

Gleichungen der Höhen:
h_{AB}: $y = 2x + n$; mit $C(4; 6)$ folgt: $y = 2x - 2$
analog folgt: h_{AC}: $y = -x + 4$

Schnitt der Höhen: $2x - 2 = -x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$
Damit ist der Punkt $H(2; 2)$ Schnittpunkt beider Höhen und damit Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

d) *Lösungsvariante 1:*

Es muss gelten $\left|\overline{AP_i}\right| = \left|\overline{BP_i}\right| = \left|\overline{CP_i}\right|$. Mit $P_i(x; y; z)$ folgt:

$$\left|\overline{AP_i}\right| = \left|\overline{BP_i}\right| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+3)^2 + z^2}$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 6y + 9 + z^2$$

$$16x - 8y = 56$$

$$\left|\overline{AP_i}\right| = \left|\overline{CP_i}\right| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2 + z^2}$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 + z^2$$

$$10x + 10y = 50$$

Gleichungssystem:

(I) $16x - 8y = 56$

(II) $10x + 10y = 50$ Lösung mit GTR liefert: $x = 4$ und $y = 1$.

Die z-Koordinate der gesuchten Punkte muss ± 10 sein, da für das Volumen der zugehörigen Pyramiden dieselbe Bedingung wie in Teilaufgabe c) besteht.

$\Rightarrow$ $P_1(4; 1; -10)$; $P_2(4; 1; 10)$

Lösungsvariante 2:

Die z-Koordinate der gesuchten Punkte muss ± 10 sein, da für das Volumen der zugehörigen Pyramiden dieselbe Bedingung wie in Teilaufgabe c) besteht.

$\Rightarrow$ $P_1(x_1; y_1; -10)$; $P_2(x_2; y_2; 10)$

Da die Seitenkanten der Pyramide gleich lang sind, ist die Pyramide gerade, d.h., der Höhenfußpunkt der Pyramide ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Grundfläche.

Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$: $M_{\overline{AB}}(3; -1)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AB}_{\perp} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$m_{\overline{AB}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$: $M_{\overline{BC}}\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC}_{\perp} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m_{\overline{BC}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Gleichungssystem:

(I) $4t - 9s = \frac{5}{2}$

(II) $8t - 3s = \frac{5}{2}$ Lösung mit GTR liefert: $s = -\frac{1}{6}$ und $t = 0{,}25$.

$\Rightarrow$ $M(4;\,1)$ und damit $P_1(4;\,1;\,-10)$; $P_2(4;\,1;\,10)$

Bewertungsvorschlag:

a) Ansatz für Nachweis; Nachweis; Begründung für Lage in der x-y-Koordinatenebene	3 BE
b) Ansatz für Größe des Winkels; Größe des Winkels; Nachweis des Flächeninhaltes	3 BE
c) Gleichung einer Höhe; Ansatz für Nachweis; Nachweis; Ansatz für Koordinaten eines Punktes S_i; Koordinaten eines Punktes	5 BE
d) Ermitteln der z-Koordinaten; Ansatz; Gleichungssystem; Koordinaten beider Punkte P_i	4 BE
	15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B 3: Geometrie / Algebra

a) Alle Mittelpunkte der Kreise liegen in der x-y-Koordinatenebene auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.
Der Mittelpunkt $M_{\overline{AB}}$ der Strecke $\overline{AB}$ hat die Koordinaten $M_{\overline{AB}}(\frac{3}{2};\,\frac{7}{4})$.
Jeder Richtungsvektor $\vec{m}_{\overline{AB}}$ der Mittelsenkrechten steht senkrecht zum Vektor $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{m}_{\overline{AB}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -5 \end{pmatrix} \text{bzw.} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Mittelsenkrechten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

bzw. $x = \frac{3}{2} + t$

$y = \frac{7}{4} - 2t \Rightarrow \quad y + 2x = 3 + \frac{7}{4}$, also $y = -2x + \frac{19}{4}$

b) Der Mittelpunkt des Kreises k ist der bereits in Aufgabenteil a) berechnete Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, also $M_{\overline{AB}}(\frac{3}{2};\frac{7}{4})$.

Der Radius des Kreises ist der Abstand der Punkte A und $M_{\overline{AB}}$.

$r^2 = (\frac{3}{2} - 4)^2 + (\frac{7}{2} - 3)^2 = \frac{125}{16} = 7{,}8125$

Gleichung des Kreises k: $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{7}{4})^2 = \frac{125}{16}$

Untersuchung der Lage des Punktes C bezüglich des Kreises k:

$(5 - \frac{3}{2})^2 + (2 - \frac{7}{4})^2 = (\frac{7}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2 = \frac{49}{4} + \frac{1}{16} = \frac{197}{16} > \frac{125}{16}$

$\Rightarrow$ Der Punkt C liegt außerhalb des Kreises k.

c) Volumen des Kreiskegels: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Höhe des Kreiskegels: $h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot \frac{125}{8}\pi}{\pi \cdot \frac{125}{16}} = 6$

Da der Grundkreis in der x-y-Koordinatenebene liegt und der Kreiskegel gerade ist, liegt der Punkt S senkrecht über dem Mittelpunkt des Grundkreises.

$\Rightarrow S(\frac{3}{2};\frac{7}{4};6)$

α sei der Neigungswinkel des Kreiskegels.

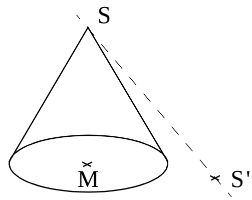
$\tan\alpha = \frac{h}{r} = \frac{6}{\sqrt{\frac{125}{16}}} \approx 2{,}1466 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 65{,}0°$

Ermittlung des Wertes a:

Lösungsvariante 1:

Man betrachte eine Gerade durch die Spitze S des Kegels mit dem vorgegebenen Richtungsvektor:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$



Falls ein Schatten erzeugt werden soll, muss diese Gerade die x-y-Koordinatenebene in einem Punkt S' schneiden, der außerhalb des Grundkreises k liegt.
Für diesen Punkt S' gilt: $z = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{6}{a}$.

$S'(\frac{3}{2} - \frac{6}{a};\ \frac{7}{4} - \frac{6}{a};\ 0)$

Berechnung des Abstandes des Punktes S' zum Mittelpunkt des Kreises k:

$|\overline{S'M}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{6}{a} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{4} - \frac{6}{a} - \frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{6}{a}\right)^2 + \left(-\frac{6}{a}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(-\frac{6}{a}\right)^2} = \left|\frac{6}{a} \cdot \sqrt{2}\right|$

S' liegt außerhalb des Kreises k, wenn gilt: $|\overline{S'M}| > r$ ($r = \sqrt{\frac{125}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{5} \approx 2{,}7951$)

$|\frac{6}{a}\sqrt{2}| > 2{,}7951$, also $|\frac{8,4853}{a}| > 2{,}7951$

1. Fall: a > 0 entfällt, da a < 0 laut Aufgabenstellung gefordert.
2. Fall: a < 0

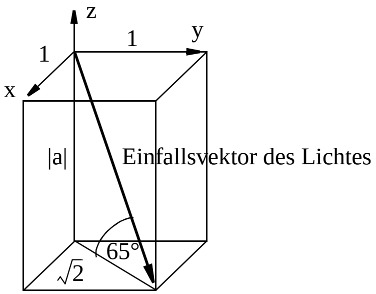
$-\frac{8,4853}{a} > 2{,}7951$ bzw. $-\frac{6\sqrt{2}}{a} > \frac{5}{4}\sqrt{5}$ $\quad | \cdot (a < 0)$

$-\frac{8,4853}{2,7951} < a$ bzw. $-6\sqrt{2} < \frac{5}{4}\sqrt{5}\,a$

$-3{,}036 < a$ bzw. $-\frac{24}{25}\sqrt{10} < a$

Ein Schatten entsteht für – 3,036 < a < 0.

Lösungsvariante 2:
Ein Schatten entsteht, wenn das Licht „flacher“ einfällt als der Neigungswinkel des Kreiskegels.



Die Koordinate a des Richtungsvektors des Lichtes kann man für den Fall, dass das Licht mit 65° einfällt, berechnen mit:

$\tan 65° = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$

$\tan 65° \cdot \sqrt{2} = |a|$, also $|a| = 3{,}03$ und damit $a = -3{,}03$ (a = 3,03 entfällt.)

Aus der Anschauung ist klar: Wird a größer als – 3,03, so fällt das Licht flacher ein, ansonsten steiler.
Ein Schatten entsteht für – 3,03 < a < 0.

Lösungsvariante 3:
Der Winkel α zwischen der negativen z-Achse und dem Vektor $\vec{a}$ muss größer sein als $90° - 65° = 25°$.

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2 + a^2}} = \frac{-a}{\sqrt{2 + a^2}}, \text{ also } \cos 25° = 0{,}9063 = \frac{-a}{\sqrt{2 + a^2}}.$$

$$0{,}8214\,(2 + a^2) = a^2 \Rightarrow -0{,}1786\,a^2 + 1{,}6428 = 0$$

$a_1 = -3{,}03$ (trifft zu); $a_2 = 3{,}03$ (entfällt)

Aus der Anschauung ist klar: Wird a größer als $-3{,}03$, so fällt das Licht flacher ein, ansonsten steiler.
Ein Schatten entsteht für $-3{,}03 < a < 0$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Ansatz für Gleichung der Mittelsenkrechten; Gleichung der Mittelsenkrechten	2 BE
b)	Gleichung des Kreises k; Aussage zur Lage des Punktes C	2 BE
c)	Koordinaten des Punktes S; Neigungswinkel des Kreiskegels; Gleichung einer Hilfsgeraden durch den Punkt S; Koordinaten des Schnittpunktes S' der Hilfsgeraden mit der x-y-Koordinatenebene; Abstand des Punktes S' vom Kreismittelpunkt in Abhängigkeit von a; Werte a	6 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B4: Geometrie / Algebra

a) $C_2(5; 4; 8)$

Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad (t, s \in \mathbb{R})$

Lösungsvariante 1:

(I) $x = 10 - 6t - 5s$
(II) $y = 2 + 3t + 2s$
(III) $z = 3 + 6t + 5s$

(I) + 2 · (II) und (III) – 2 · (II) liefert

(I') $x + 2y = 14 - s$
(II') $-2y + z = -1 + s$ (I) + (II) ⇒ Parameterfreie Gleichung der Ebene E: $x + z = 13$

Lösungsvariante 2:

Die Ebene E habe die Gleichung $ax + by + cz = d$. Jeder (Normalen)Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ muss dann senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren der Ebene stehen.

Es gilt also: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC_2} = 0$. Daraus erhält man:

(I) $-6a + 3b + 6c = 0$
(II) $-5a + 2b + 5c = 0$

Das Gleichungssystem hat 3 Variablen und zwei Gleichungen. Es gibt also unendliche viele Lösungen (Normalenvektoren, die sich im Betrag und nicht in der Richtung unterscheiden). Wir wählen $c = 1$.

⇒ (I) $-6a + 3b = -6$
(II) $-5a + 2b = -5$ Lösung mit GTR liefert: $a = 1$; $b = 0$.

⇒ Gleichung der Ebene E: $x + z = 13$

Lösungsvariante 3: Nutzung des GTR-Programmes „Ebene“

Untersuchung des Dreiecks ABC_2 auf Orthogonalität:
Lösungsvariante 1:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 66 \neq 0$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC_2} = 15 \neq 0$$

$$\overrightarrow{C_2B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{C_2A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{C_2B} \cdot \overrightarrow{C_2A} = -12 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Keine zwei Seiten schließen einen rechten Winkel ein.

Lösungsvariante 2:
Berechnung der Seitenlängen: (u. U. Nutzung GTR-Programm „Abstand“)

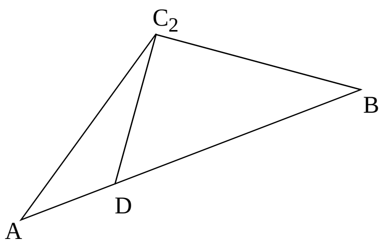
$$|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9; \quad |\overline{BC_2}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\overline{AC_2}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Prüfen nach Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 54 + 3 \neq 81$
$\Rightarrow$ Das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

Bestimmung der Koordinaten des Punktes D:
Die Dreiecke ABC_2 und DBC_2 haben dieselbe Höhe. Also müssen sich die Längen der Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ wie 1: 5 verhalten.
Gerade durch die Punkte A und B:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$



Für t = 0 wird der Punkt A erzeugt, für t = 1 der Punkt B. Die Strecke ist in sechs gleich lange Teile zu teilen. Um den gesuchten Teilpunkt D zu erzeugen, muss also $t = \frac{1}{6}$ sein.

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2,5 \\ 4 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ Koordinaten des Punktes: D(9; 2,5; 4)

b) Es muss gelten: $\overrightarrow{C_aA} \cdot \overrightarrow{C_aB} = 0$

$$\begin{pmatrix} 7-a \\ -2 \\ -7+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-a \\ 1 \\ -1+a \end{pmatrix} = 0$$

$(7-a)\cdot(1-a) - 2 + (-7+a)\cdot(-1+a) = 2a^2 - 16a + 12 = 0$

$a^2 - 8a + 6 = 0;\ a_1 = 4 - \sqrt{10} \approx 0{,}84;\ a_2 = 4 + \sqrt{10} \approx 7{,}16$

(Das Lösen der quadratischen Gleichung kann mit GTR erfolgen.)

c) Drei Punkte bestimmen eine Ebene, falls sie nicht auf ein und derselben Gerade liegen. Es müssen also alle Punkte C_a ausgeschlossen werden, die auf der Gerade durch die Punkte A und B liegen.

Gerade durch die Punkte A und B: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} (t \in \mathbb{R})$

(I) $3 + a = 10 - 6t$
(II) $4 = 2 + 3t \quad \Rightarrow t = \frac{2}{3}$
(III) $10 - a = 3 + 6t$

(I) $3 + a = 10 - 6 \cdot \frac{2}{3} \quad \Rightarrow a = 3$

Prüfen in Gleichung (III): $10 - a = 7 \Rightarrow a = 3$
Für $a = 3$ liegt also der zugehörige Punkt C_a auf der Geraden durch die Punkte A und B.
Die Ebene E ist also für alle Punkte C_a mit ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 3$) eindeutig bestimmt.

Bewertungsvorschlag:

a) Ansatz; Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form; Ansatz für Untersuchung auf Rechtwinkligkeit; Schlussfolgerung; Ansatz für Koordinaten des Punktes D; Koordinaten des Punktes D	6 BE
b) Ansatz; Werte a	2 BE
c) Ansatz; Werte a	2 BE
	10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 1: Stochastik

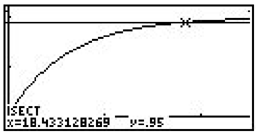
a) Anzahl der Anordnungen: 4! = 24

b) $P(E) = 0{,}45^5 \approx 0{,}0185$
$P(\overline{F}) = 0{,}75^5$ (kein Preis an Zuschrift zum Thema „Musik“)
$P(F) = 1 - 0{,}75^5 \approx 0{,}7627$

c) X ... Anzahl der Zuschriften zum Thema „Sport“
X ist binomialverteilt mit n = 20 und p = 0,15.
$E(x) = 20 \cdot 0{,}15 = 3$

Jacqueline kann 3 Zuschriften zum Thema „Sport“ erwarten.
Im Folgenden wird die Zufallsgröße X betrachtet, aber mit variabler Anzahl n der Versuchswiederholungen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Zuschriften keine zum Thema „Sport“ ist, beträgt $0{,}85^n$. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Zuschrift zum Thema „Sport“ vorliegt, beträgt dann $1 - 0{,}85^n$.
Die Ungleichung $1 - 0{,}85^n \geq 0{,}95$ ist zu lösen.

Lösungsvariante 1:
Darstellung der Funktionen Y1 = 1 – 0,85^X und Y2 = 0,95 mit dem GTR und Ermittlung der Schnittstelle liefert nebenstehendes Bild:
$\Rightarrow \quad n \geq 18{,}4$
Jaqueline müsste mindestens 19 Zuschriften entnehmen.



Lösungsvariante 2:
$1 - 0{,}85^n \geq 0{,}95 \quad (n \in \mathbb{N})$, also $0{,}05 \geq 0{,}85^n$.

$\Rightarrow \lg 0{,}05 \geq n \cdot \lg 0{,}85$ bzw. $\frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}85} \leq n$ (da lg0,85 negativ) und damit $18{,}4 \leq n$.

Jacqueline müsste mindestens 19 Zuschriften entnehmen.

d) Y beschreibt den einzusetzenden Geldbetrag bei einer Drehung des Rades.
Y hat folgende Verteilung:

y_i	2000 DM	100 DM	30 DM
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{16}{20}$

$E(Y) = 2000 \cdot \frac{1}{20} + 100 \cdot \frac{3}{20} + 30 \cdot \frac{16}{20} = 139$
Die Zeitschrift muss durchschnittlich 139 DM für Preise einkalkulieren.

e) Wahrscheinlichkeit, dass sich der erste gezogene Fußballbeitrag in der zweiten gezogenen Zeitschrift befindet:

$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15} \approx 0{,}2667$

Wahrscheinlichkeit für fünfte gezogene Zeitschrift:
Das gesuchte Ereignis tritt genau dann ein, wenn zunächst die vier Zeitschriften, deren Sportthema nicht Fußball ist, gezogen werden.

$\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{210} \approx 0{,}0048$

Bewertungsvorschlag:

a) Anzahl	1 BE
b) Wahrscheinlichkeit P(E); Wahrscheinlichkeit P(F)	2 BE
c) Erwartungswert; Ansatz für Anzahl; Anzahl	3 BE
d) Verteilung der Zufallsgröße; Geldbetrag	2 BE
e) Wahrscheinlichkeit für zweite gezogene Zeitschrift; Wahrscheinlichkeit für fünfte gezogene Zeitschrift	2 BE
	10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 2: Stochastik

a) X ... Höhe des Gewinns bei einer Drehung

x_i	-2	8	28
$P(X = x_i)$	$\frac{18}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Erwartungswert: $E(X) = -2 \cdot \frac{18}{20} + 8 \cdot \frac{1}{20} + 28 \cdot \frac{1}{20} = 0$

Der Spieler hat einen Gewinn von 0 DM zu erwarten.

Der beim roten Sektor auszuzahlende Betrag sei r.
Dann gilt (aus der Sicht des Spielers):

$$E(X) = -2 \cdot \frac{18}{20} + 8 \cdot \frac{1}{20} + (r-2) \cdot \frac{1}{20} = -0{,}20$$

$$\Rightarrow -2 \cdot 18 + 8 \cdot 1 + (r-2) \cdot 1 = -4, \text{ also } r - 2 = 24 \text{ und damit } r = 26$$

Der Spieler muss 26 DM beim Ermitteln des roten Sektors ausgezahlt bekommen.

b) Y ... Anzahl der Drehungen, bei der der rote Sektor ermittelt wird

Y ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{20}$.

Die Wahrscheinlichkeit, nicht den roten Sektor zu ermitteln, beträgt in jeder Drehung $\frac{19}{20}$.

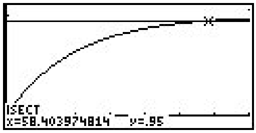
Die Wahrscheinlichkeit, bei n Drehungen nie den roten Sektor zu ermitteln, beträgt $(\frac{19}{20})^n$.

Die Wahrscheinlichkeit, bei n Drehungen mindestens einmal den roten Sektor zu ermitteln beträgt $1 - (\frac{19}{20})^n$.

Ansatz: $1 - (\frac{19}{20})^n \geq 0{,}95$

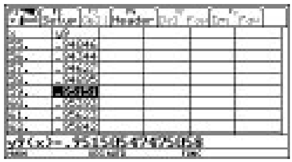
Lösungsvariante 1:

Darstellung der Funktionen Y1 = 0,95 und Y2 = 1 – (19/20)^X mit Hilfe des GTR und Ermitteln der Schnittstelle der Graphen:
Es müssen mindestens 59 Drehungen durchgeführt werden.



Lösungsvariante 2:

Darstellung der Funktion
Y2 = 1 – (19/20)^X mit Hilfe des GTR im Tabellen-Menü und Ablesen des gesuchten Wertes.



Lösungsvariante 3:

$1 - (\frac{19}{20})^n \geq 0{,}95$, also $0{,}05 \geq (\frac{19}{20})^n$

$\Rightarrow \lg 0{,}05 \geq n \cdot \lg(\frac{19}{20})$ bzw. $\frac{\lg 0{,}05}{\lg\left(\frac{19}{20}\right)} \leq n$ (da $\lg \frac{19}{20} < 0$).

$58{,}4 \leq n$

Es müssen mindestens 59 Drehungen durchgeführt werden.

c) E ist das Ereignis: Nach 10 Drehungen sind alle 10 Sektoren markiert. Das tritt nur ein, wenn bei keiner Drehung ein bereits markierter Sektor ermittelt wird. Die Wahrscheinlichkeit P, keinen markierten Sektor zu ermitteln, beträgt bei der ersten Drehung 1, bei der zweiten Drehung $\frac{9}{10}$ bei der dritten Drehung $\frac{8}{10}$ usw.

$$\Rightarrow P(E) = 1 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9!}{10^9} \approx 0{,}00036$$

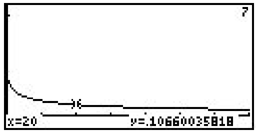
d) N ist das Ereignis: Bei zwei aufeinander folgenden Drehungen werden zwei nebeneinander liegende Sektoren markiert.
$P(N) = 1 \cdot \frac{2}{9} \approx 0{,}2222$

e) Gewinnwahrscheinlichkeit $P_G(20)$ nach 20 Drehungen:
$P_G(20) = \frac{1}{2\sqrt{20+2}} = \frac{1}{2\sqrt{22}} \approx 0{,}1066$

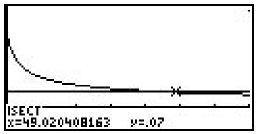
$P_G(20) > 0{,}10$
Jaquelines Behauptung ist richtig.

Ermitteln der Anzahl der Versuche:

Lösungsvariante 1:
Darstellung der Funktion $Y1 = 1/(2\sqrt{(X+2)})$ mit dem GTR. Danach wird der Funktionswert an der Stelle x = 20 mit TRACE (EVAL, Y-CAL) ermittelt.
Dabei bestätigt man die Lösung zum ersten Teil der Aufgabe:
$0{,}1066 > 0{,}10 \Rightarrow$ Jaquelines Behauptung ist richtig.

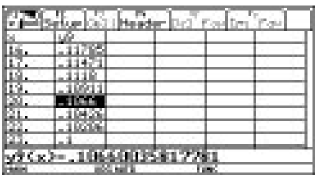


Untersuchung des Graphen mit TRACE und feststellen, an welcher Stelle der y-Wert kleiner als 0,07 wird, oder Ermittlung der Schnittstelle des Graphen mit dem Graph der Funktion y = 0,07 mit ISECT (ISCT).



Man erhält: Solange X kleiner als 49,0204 ist, ist die Gewinnwahrscheinlichkeit größer als 0,07. Franziska muss das Spiel nach dem 49. Versuch abbrechen.

Lösungsvariante 2:
Darstellung der Funktion $Y1 = 1/(2\sqrt{(X+2)})$ im Tabellen-Menü des GTR.
Ablesen der für die Aufgabe notwendigen Werte.



$\Rightarrow$ Jaquelines Behauptung ist richtig.
Franziska muss das Spiel nach dem 49. Versuch abbrechen.

Lösungsvariante 3:

$\frac{1}{2\sqrt{z+2}} \geq 0{,}07$, also $1 \geq 2\sqrt{z+2} \cdot 0{,}07 = 0{,}14\sqrt{z+2} \Rightarrow$

$\frac{1}{0{,}14} \geq \sqrt{z+2}$, also $(\frac{1}{0{,}14})^2 \geq z+2$ bzw. $(\frac{1}{0{,}14})^2 - 2 \geq z$

Damit gilt: $49{,}0204 \geq z$

Das bedeutet: Solange z kleiner als 49,0204 ist, ist die Gewinnwahrscheinlichkeit größer als 0,07. Franziska muss das Spiel nach dem 49. Versuch abbrechen.

Lösungsvariante 4:

Beantwortung des 2. Teils der Fragestellung durch systematisches Probieren mit dem GTR.

Bewertungsvorschlag:

a) Ansatz für Erwartungswert; Erwartungswert; auszuzahlender Betrag	3 BE
b) Ansatz für Anzahl; Anzahl	2 BE
c) Ansatz für Wahrscheinlichkeit, dass 10 Sektoren markiert sind;	
Wahrscheinlichkeit, dass 10 Sektoren markiert sind	2 BE
d) Wahrscheinlichkeit	1 BE
e) Überprüfung der Behauptung; Ermittlung der Anzahl	2 BE
	10 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1998 / 99

Gymnasium

Sachsen-Anhalt

Hinweis:
Der Prüfling hatte nach Empfehlung durch die Lehrkraft je eine Aufgabe aus den Gebieten G1, G2 und G3 zur Bearbeitung auszuwählen.

Gebiet G1: Analysis / Aufgabe 1.1

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

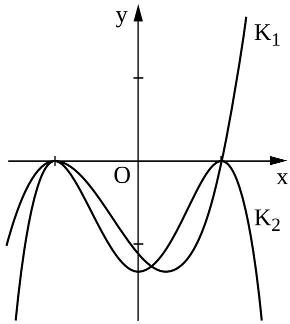
$$y = f(x) = -\tfrac{1}{6}(x^2-4)^2, \qquad y = g(x) = \tfrac{9}{32}(x^2-4)(x+2),\ x \in \mathbb{R}.$$

Die Graphen dieser Funktionen in einem kartesischen Koordinatensystem seien F und G.

a) Untersuchen Sie den Graphen F auf Symmetrie.

Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen F und bestimmen Sie deren Art.

Die in nebenstehender Skizze dargestellten Kurven K_1 und K_2 sind bei geeigneter Skalierung der Koordinatenachsen die Graphen F und G in einem bestimmten Intervall.



Ermitteln Sie, welche Kurve der Graph F und welche Kurve der Graph G ist.
Geben Sie die Skalierung der Koordinatenachsen an (z. B. Anzahl der Einheiten pro Teilstrich).

An den Graphen F wird an der Stelle x = 1 die Tangente gelegt.
Geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Tangente mit der x-Achse und das Gradmaß des Schnittwinkels.

b) Der Graph F und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Diese sei Querschnittsfläche Q_1 eines Kanals in einem bestimmten Abschnitt. Ihr Inhalt sei A_1. Der Graph G und die x-Achse begrenzen ebenfalls eine Fläche vollständig. Diese sei Querschnittsfläche Q_2 des Kanals in einem weiteren Abschnitt. Ihr Inhalt beträgt $A_2 = 6\ \text{m}^2$. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt A_1 vom Flächeninhalt A_2 um weniger als 6 % abweicht.

Begründen Sie, dass die Differenz der Maßzahlen der Flächeninhalte $A_2 - A_1$ wie folgt berechnet werden kann:

$$\int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]dx$$

c) Weisen Sie nach, dass der in Aufgabe b) beschriebene Kanal in den beiden Abschnitten die gleiche Breite und die gleiche Tiefe (an der tiefsten Stelle) besitzt.

Gebiet G1: Analysis / Aufgabe 1.2

Gegeben seien die Funktionen f_1 und f_2 durch

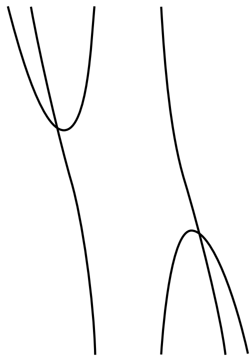
$y = f_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{x^3}$, $\qquad y = f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$ $\qquad x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$

Ihre Graphen seien mit G_1 bzw. G_2 bezeichnet.

a) Nebenstehende Abbildung ist um ein kartesisches Koordinatensystem zu ergänzen, so dass es sich um die Darstellung der Graphen G_1 und G_2 in einem Intervall handelt.

Weisen Sie dazu nach, dass die Funktionen ungerade sind (ihre Graphen punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung liegen).
Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen auf Existenz von Nullstellen sowie deren Graphen auf lokale Extrempunkte und geben Sie deren Koordinaten an.

Orden Sie den Kurven die Bezeichnungen G_1 bzw. G_2 zu.



b) Die Gerade g mit der Gleichung $y = -\frac{17}{8}$ und die Gerade h mit der Gleichung $x = 1$ schneiden den Graphen G_1 und begrenzen mit diesem für $x \geq 1$ eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

Hinweis:
Falls der zeichnerische Teil aus Aufgabe a) auf diesem Blatt bearbeitet wurde, hatte es der Prüfling mit seinem Namen zu beschriften und der Prüfungsarbeit beizufügen.

Gebiet G2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.1

Für eine Computersimulation werden die Kurse zweier Helikopter in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben und als geradlinig angenommen. Die Helikopter werden als punktförmige Objekte angesehen.
Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer.

Helikopter 1 bewegt sich vom Punkt $A(10|20|0{,}2)$ in Richtung des Punktes $B(40|40|0{,}2)$ und gleichzeitig Helikopter 2 von Punkt B in Richtung des Punktes $D(5|35|0{,}15)$.

a) Helikopter 1 soll auf der Hälfte der Strecke $\overline{AB}$, im Punkt M, seinen Kurs ändern, da sich Nebel gebildet hat. Die Lage der Nebelfront kann in dem zu betrachtenden Bereich durch die nachfolgend genannte Gleichung einer Ebene E beschrieben werden:

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 14{,}2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Der Helikopter fliegt nun von M aus über $C(25|45|0{,}25)$ nach B.
Berechnen Sie die Länge des durch die Kursänderung zusätzlich zurückgelegten Weges.

Zeigen Sie, dass der Helikopter 1 vor Erreichen der Nebelfront den Kurs ändert.

Ermitteln Sie das Gradmaß des Winkels zwischen dem ursprünglichen und dem geänderten Kurs im Punkt M.

b) Weisen Sie nach, dass ein Zusammenstoß der beiden Helikopter auf dem neuen Kurs des Helikopters 1 ausgeschlossen ist.

Gebiet G2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4|3|-2)$, $B(5|6|-3)$, $C(9|12|-5)$ sowie die Gerade g durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R},$$

gegeben.

a) Die Gerade g und der Punkt A bestimmen eine Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E.

b) Die Punkte B und C liegen auf einer Geraden h.
Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander liegen.

Beschreiben Sie die besondere Lage der Geraden g im Koordinatensystem.

Die Gerade h durchstößt die Ebene E (aus Teilaufgabe a)) im Punkt D. Ermitteln Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes D.

[Ergebnis zur Kontrolle: $D(3|3|-2)$]

c) Auf der Geraden g liegen zwei Punkte P_1 und P_2, für deren Maßzahl des Abstandes zum Punkt D gilt:

$$\overline{P_1D} = \overline{P_2D} = \sqrt{6}\,.$$

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.

Gebiet G3: Wahrscheinlichkeitsrechnung / Aufgabe 3.1

Ein Skat-Kartenspiel besteht aus 32 Karten, unterteilt in vier Farben zu je acht Werten. Die Karten werden gemischt und mit der Rückseite nach oben gelegt.

a) Nacheinander werden drei Karten zufällig gezogen.
Betrachtet werden die Ereignisse:
A: „Die drei gezogenen Karten sind von gleicher Farbe."
B: „Die drei gezogenen Karten weisen den gleichen Wert (z.B. drei Könige) auf."

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.

b) Die in Teilaufgabe a) beschriebenen Ereignisse A und B bilden die Grundlage für ein Spiel mit folgendem Auszahlungsplan:
Einsatz sind 50 Pfennig. Tritt das Ereignis A ein, so erhält der Spieler 5 DM, für das Eintreten von B erhält er 11 DM. Der Einsatz geht in jedem Fall verloren. Die Zufallsgröße X beschreibe den Gewinn bei diesem Spiel. Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X an und untersuchen Sie, ob ein Spieler bei diesem Spiel auf lange Sicht Gewinn oder Verlust macht.

Ein faires Spiel ist dadurch gekennzeichnet, dass sich auf lange Sicht Gewinn und Verlust ausgleichen.
Ermitteln sie bei sonst gleichem Auszahlungsplan einen Auszahlungsbetrag für das Eintreten des Ereignisses A, so dass das Spiel fair ist.

c) Ein Spieler setzt seine Hoffnungen in das Eintreten des Ereignisses B bei der wiederholten Durchführung des Spiels.
Berechnen Sie diejenige Anzahl der Spiele, bei der das Ereignis B mindestens einmal mit mindestens 10%iger Wahrscheinlichkeit eintritt.

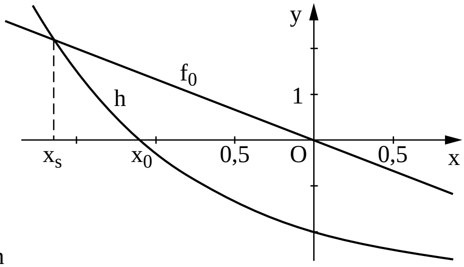
Gebiet G3: Analysis / Aufgabe 3.2

Gegeben sind Funktionen f_a durch:

$f_a(x) = -\frac{1}{3}a^2x^3 - ax^2 - \frac{4}{3}x\,,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ a \in \mathbb{R},\ \ a \geq 0,$

sowie die Funktion h mit der Nullstelle $x_0 = -\ln 3$ durch: $h(x) = e^{-x} - 3,\ \ x \in \mathbb{R}.$

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f_0 und h in einem Koordinatensystem.



a) Weisen Sie nach, dass die Graphen der Funktionen f_a für den Fall $a > 0$ die Wendepunkte $W_a(-\frac{1}{a} \mid \frac{2}{3a})$ besitzen.

b) Die Graphen der Funktionen f_0 und h schneiden einander im II. Quadranten in dem Punkt $S(x_s \mid f(x_s))$ mit $x_s \approx -1{,}65$.
Leiten sie die nachstehende Iterationsvorschrift für das NEWTONsche Näherungsverfahren her, mit der die Abszisse x_s berechnet werden kann.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{4}{3}x_n + e^{-x_n} - 3}{\frac{4}{3} - e^{-x_n}}$$

c) Die Graphen der Funktionen f_0 und h sowie die Gerade mit der Gleichung $x = -\ln 3$ begrenzen im Intervall $x_s \leq x \leq x_0$ eine Fläche vollständig. Die Fläche rotiere um die x-Achse.

Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Volumens des entstehenden Rotationskörpers nach der Gleichung $V = \pi\left[\frac{16}{27}x^3 + \frac{1}{2}e^{-2x} - 6e^{-x} - 9x\right]_{x_s}^{-\ln 3}$ berechnet werden kann.

Gebiet G3: Analytische Geometrie / Aufgabe 3.3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind $P(4 \mid \frac{1}{2}\sqrt{7})$ und $Q(5 \mid 2)$ Punkte einer Hyperbel in Mittelpunktslage, deren Brennpunkte auf der x-Achse liegen.

a) Stellen Sie eine Mittelpunktsgleichung der Hyperbel auf.

[Ergebnis zur Kontrolle: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$]

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel und stellen Sie Gleichungen der Asymptoten auf.

c) Im Punkt Q soll an die Hyperbel die Tangente gelegt werden. Diese Tangente und eine Asymptote schneiden einander im IV. Quadranten im Punkt R. Berechnen sie die Koordinaten des Punktes R.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Symmetrieverhalten von F:

$f(-x) = -\frac{1}{6}((-x)^2 - 4)^2 = -\frac{1}{6}(x^2 - 4)^2 = f(x)$

$\Rightarrow$ Graph von f ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse.

Extrempunkte von F:

$f(x) = -\frac{1}{6}(x^2 - 4)(x^2 - 4),$

$= -\frac{1}{6}[x^4 - 8x^2 + 16] = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3},$

$f'(x) = -\frac{1}{6}[4x^3 - 16x] = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x,$

$f''(x) = -\frac{1}{6}[12x^2 - 16] = -2x^2 + \frac{8}{3};$

$0 = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x = \frac{2}{3}x(-x^2 + 4),$ d.h.

mögliche Extrempunkte bei $x_{E_1} = 0,\quad x_{E_2} = -2,\quad x_{E_3} = 2.$

$f''(0) = \frac{8}{3} > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_{E_1} = 0$; $T(0|-\frac{8}{3})$,

$f''(-2) = -5,\bar{3} < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_{E_2} = -2$; $H_1(-2|0)$,

$f'''(2) = -5,\bar{3} < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_{E_3} = 2$; $H_2(2|0)$.

Zuordnung der Funktionen zu den Graphen:
Da der Graph

- K_1 2 Extrempunkte besitzt und nicht spiegelsymmetrisch ist,
- K_2 3 Extrempunkte besitzt und spiegelsymmetrisch ist,

gehört K_2 zu f (ist also Graph F), K_1 zu g (ist also Graph G).

Da die Nullstellen von f(x) bei $x_{0_1} = -2$, $x_{0_2} = 2$ liegen, entspricht auf der x-Achse 1 Teilstrich 2 Einheiten; da der Tiefpunkt von F bei $x_{E_1} = 0$ mit $y_{E_1} = -\frac{8}{3}$ liegt, entspricht auf der y-Achse ebenfalls 1 Teilstrich 2 Einheiten.

Tangente an F im Punkt $P(1|f(1))$:
Für eine Tangente an f(x) gilt allgemein: $f'(x_P) = \frac{y - y_P}{x - x_P}$.
Wegen $f(1) = -1,5$ und $f'(1) = 2$ erhält man hier also
$2 = \frac{y + 1,5}{x - 1} \Rightarrow y = 2(x - 1) - 1,5;$
Tangentengleichung t: $y = 2x - 3,5$

Schnittpunkt von Tangente t mit der x-Achse; Schnittwinkel:
Im Schnittpunkt S von t mit der x-Achse gilt: $0 = 2x - 3{,}5 \Rightarrow x_0 = \frac{7}{4} \Rightarrow S(\frac{7}{4} \mid 0)$.
Der Schnittwinkel α ergibt sich aus $f'(1) = m = \tan\alpha \Rightarrow 2 = \tan\alpha \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4°$.

b) Vergleich der Inhalte der Querschnittsflächen:

Kanal 1: $2\left|\int_0^2 (-\frac{1}{6}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3})\,dx\right| = 2\left|(-\frac{1}{30}x^5 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{8}{3}x)\Big|_0^2\right| =$

$2\left|(-\frac{32}{30} + \frac{32}{9} - \frac{16}{3}) - 0\right| = \frac{256}{45} \approx 5{,}7$

Die Abweichung zwischen den Inhalten der beiden Kanalquerschnittsflächen beträgt demnach $(6 - \frac{256}{45}) = \frac{14}{45}$; prozentuale Abweichung $\approx 5{,}18\ \% < 6\ \%$.

Berechnungsmöglichkeit für die Differenz der Flächeninhalte:

Es soll gelten $A_2 - A_1 = \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx$;

es gilt für $A_2 - A_1$: $A_2 - A_1 = \left|\int_{-2}^{2} g(x)\,dx\right| - \left|\int_{-2}^{2} f(x)\,dx\right| = -\int_{-2}^{2} g(x)\,dx + \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$,

(da A_2, A_1 unterhalb der x-Achse liegen, also jeweils < 0); nach Rechengesetzen für Integrale folgt: $A_2 - A_1 = \int_{-2}^{2} [-g(x) + f(x)]\,dx$, $A_2 - A_1 = \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx$.

c) Breite und Tiefe beider Abwasserkanäle:

Kanal 1: Wegen der beiden Nullstellen $x_{0_1} = -2$, $x_{0_2} = 2$ hat der Kanal eine Breite von 4 m, wegen des Tiefpunktes $T(0 \mid -\frac{8}{3})$ hat der Kanal eine Tiefe von $\frac{8}{3}$ m $\approx 2{,}67$ m.

Kanal 2: Die Breite und Tiefe sind bestimmbar nach Kenntnis von Nullstellen und Extremstellen von g(x): Nullstellen von g(x) ergeben sich aus $0 = \frac{9}{32}(x^2 - 4)(x + 2)$, also $x_{0_1} = -2$ und $x_{0_2} = 2$; folglich beträgt die Kanalbreite ebenfalls 4 m.

Extremstellen von g(x) ergeben sich aus $0 = g'(x)$:

$0 = [\frac{9}{32}(x^2 - 4)\cdot(x + 2)]' = \frac{9}{32}[x^3 + 2x^2 - 4x - 8]' = \frac{9}{32}(3x^2 + 4x - 4)$, d.h.:

$0 = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow$ Extremstellen bei $x_{E_1} = -2$ bzw. $x_{E_2} = \frac{2}{3}$.

Wegen $g''(\frac{2}{3}) = \frac{9}{32}(6\cdot\frac{2}{3} + 4) > 0$ liegt die tiefste Kanalstelle bei $x_{E_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ $|y_{E_2}| = \frac{8}{3}$. Damit ergibt sich:

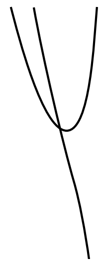
Beide Kanäle haben die gleiche Breite 4 m und die gleiche Tiefe $\frac{8}{3}$ m $\approx 2{,}67$ m.

Bewertungsvorschlag:

a)	Untersuchen der Symmetrie	2 BE
	Bestimmen der Extrempunkte	9 BE
	Bestimmen der Graphen; Skalierung	2 BE
	Ermitteln der Tangentengleichung, des Schnittpunkts und -winkels	4 BE
b)	Nachweisen der Flächeninhaltsabweichung	7 BE
	Berechnen der Differenz der Flächeninhalte	2 BE
c)	Nachweisen deer gleichen Breite	3 BE
	Nachweisen der gleichen Tiefe	6 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Koordinatensystem zur Darstellung von f_1 und f_2:



Punktsymmetrie beider Funktionen:

$$f_1(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^3 - \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{x^3} = -f_1(x)$$

$$f_2(-x) = -\frac{1}{2}(-x)^3 + \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{x^3} = -f_2(x)$$

Wegen $f_i(-x) = -f_i(x)$ für $i = 1, 2$ liegen die Graphen beider Funktionen punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Nullstellen:

$f_1(x)$: $0 = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{x^3}$; $\quad 0 = -x^6 - 4$ besitzt keine Lösung $\Rightarrow$
$f_1(x)$ besitzt keine Nullstelle.

$f_2(x)$: $0 = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$; $\quad 0 = -x^6 + 2$, also $x^6 = 2$ ist lösbar ($x_0 \approx \pm 1{,}12$) $\Rightarrow$
$f_2(x)$ besitzt Nullstellen.

Extrempunkte:

$f_1(x)$: $f_1'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x^{-4}$, $\quad f_1''(x) = -\frac{3}{2}x - 12x^{-5}$;

$$f_1'(x) = 0 = -\frac{3}{4}x^2 + 3x^{-4} \quad \Rightarrow$$

$$0 = -3x^6 + 12, \quad \text{also} \quad x_{E_1} = -\sqrt[3]{2}, \quad x_{E_2} = \sqrt[3]{2}.$$

Art der Extrema:

$f_1''(-\sqrt[3]{2}\,) \approx 5{,}67 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Tiefpunkt bei $\; x_{E_1} = -\sqrt[3]{2}\,; \quad T(-\sqrt[3]{2} \mid 1),$

$f_1''(\sqrt[3]{2} \quad \approx -5{,}67 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Hochpunkt bei $\; x_{E_2} = \sqrt[3]{2}\,; \quad H(\sqrt[3]{2} \mid -1).$

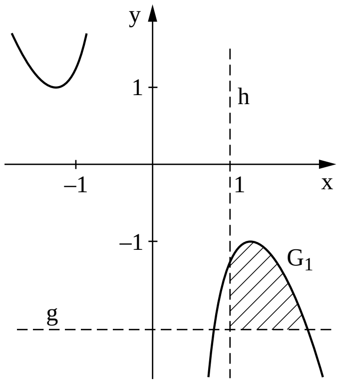
$f_2(x)$: $\quad f_2'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x^{-4}, \quad f_2''(x) = -3x + 12x^{-5};$

$\quad f_2'(x) = 0 = -\frac{3}{2}x^2 - 3x^{-4} \quad \Rightarrow \quad 0 = -3x^6 - 6;$

es existiert keine Lösung $\quad \Rightarrow \quad f_2(x)$ besitzt keine Extrema.

Zuordnung der Graphen zu Funktionen: siehe Koordinatensystem

b) Flächeninhalt:



$$A = \left| \int_1^{x_S} \left(-\frac{17}{8} - f_1(x)\right) dx \right|.$$

x_S ergibt sich aus dem Schnittpunkt von g und $f_1(x)$ für $x_S > 1$:

$-\frac{17}{8} = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{x^3}, \quad 0 = -\frac{1}{4}x^6 + \frac{17}{8}x^3 - 1,$

$x^6 - \frac{17}{2}x^3 + 4 = 0;\;$ mit $x^3 = z$ ergibt sich

$z^2 - \frac{17}{2}z + 4 = 0$ mit den Lösungen

$z_1 = \frac{1}{2}; \quad z_2 = 8 \quad \Rightarrow$

$x_1 = 2 \qquad [x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ entfällt wegen $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < 1]$

Maßzahl des Flächeninhalts:

$$A = \left| \int_1^2 \left[-\frac{17}{8} + \frac{1}{4}x^3 + x^{-3}\right] dx \right| = \left| \left[-\frac{17}{8}x + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^{-2}\right]\Big|_1^2 \right|$$

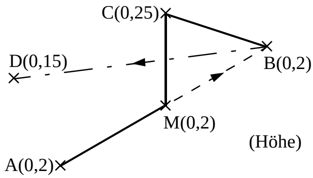
$$A = \left| \left(-\frac{17}{8} \cdot 2 + \frac{1}{16}\,16 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{17}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right) \right| \approx 0{,}81$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweisen, dass Funktionen ungerade	4 BE
	Untersuchen der Funktionen auf Nullstellen	4 BE
	Untersuchen der Funktion f_1 auf Extempunkte	9 BE
	Untersuchen der Funktion f_2 auf Extempunkte	4 BE
	Einzeichnen der Koordinantenachsen; Benennen der Graphen	4 BE
b)	Berechnen der Maßzahl des Flächeninhalts	10 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Länge des durch Kursänderung zurückgelegten Weges:
Der tatsächlich zurückgelegte Weg ist
$\left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MC}\right| + \left|\overrightarrow{CB}\right|$,
geplant war die Strecke $\left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|$.



Länge u des zusätzlichen Weges ist

$u = \left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MC}\right| + \left|\overrightarrow{CB}\right| - (\left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|) = \left|\overrightarrow{MC}\right| + \left|\overrightarrow{CB}\right| - \left|\overrightarrow{MB}\right|$, wobei

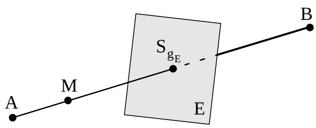
$M(\frac{10+40}{2} \mid \frac{20+40}{2} \mid \frac{0,2+0,2}{2}) = M(25 \mid 30 \mid 0,2)$;

$$u = \sqrt{(25-25)^2 + (45-30)^2 + (0,25-0,2)^2} + \sqrt{(40-25)^2 + (45-40)^2 + (0,2-0,25)^2} - \sqrt{(40-25)^2 + (40-30)^2 + (0,2-0,2)^2},$$

$$u = \sqrt{15^2 + 0,05^2} + \sqrt{15^2 + 5^2 + 0,05^2} - \sqrt{15^2 + 10^2} \approx 12,78$$

Der Umweg u hat eine Länge von 12,8 km.

Kursänderung vor Erreichen der Nebelfront:
Zum Nachweis der Kursänderung vor Erreichen der Nebelfront ist zu zeigen, dass der Punkt M näher bei A liegt als der Schnittpunkt S zwischen g(A, B) und E bzw. $\left|\overline{AM}\right| < \left|\overline{AS_{g_E}}\right|$.



Schnittpunkt S_{g_E} zwischen g(A, B) und E:

$$g(A, B):\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0,2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0,2 \end{pmatrix} + t^* \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 14,2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix},\quad \text{also}$$

$$g(A, B) \cap E:\quad \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0,2 \end{pmatrix} + t^* \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 14,2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{array}{lrcl|l} \text{(I)} & -10 + 3t^* & = & -3r + 4s, & \cdot 2 \\ \text{(II)} & -10 + 2t^* & = & -2r + s, & \cdot(-3) \\ \text{(III)} & -14 & = & 4r - 7s & \\ \hline \text{(I')} & -20 + 6t^* & = & -6r + 8s, & \\ \text{(II')} & +30 - 6t^* & = & 6r - 3s & \end{array}$$

Aus (I') + (II') folgt $10 = 5s \Rightarrow s = 2$;

mit s = 2 ergibt sich für r aus (III) $-14 = 4r - 14 \Rightarrow r = 0$;

mit r = 0, s = 2 ergibt sich für t* z.B. aus (I) $-10 + 3t^* = 0 + 8 \Rightarrow t^* = 6$.

Wegen t* = 6 ist der Schnittpunkt S

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 32 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } S_{g_E}(28 \mid 32 \mid 0{,}2).$$

Vergleich der Entfernungen $\left|\overrightarrow{AM}\right|$ und $\left|\overrightarrow{AS}\right|$:

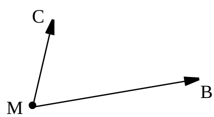
$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(25-10)^2 + (30-20)^2 + (0{,}2-0{,}2)^2} \approx 18{,}03$;

$\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{(28-10)^2 + (32-20)^2 + (0{,}2-0{,}2)^2} \approx 21{,}63$; wegen

$\left|\overrightarrow{AM}\right| < \left|\overrightarrow{AS}\right|$ findet die Kursänderung vor Erreichen der Nebelfront statt.

Winkel zwischen ursprünglichem und geändertem Kurs in M:

Der Winkel ergibt sich als der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{MB}$ und $\overrightarrow{MC}$, d.h.:



$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}) = \frac{\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}}{\left|\overrightarrow{MB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MC}\right|};$$

mit $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 40-25 \\ 40-30 \\ 0{,}2-0{,}2 \end{pmatrix}$, $\left|\overrightarrow{MB}\right| = 5\cdot\sqrt{13}$, $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 25-25 \\ 45-30 \\ 0{,}25-0{,}2 \end{pmatrix}$ und

$\left|\overrightarrow{MC}\right| = \frac{\sqrt{90001}}{20}$ ergibt sich $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}) = 0{,}5547 \Rightarrow$

$\sphericalangle(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}) \approx 56{,}3°$

Der Kursänderungswinkel beträgt etwa 56°.

b) Zusammenstoß beider Helikopter kann nicht stattfinden, wenn die Geraden g(M, C) und g(D, B) einander nicht schneiden. (Ein Schnitt zwischen g(C, B) und g(D, B) ist nicht zu untersuchen, da beide Geraden, falls nicht identisch, einzig den Punkt B gemeinsam haben.)

Geraden g(M, C) und g(D, B):

g(M, C): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}$;

g(D, B): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 35 \\ 0{,}15 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -35 \\ -5 \\ -0{,}05 \end{pmatrix}$

Für ihren Schnittpunkt müsste gelten: $\vec{x}_{g(M,\,C)} = \vec{x}_{g(D,\,B)}$, d.h.

$\begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 35 \\ 0{,}15 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -35 \\ -5 \\ -0{,}05 \end{pmatrix}$, also

(I) $25 = 5 - 35v \Rightarrow v = -\frac{20}{35} = -\frac{4}{7}$,

(II) $30 + 15u = 35 - 5 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \Rightarrow u = \frac{11}{21}$; Kontrolle in (III)

(III) $0{,}2 + \frac{11}{21} \cdot 0{,}05 = 0{,}15 + \left(-\frac{4}{7}\right) \cdot (-0{,}05) \Rightarrow$ liefert keine wahre Aussage.

Folglich gibt es zwischen g(M, C) und g(D, B) keine gemeinsamen Punkte. (Parallelität beider Kurse wäre für einen Zusammenstoß auch nicht relevant.)

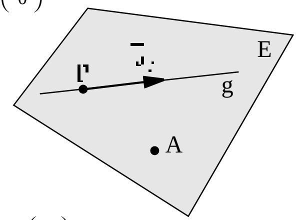
Bewertungsvorschlag:

a)	Berechnen der Länge des zusätzlich zurückgelegten Weges	4 BE
	Nachweisen, dass Helikopter vor Nebelfront umgeleitet	7 BE
	Ermitteln des Winkels	3 BE
b)	Nachweis, dass kein Zusammenstoß erfolgt	6 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) Ebene E(A, g)

Für die Ebene E gilt mit $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



E: $\quad \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{a}_g + s\overrightarrow{PA}$, d.h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(oder in Koordinatenform: Mit $\vec{n}_E = \vec{a}_g \times \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $(\vec{x} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{n} = 0$,

also $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 0 \end{pmatrix} = 0$, erhält man $2x_2 - 4 + x_3 = 0$)

b) Windschiefe Geraden g und h:

Gerade h durch die Punkte B und C:

h: $\quad \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Da $\vec{a}_g \neq k \cdot \vec{b}_h$ wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, sind g und h nicht parallel.

Weiterhin Untersuchung auf gemeinsamen Punkt von g und h:

(I) $\quad 1 + t = 5 + 4r$

(II) $\quad 2 = 6 + 6r \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{2}{3}$

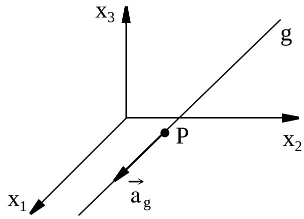
(III) $\quad 0 = -3 - 2r \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ Widerspruch

Das Gleichungssystem hat also keine Lösung – es existiert kein gemeinsamer Punkt von g und h.

$\Rightarrow$ g und h sind windschief zueinander.

Lage der Geraden g im Koordinatensystem:

Weil der Punkt P in der x_1-x_2-Ebene liegt und der Richtungsvektor nur in x_1-Richtung zeigt, liegt diese Gerade parallel zur x_1-Achse in der x_1-x_2-Ebene (und damit senkrecht zur x_2-x_3-Ebene).



Durchstoßpunkt D zwischen Ebene E und Gerade h:

Im Durchstoßpunkt D müssen die x_1-, x_2- und x_3-Komponente von Gerade und Ebene übereinstimmen.

Aus E: $2x_2 + x_3 = 4$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ folgt damit:

$2 \cdot (6 + 6r) + (-3 - 2r) = 4,$

$12 + 12r - 3 - 2r = 4 \;\Rightarrow\; r = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\; D(3|3|-2)$

c) Koordinaten zweier Punkte P_1 und P_2 mit gleichem Abstand zu D:

Da P_1 und P_2 auf der Geraden g liegen, gilt $P_1(1 + t_1|2|0)$ und $P_2(1 + t_2|2|0)$.

Für deren Abstand zu D folgt dann bei i = 1, 2:

$\left|\overrightarrow{DP_i}\right| = \sqrt{(1 + t_i - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{6}$, d.h.

$(-2 + t_i)^2 + 1 + 4 = 6, \quad (-2 + t_i)^2 = 1, \quad |-2 + t_i| = 1. \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 3$

$P_1(2|2|0)$ und $P_2(4|2|0)$ sind die Punkte auf g mit gleichem Abstand zu D.

Bewertungsvorschlag:

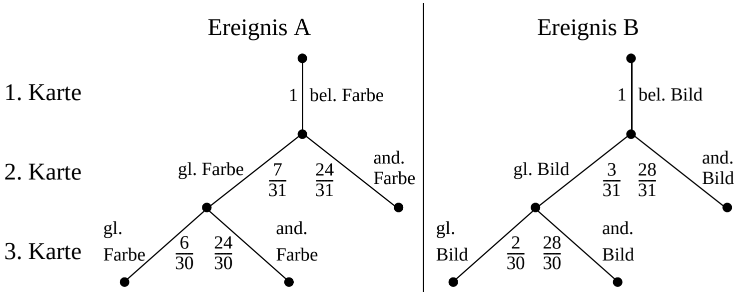
a)	Aufstellen der Ebenengleichung	3 BE
b)	Nachweisen, dass g und h zueinander windschief	6 BE
	Beschreiben der Lage von g	2 BE
	Berechnen der Koordinaten von D	4 BE
c)	Berechnen der Koordinaten von P_1, P_2	5 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.1

a) Wahrscheinlichkeiten ausgewählter Ereignisse:

Ereignis A: – Die drei gezogenen Karten sind von gleicher Farbe.

Ereignis B: – Die drei gezogenen Karten weisen den gleichen Wert auf.



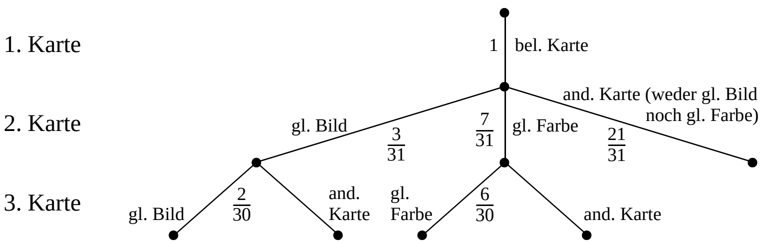
$P(A) = 1 \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{6}{30} = \frac{7}{155}$ $\qquad$ $P(B) = 1 \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} = \frac{1}{155}$

$P(A) \approx 4{,}5\ \%$ $\qquad$ $P(B) \approx 0{,}6\ \%$

b) Wahrscheinlichkeitsverteilung von Gewinn und Verlust:

Der Gewinn wird mit der Zufallsgröße X beschrieben. Der Einsatz beträgt 0,50 DM, bei Ereignis A werden 5 DM und bei Ereignis B 11 DM ausgezahlt.

Um die Gewinn- bzw. Verlustsituation darzustellen, eignet sich folgendes Schema:



und daraus

Gewinne x_i	(11 – 0,5) DM	(5 – 0,5) DM	–0,5 DM
$P(X = x_i)$	$1 \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} = \frac{1}{155}$	$1 \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{6}{30} = \frac{7}{155}$	$1 - \frac{1}{155} - \frac{7}{155} = \frac{147}{155}$
	Ereignis B	Ereignis A	

Untersuchung auf Gewinn / Verlust beim Spiel:

Mit dem Erwartungswert der Zufallsgröße X ergibt sich die langfristige Aussage über Gewinn oder Verlust:

$EX = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3)$, also lt. obiger Tabelle:

$EX = 10{,}5 \cdot \frac{1}{155} + 4{,}5 \cdot \frac{7}{155} + (-0{,}5) \cdot \frac{147}{155} \approx -0{,}203$

Das heißt: Auf lange Sicht stellt sich ein Verlust ein.

Auszahlungsbetrag für Ereignis A bei fairem Spiel:

Bei einem fairen Spiel ist $EX = 0$.

Wenn der Gewinnbetrag x_a bei Ereignis A so bestimmt werden soll, dass das Spiel fair ist, so muss gelten:

$EX = 0 = 10{,}5 \cdot \frac{1}{155} + x_a \cdot \frac{7}{155} + (-0{,}5) \cdot \frac{147}{155}$,

$0 = 10{,}5 + 7x_a - 73{,}5$, $\quad 0 = 7x_a - 63 \quad \Rightarrow \quad x_a = 9$

Wenn der Gewinn 9 DM und der Einsatz 0,50 DM betragen, muss der Auszahlungsbetrag 9,50 DM betragen.

c) Spielrunden für mindestens einmaliges Eintreten von B mit 10 %iger Wahrscheinlichkeit:

Mit einer Zufallsgröße Y bei insgesamt n Spielen lässt sich die Anzahl der Spielrunden, bei denen Ereignis B eintritt, beschreiben:

Spielrunden y_i	0)	1	2 …
$P(Y = y_i)$	$\left(\frac{154}{155}\right)^n$	$n\left(\frac{1}{155}\right)^1 \cdot \left(\frac{154}{155}\right)^{n-1}$	…

Y ist binomialverteilt mit $Y \sim B_{n;\,\frac{1}{155}}$, d.h., für $P(Y \geq 1) \geq 0{,}1$ gilt auch

$1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{154}{155}\right)^n \geq 0{,}1$

Nach $\left(\frac{154}{155}\right)^n \leq 0{,}9$ ergibt sich $\ln 0{,}9 \geq n(\ln 154 - \ln 155)$ und damit

$n \geq \frac{\ln 0{,}9}{\ln 154 - \ln 155} \approx 16{,}3$, d.h. : Es sind mindestens 17 Spiele notwendig.

Bewertungsvorschlag:

a)	Berechnen der Wahrscheinlichkeiten für A und B	3 BE
b)	Angeben der Wahrscheinlichkeitsverteilung	4 BE
	Untersuchen von Gewinn/Verlust auf lange Sicht	2 BE
	Ermitteln eines Auszahlungsbetrags für ein faires Spiel	2 BE
c)	Berechnen der notwendigen Spielanzahl	4 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.2

a) Wendepunkte von $f_a(x)$:

$f_a'(x) = -a^2x^2 - 2ax - \frac{4}{3}$, $\quad f_a''(x) = -2a^2x - 2a$,

$f_a'''(x) = -2a^2 \neq 0$ für alle $x \in DB$ bei $a > 0$.

Falls $f_a''(-\frac{1}{a}) = 0$, so besitzen die Graphen von f_a wegen $f_a'''(x) \neq 0$ für alle x an der Stelle $x_W = -\frac{1}{a}$ Wendepunkte:

$f_a''(-\frac{1}{a}) = -2a^2 \cdot (-\frac{1}{a}) - 2a = 2a - 2a = 0.$

Aus $f_a(-\frac{1}{a}) = -\frac{1}{3}a^2 \cdot (-\frac{1}{a})^3 - a(-\frac{1}{a})^2 - \frac{4}{3}(-\frac{1}{a}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a}$ ergibt sich

$y_W = f_a(-\frac{1}{a}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a}$.

Die Graphen von f_a besitzen also die Wendepunkte $W(-\frac{1}{a} \mid \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a})$.

b) Iterationsvorschrift für NEWTONsches Näherungsverfahren zur Bestimmung des Schnittpunktes S zwischen f_0 und h:

Allgemeine Iterationsvorschrift des NEWTONverfahrens: $\quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Für den Schnittpunkt $S(x_S \mid f(x_S))$ zwischen den Graphen von f_0 und h muss gelten: $\quad f_0(x_S) - h(x_S) = 0$

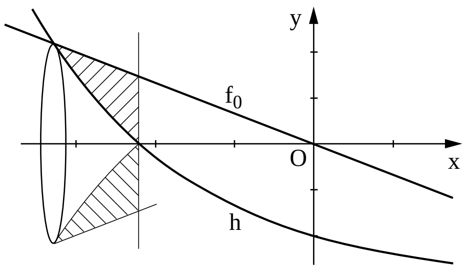
Die Abszisse x_S lässt sich berechnen als Nullstelle einer Hilfsfunktion $u(x) = f_0(x) - h(x)$ mit Hilfe des NEWTONverfahrens:

$u(x) = -\frac{1}{3}0^2 \cdot x^3 - 0 \cdot x^2 - \frac{4}{3}x - (e^{-x} - 3) = -\frac{4}{3}x - e^{-x} + 3; \quad u'(x) = -\frac{4}{3} + e^{-x} \Rightarrow$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{-\frac{4}{3}x_i - e^{-x_i} + 3}{-\frac{4}{3} + e^{-x_i}} = x_i - \frac{\frac{4}{3}x_i + e^{-x_i} - 3}{\frac{4}{3} - e^{-x_i}}.$$

c) Rotationsvolumen:

Wegen $e^{-x} - 3 = 0$, also $e^{-x} = 3$ und damit $x = -\ln 3$, ist $x_0 = -\ln 3$ die Nullstelle von h. x_S ist die Schnittstelle von h und f_0.



Für das Rotationskörpervolumen gilt dann

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

mit $a = x_S$ und $b = -\ln 3$.

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{x_S}^{-\ln 3} [f_0(x)]^2 dx - \pi \int_{x_S}^{-\ln 3} [e^{-x} - 3]^2 dx$$

$$= \pi \int_{x_S}^{-\ln 3} [-\tfrac{4}{3}x]^2 dx - \pi \int_{x_S}^{-\ln 3} [e^{-x} - 3]^2 dx = \pi \int_{x_S}^{-\ln 3} (\tfrac{16}{9}x^2 - e^{-2x} + 6e^{-x} - 9) dx$$

$$= \pi([\tfrac{16}{27}x^3 + \tfrac{1}{2}e^{-2x} - 6e^{-x} - 9x] \Big|_{x_S}^{-\ln 3})$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweisen der Existenz der Wendepunkte	7 BE
b)	Herleiten der Iterationsvorschrift	3 BE
c)	Nachweis der Richtigkeit der Volumenformel	5 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.3

a) Hyperbelgleichung:

Für eine Hyperbel mit Mittelpunkt M(0|0) gilt allgemein: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Wegen der Punkte P, Q auf der Hyperbel ergibt sich:

(I) $\frac{16}{a^2} - \frac{\frac{7}{4}}{b^2} = 1$ (II) $\frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$ bzw.

(I') $16b^2 - \frac{7}{4}a^2 = a^2b^2$ (II') $25b^2 - 4a^2 = a^2b^2$

Aus (I') erhält man:

(I'') $b^2 - \frac{7}{64}a^2 = \frac{a^2b^2}{16}$ bzw. $b^2(1 - \frac{a^2}{16}) = \frac{7}{64}a^2$

(I'') in (II'):

$$25 \cdot \frac{\frac{7}{64}a^2}{\left(1 - \frac{a^2}{16}\right)} - 4a^2 = a^2 \frac{\frac{7}{64}a^2}{\left(1 - \frac{a^2}{16}\right)}, \quad \text{also} \quad 25 \cdot \frac{7}{64} - 4(1 - \frac{a^2}{16}) = \frac{7}{64}a^2 \quad \text{bzw.}$$

$25 \cdot 7 - 4 \cdot 64 + 16a^2 = 7a^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3, \quad (a_2 = -3)$

$\Rightarrow \quad b_1 = \frac{3}{2}, \quad (b_2 = -\frac{3}{2}); \quad$ Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1;$

b) Brennpunkte und Asymptoten:

Wegen $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ ergibt sich $e_1 = \frac{3}{2}\sqrt{5}, \quad (e_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{5})$.

Da die Brennpunkte F_1, F_2 auf der x-Achse liegen, gilt:

$F_{1/2}(\pm e|0) \quad \Rightarrow \quad F_1(-\frac{3}{2}\sqrt{5}\,|0), \quad F_2(\frac{3}{2}\sqrt{5}\,|0)$

Für die Asymptoten einer Hyperbel gilt allgemein: $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$, d.h.

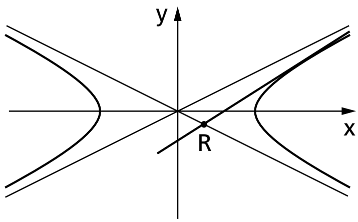
$y = \pm \frac{x}{a} \cdot b$, speziell also $y_I = -\frac{1}{2}x$, $y_{II} = \frac{1}{2}x$.

c) Schnittpunkt R zwischen Tangente und Asymptote im IV. Quadranten:

Wegen R im IV. Quadranten muss gelten:

$x_R > 0, \quad y = -\frac{1}{2}x$

(nur diese Asymptote verläuft vom II. in den IV. Quadranten).



Für eine Tangente an eine Hyperbel gilt:

$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$,

d.h. $y = (-1 + \frac{xx_1}{a^2}) \cdot \frac{b^2}{y_1}$.

Mit $Q(5|2)$ heißt das also:

$$y = -\frac{\frac{9}{4}}{2} + \frac{\frac{9}{4}}{2}x \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{8}x - \frac{9}{8}$$

Für den Schnittpunkt R ergibt sich wegen $R \in$ Tangente und $R \in$ Asymptote:

$\frac{5}{8}x_R - \frac{9}{8} = -\frac{1}{2}x_R, \quad \frac{9}{8}x_R = \frac{9}{8}$, also $x_R = 1 \quad \Rightarrow \quad y_R = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad R(1|-\frac{1}{2})$

Bewertungsvorschlag:

a)	Aufstellen der Hyperbelgleichung	7 BE
b)	Ermitteln der Koordinaten der Brennpunkte	2 BE
	Aufstellen der Asymptotengleichung	1 BE
c)	Berechnen der Koordinaten des Schnittpunkts R	5 BE
		15 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1998 / 99

Gymnasium

Thüringen

Hinweis:
Der Prüfungsteilnehmer hatte von den Aufgaben 1.1 und 1.2 ***eine*** *und von den Aufgaben 2.1 und 2.2 und 2.3* ***zwei*** *zur Bearbeitung auszuwählen.*

Aufgabe 1.1

Gegeben ist die Funktion f durch

$y = f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 4} \qquad (x \in \mathbb{R}, x \neq -4).$

a) Weisen Sie nach, dass gilt: $f'(x) = \frac{x^2 + 8x + 7}{(x + 4)^2}$!

Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, lokale Extrem- und Wendepunkte!
Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte!

b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen der Funktion f!
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f sowie die Asymptoten im Intervall $-10 \leq x \leq 8$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 9 \cdot \ln(x + 4)$ für $x > -4$ eine Stammfunktion von f ist!

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse vollständig begrenzt wird!

d) Die Punkte $A(-3; f(-3))$, $B(5; f(5))$ und $C(x_c; f(x_c))$ mit $-3 < x_c < 5$ bilden ein Dreieck.
Für welchen Wert von x_c ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal?
Berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt!

e) Durch die Punkte $A(-3; f(-3))$, $B(5; f(5))$ und $D(0; f(0))$ verläuft der Graph einer quadratischen Funktion q.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für q!

f) Im Punkt $B(5; f(5))$ existiert die Tangente t_B an den Graphen der Funktion f.
Zu dieser Tangente t_B gibt es durch B eine senkrechte Gerade g.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g!

Aufgabe 1.2

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = (x-2) \cdot e^{0,5x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Untersuchen Sie den Graphen f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrem- und Wendepunkte und geben Sie diese gegebenenfalls an!
Skizzieren Sie den Graphen f im Intervall $-3 \le x \le 3$!

b) Der Graph von f schneidet die x-Achse im Punkt N.
An den Graphen der Funktion f wird im Punkt N die Tangente gelegt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g, die auf dieser Tangente im Punkt N senkrecht steht!

c) Weisen Sie nach, dass $F(x) = e^{0,5x} \cdot (2x-8)$ eine Stammfunktion von f ist!
Ermitteln Sie diejenige Stammfunktion, die an der Stelle x = 0,5 den Wert $3e^{0,25}$ hat!

d) Der Grapf der Funktion f und der Graph der Funktion $y = x - 2$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie deren Inhalt!

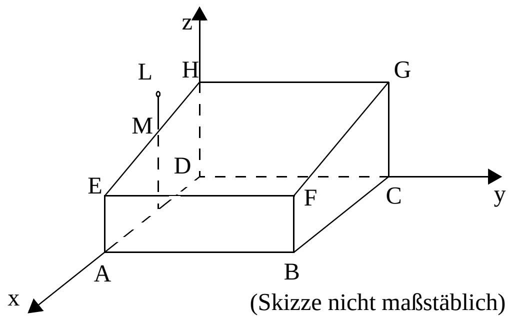
e) Durch den Punkt P(k; f(k)) mit $0 < k < 2$ werden die Parallelen zu den Koordinatenachsen gezeichnet. Diese Parallelen und die Koordinatenachsen begrenzen ein Rechteck.
Berechnen Sie k für den Fall, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird!
Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an!

f) Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat im Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse einen Extrempunkt und im Schnittpunkt des Graphen von f mit der x-Achse einen Wendepunkt.
Geben Sie eine Gleichung dieser Funktion an!

Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Eckpunkte A, B, C, D und E, F, G, H eine Garage mit rechteckiger Grundfläche und Pultdach. Drei Kanten liegen auf den Koordinatenachsen; der Boden ist Teil der x-y-Koordinatenebene.
Es ist A(5; 0; 0), B(5; 3; 0), E(5; 0; 2,5) und H(0; 0; 4) (Angaben in Metern).

Skizze:



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte C, D, F und G!

b) Berechnen Sie den Rauminhalt der prismenförmigen Garage sowie den Flächeninhalt des Daches!

c) Stellen Sie eine Gleichung für die Ebene ε der Dachfläche auf und ermitteln Sie den Neigungswinkel α des Daches zur x-y-Koordinatenebene!

d) Eine Lampe L befindet sich 1 m über dem Mittelpunkt der Kante $\overline{EH}$.
In welchem Punkt P_0 trifft ein Lichtstrahl von L durch den Punkt F die x-y-Koordinatenebene
Geben Sie die Koordinaten des Punktes P_0 an!

e) Durch den Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$ verläuft eine Parallele zur y-Achse. Auf dieser steht ein Kind so, dass es die Lampe L (aus Teilaufgabe d) gerade noch sehen kann.

In welcher Entfernung von der Kante $\overline{BC}$ muß sich das Kind mit einer Augenhöhe von 1 m aufstellen?

f) Auf der Kante $\overline{FG}$ existiert ein Punkt T so, dass gilt: $\overline{CT} \perp \overline{FG}$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T!

Aufgabe 2.2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte
A(–1; 3; –2), B(– 4; -3; –2), C(1; –3; –2) und D(2; –1; –2) gegeben.

a) Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene ε an, die die Punkte A, B und C enthält!

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt D in der Ebene ε (aus Teilaufgabe a) liegt!

c) Zeigen Sie, dass A, B, C und D in dieser Reihenfolge ein gleichschenkliges Trapez bilden!

d) Die Diagonalen des Trapezes ABCD schneiden einander in einem Punkt M. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes M und die Größe des Winkels, unter dem sich die Diagonalen schneiden!

e) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Trapezes ABCD 20 FE beträgt!

f) Gegeben ist die Gerade g mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(x \in \mathbb{R})$.

Weisen Sie nach, dass g orthogonal zu ε (aus Teilaufgabe a) ist!
Ermitteln Sie die Koordinaten aller Punkte S auf der Geraden g, so dass das Volumen der Pyramide ABCDS 48 VE beträgt!

Aufgabe 2.3

In einer Urne befinden sich 10 Kugeln. Eine Kugel ist mit der Ziffer 1 beschriftet. Drei Kugeln sind mit der Ziffer 3 beschriftet. Sechs Kugeln sind mit der Ziffer 6 beschriftet.

a) Der Urne werden zwei Kugeln mit einem Griff entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse!
A:= „Beide Kugeln haben die Aufschrift 6."
B:= „Beide Kugeln haben die gleiche Aufschrift."
C:= $\overline{A} \cap B$
D:= $A \cap \overline{B}$

b) Der Urne werden nun 4 Kugeln nacheinander mit Zurücklegen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 3 mehr als einmal und weniger als viermal auftritt!

c) Wie oft muß mit Zurücklegen mindestens gezogen werden, damit eine Kugel mit der Ziffer 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens einmal auftritt?

d) Es wird folgendes Gewinnspiel vereinbart:
Für einen Einsatz von 1,10 Euro darf der Spieler Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen ziehen.
Das Spiel wird abgebrochen, wenn eine Kugel mit der Ziffer 6 oder eine Kugel mit einer Ziffer erscheint, die größer oder gleich der vorhergehenden ist.
Die zuletzt gezogene Kugel bestimmt den Auszahlungsbetrag.
Bei Ziffer 6 beträgt er ein Euro, bei Ziffer 3 zwei Euro und bei Ziffer 1 drei Euro.
Erhält der Spieler auf lange Sicht einen Gewinn?

e) Ein Automat prüft die Qualität von angefertigten Kugeln.
Von 100 Kugeln sind 3 unbrauchbar. Der Rest ist brauchbar.
Der Automat irrt sich bei seiner Entscheidung mit einer Wahrscheinlichkeit von 1%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Automat eine Kugel als unbrauchbar aussortiert?

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Nachweis:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+4)-(x^2-2x-15)}{(x+4)^2} = \frac{2x^2+8x-2x-8-x^2+2x+15}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+8x+7}{(x+4)^2}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = y = 0$:
$0 = x^2 - 2x - 15 \Rightarrow x_1 = -3$; $x_2 = 5$, also $S_{x1}(-3 \mid 0)$; $S_{x2}(5 \mid 0)$
Schnittpunkte mit der y-Achse:
$x = 0$: $\quad y = \frac{-15}{4} = -3{,}75 \Rightarrow S_y(0 \mid -3{,}75)$

Lokale Extrempunkte:
$f'(x) = 0: \quad 0 = x^2 + 8x + 7 \Rightarrow \quad x_1 = -7; \quad x_2 = -1$

$$f''(x) = \frac{18}{(x+4)^3}; \qquad f''(-7) = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow \text{lokale Maximumstelle}$$

$$f''(-1) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow \text{lokale Minimumstelle}$$

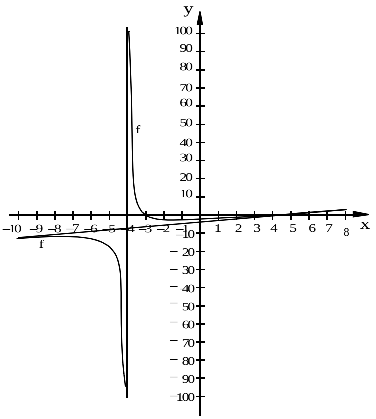
Mit $f(-7) = -16$ und $f(-1) = -4$ folgen $P_{Max}(-7 \mid -16)$; $P_{Min}(-1 \mid -4)$

Wendepunkte:
$$f''(x) = 0: \quad 0 = \frac{18}{(x+4)^3} \Rightarrow 0 = 18 \text{ (falsche Aussage)}$$

Es existiert also kein Wendepunkt.

b) Asymptoten:
Senkrechte Asymptoten:
$x + 4 = 0$, also $x = -4$
(Da $x = -4$ keine Nullstelle von f ist, ist es die Gleichung der senkrechten Asymptote.)
Schräge Asymptoten:
$(x^2 - 2x - 15) : (x + 4) = x - 6 + \frac{9}{x+4} \Rightarrow$ schräge Asymptote $y = x - 6$

Skizze:



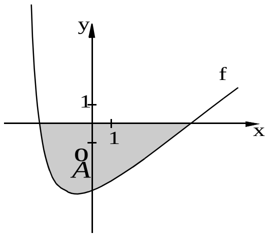
c) Nachweis Stammfunktion:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = x - 6 + 9 \cdot \frac{1}{x+4} = \frac{x(x+4) - 6(x+4) + 9}{x+4} = \frac{x^2 - 2x - 15}{x+4} = f(x)$$

Inhalt der Fläche:

Skizze:



$$A = \left| \int_{-3}^{5} f(x)dx \right|$$

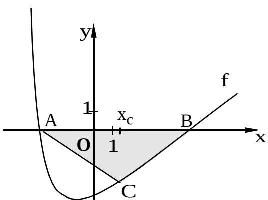
$$A = \left| \left[\frac{1}{2}x^2 - 6x + 9 \cdot \ln(x+4) \right]_{-3}^{5} \right|$$

$$A = |2,275 - 22,5|$$

$$A = 20,225 \text{ (FE)}$$

d) Maximaler Flächeninhalt:

Skizze:



$A(-3 \mid 0)$; $B(5 \mid 0)$

Hauptbedingung:

$$A(g, h_c) = \frac{1}{2} g \cdot h_c$$

Nebenbedingung:

$g = 8$

$h = -f(x_c)$

Zielfunktion: $A(x_c) = \dfrac{-4x^2 + 8x + 60}{x + 4}$

$A'(x_c) = \dfrac{-4x^2 - 32x - 28}{(x+4)^2} = 0 \;\Rightarrow\; -4x^2 - 32x - 28 = 0,$

also $x_1 = -7$ (entfällt, da $-3 < x_c < 5$); $x_2 = -1$

$A''(x_c) = \dfrac{-72}{(x+3)^3}$; $A''(-1) = -9 < 0 \;\Rightarrow\;$ lokales Maximum

$A(-1) = 16$ (FE)

e) Funktionsgleichung für q:

Es gilt: $q(x) = ax^2 + bx + c$

$A(-3 \mid 0) \;\Rightarrow$ (I) $\quad 0 = 9a - 3b + c$

$B(5 \mid 0) \;\Rightarrow$ (II) $\quad 0 = 25a + 5b + c$

$C(0 \mid -0{,}375) \Rightarrow$ (III) $-3{,}75 = c$

Lösen des Gleichungssystems ergibt

$a = 0{,}25$; $b = -0{,}5$; $c = -3{,}75$

$\Rightarrow q(x) = 0{,}25x^2 - 0{,}5x - 3{,}75$

f) Gleichung der Geraden g:

$B(5 \mid 0)$

Aus $m_t = f'(5) = \frac{8}{9}$ und $m_t \cdot m_g = -1$ folgt $m_g = -\frac{9}{8}$.

Mit $g(x) = m_g \cdot x + n$ und $B(5 \mid 0)$ ergibt sich

$0 = -\frac{9}{8} \cdot 5 + n$, also $n = \frac{45}{8}$.

$\Rightarrow g(x) = -\frac{9}{8}x + \frac{45}{8}$

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$y = 0$: $\quad 0 = (x-2) \cdot e^{0,5x}$;

da $e^{0,5x} \neq 0$, ist $x - 2 = 0$, also $x = 2$ $\;\Rightarrow S_x(2 \mid 0)$

Lokale Extrempunkte:

$f'(x) = e^{0,5x} + (x-2) \cdot e^{0,5x} \cdot 0,5 = 0,5x \cdot e^{0,5x}$

$f''(x) = e^{0,5x}(0,5 + 0,25x)$

$f'(x) = 0: \quad 0 = 0,5x \cdot e^{0,5x} \quad \Rightarrow \; x = 0$

$f''(0) = 0,5 > 0 \Rightarrow$ lokale Minimumstelle

$f(0) = -2 \;\Rightarrow\; P_{Min}(0\,|\,-2)$

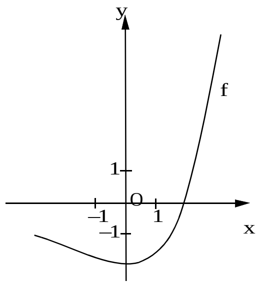
Wendepunkt:

$f''(x) = 0: \quad 0 = e^{0,5x}(0,5 + 0,25x) \;\Rightarrow\; x = -2$

$f'''(x) = e^{0,5x}(0,5 + 0,125x)\;; \quad f'''(-2) \neq 0 \quad \Rightarrow$ es existiert Wendepunkt

$f(-2) = -\frac{4}{e} \;\Rightarrow\; P_W\left(-2\,|\,-\frac{4}{e}\right)$

Skizze:



b) Gleichung der Geraden g:

Aus $m_t = f'(2) = e$ und $m_t \cdot m_g = -1$ folgt $m_g = -\frac{1}{e}$.

Mit $g(x) = m_g \cdot x + n$ und $N(2\,|\,0)$ ergibt sich

$0 = -\frac{1}{e} \cdot 2 + n$, also $n = \frac{2}{e} \;\Rightarrow\; g(x) = -\frac{1}{e}x + \frac{2}{e}$.

c) Nachweis Stammfunktion:

$F'(x) = f(x)$

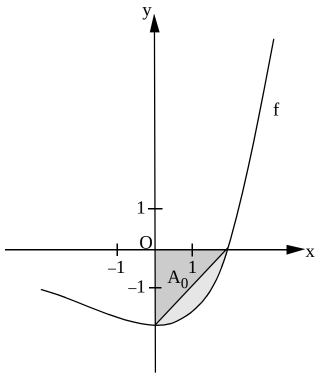
$q'(x) = 0,5 \cdot e^{0,5x} \cdot (2x - 8) + e^{0,5x} \cdot 2 = e^{0,5x} \cdot (x - 2) = f(x)$

$q(x) = e^{0,5x} \cdot (2x - 8) + c$ (Menge aller Stammfunktionen)

$3 \cdot e^{0,25} = e^{0,25} \cdot (-7) + c$

$c = 10 \cdot e^{0,25} \;\Rightarrow\; q(x) = e^{0,5x} \cdot (2x - 8) + 10 \cdot e^{0,25}$

d) Flächeninhalt:
Skizze:



Schnittstellen:

$(x-2) = (x-2)\cdot e^{0,5x}$

$0 = (x-2)\cdot e^{0,5x} - (x-2)$

$0 = (x-2)\cdot(e^{0,5x} - 1)$

$\Rightarrow$ (1) $x - 2 = 0$, also $x_1 = 2$

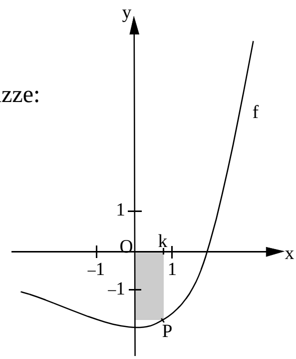
$\Rightarrow$ (2) $e^{0,5x} = 1$, also $x_2 = 0$

$$A = \left|\int_0^2 f(x)dx\right| - A_{Dreieck}$$

$$A = \left|\left[e^{0,5x}(2x-8)\right]_0^2\right| - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$$

$A \approx 0,87$ (FE)

e) Skizze:



Hauptbedingung: $A = a\cdot b$
Nebenbedingung: $a = k$; $b = -f(k)$
Zielfunktion:

$A(k) = (-k^2 + 2k)\cdot e^{0,5k}$

$A'(k) = (-0,5k^2 - k + 2)\cdot e^{0,5k}$

$A'(k) = 0$

$A'(k) = 0$: Wegen $e^{0,5k} \neq 0$ gilt $0 = -0,5k^2 - k + 2$

$\Rightarrow k_1 = -1 + \sqrt{5}$; $k_2 = -1 - \sqrt{5}$ (entfällt, da $0 < k < 2$)

$A''(k) = (-0,25k^2 - 1,5k)\cdot e^{0,5k}$; $A''(-1 + \sqrt{5}) \approx -4,15 < 0$

$\Rightarrow$ lokale Maximumstelle

Maximaler Flächeninhalt: $A(-1 + \sqrt{5}) \approx 1,75$ (FE)

f) Gleichung ganzrationale Funktion 3. Grades: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

für Extremstelle gilt: $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$
für Wendestelle gilt: $y'' = 6ax + 2b = 0$

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & d = -2 \\ \text{(II)} & 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ \text{(III)} & c = 0 \\ \text{(IV)} & 12a + 2b = 0 \end{array}$$

ergibt $a = -\frac{1}{8}$; $b = \frac{3}{4}$; $c = 0$; $d = -2$

$\Rightarrow$ Funktionsgleichung: $y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 2$

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Koordinaten der Punkte: C(0 | 3 | 0); D(0 | 0 | 0); F(5 | 3 | 2,5); G(0 | 3 | 4)

b) Volumen der Garage:

$V = A_G \cdot h$; $A_G = A_{Trapez} = A_{BCGF}$

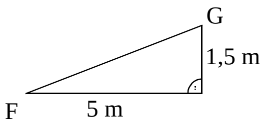
$$A_G = \frac{|\overline{BF}| + |\overline{CG}|}{2} \cdot |\overline{BC}| = \frac{2,5 + 4}{2} \cdot 5 = 16,25 \ (m^2)$$

$$h = |\overline{AB}| = 3\,m$$

$V = 16,25m^2 \cdot 3m = 48,75m^3$

Dachfläche:

Skizze:



$A = |\overline{EF}| \cdot |\overline{FG}|$

$A = 3m \cdot \sqrt{27,25}m$

$|\overline{FG}| = \sqrt{(5m)^2 + (1,5m)^2}$

$|\overline{FG}| = \sqrt{27,25}m$

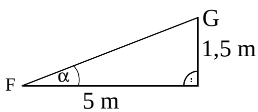
$A \approx 15,66m^2$

c) Ebenengleichung:

z.B. $\varepsilon : \vec{x} = \overrightarrow{OH} + r\overrightarrow{HE} + s\overrightarrow{HG}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1,5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Neigungswinkel α:

Skizze:



$\tan\alpha = \frac{1,5}{5} = 0,3 \Rightarrow \alpha \approx 16,7°$

d) M(2,5 | 0 | 3,25); L(2,5 | 0 | 4,25)

$g_{LF}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 4,25 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \\ -1,75 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_{XY}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$g_{LF} \cap \varepsilon_{XY}:$ $\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 2,5 + 2,5u & = & r \\ \text{(II)} & 3u & = & s \\ \text{(III)} & 4,25 - 1,75u & = & 0 \end{array}$

$\Rightarrow u \approx 2,43 \;;\; s \approx 7,29 \;;\; r \approx 8,57$, also P_0(8,57 | 7,29 | 0)

e) M_{FG}(2,5 | 3 | 3,25) ; $g_{LH}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 4,25 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Augen des Kindes: (2,5 | y | 1) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2,5 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösen des Gleichungssystems: (I) 2,5 = 2,5
(II) y = 3r
(III) 1 = 4,5 – r $\Rightarrow$ r = 3,25 , also y = 9,75

Entfernung: 9,75 m – 3 m = 6,75 m

f) $T \in \overline{FG} \Rightarrow g_{FG}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

Da $\overline{CT} \perp \overline{FG}$ genau dann, wenn $\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$,

folgt für $\overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 5 - 5t \\ 0 \\ 2,5 + 1,5t \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 - 5t \\ 0 \\ 2,5 + 1,5t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} = ((5 - 5t) \cdot (-5) + 0 + (2,5 + 1,5t) \cdot 1,5)$$

$$= 27,25t - 21,25 = 0.$$

$\Rightarrow t \approx 0,78$ und nach Einsetzen in g_{FG}: T(1,1 | 3 | 3,67)

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) Ebenengleichung:

$$\varepsilon: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}\,;\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix}$$

b) Punktprobe für D(2 | – 1 | – 2):

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix}$$

Da das Gleichungssystem (I) $2 = -1 - 3r + 2s$
(II) $-1 = 3 - 6r - 6s$
(III) $-2 = -2$

eindeutig lösbar ist ($r = -\frac{1}{3}$; $s = 1$), ist nachgewiesen, dass der Punkt D in der Ebene ε liegt.

c) Nachzuweisen ist:
(1) ein Paar paralleler Seiten und
(2) gleichlange Schenkel

(1) Für die Seiten $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ gilt $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$; $k = 3$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$, also liegt ein Trapez vor.

(2) Für die Schenkel $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}$ gilt

$\left|\overrightarrow{DA}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = 5$ (LE), d.h., die Schenkel sind gleich lang;
die Punkte A, B, C, D bilden also ein gleichschenkliges Trapez.

d) $g_{AC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix}$; $g_{BD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\-3\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}$

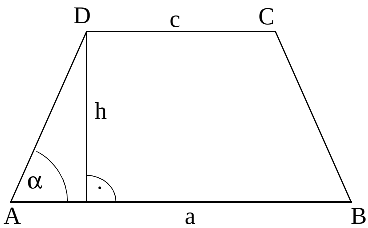
$g_{AC} \cap g_{BD}$: (I) $-1 + 2r = -4 + 6s$
(II) $3 - 6r = -3 + 2s$
(III) $-2 = -2$

$\Rightarrow \quad s = \frac{3}{4}$; $r = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ M(0,5 | – 1,5 | – 2)

Schnittwinkel der Diagonalen:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{0}{40} = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$$

e) Flächeninhalt des Trapezes:



Es gilt: $a = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{45}\,\text{LE}$

$c = \left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{5}\,\text{LE}$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = 5\,\text{LE}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{3}{\sqrt{45}},$$

also $\alpha \approx 63{,}43°$

$\Rightarrow h = \sin\alpha\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right| \approx 4{,}47\,\text{LE}$

Damit folgt $A_{Tr} = \frac{1}{2}(a+c)\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{45}\text{LE} + \sqrt{5}\text{LE})\cdot 4{,}47\text{LE} = 20\ (\text{FE})$

f) $g \perp \varepsilon$, wenn das Skalarprodukt des Richtungsvektors der Geraden mit jeweils einem Spannvektor der Ebene gleich null ist:

(1) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix} = 0\cdot(-3) + 0\cdot(-6) + 1\cdot 0 = 0$

(2) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix} = 0\cdot 2 + 0\cdot(-6) + 1\cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ Die Gerade g verläuft orthogonal zur Ebene ε .

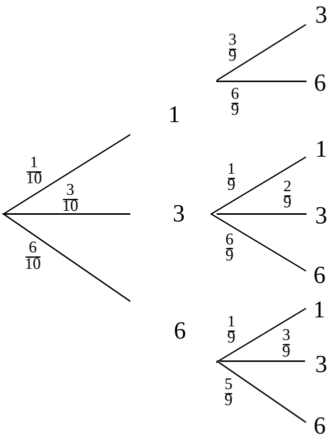
Koordinaten aller Punkte S:
Für das Volumen der Pyramide gilt: $V_P = \frac{1}{3}A_{ABCD}\cdot h$

Mit $V_P = 48$ (VE) folgt: $48 = \frac{1}{3}\cdot 20\cdot h$, also $h = \left|\overline{MS}\right| = 7{,}2$ (LE).

Da die Punkte S auf einer Geraden g, mit $g \perp \varepsilon$, liegen und für die Punkte A, B, C, D und M jeweils $x_3 = -2$ gilt, folgt für die Koordinaten x_3 von S: $x_3 = -2 + 7{,}2 = 5{,}2$
oder $x_3 = -2 - 7{,}2 = -9{,}2$
$\Rightarrow S_1(0{,}5 \mid -1{,}5 \mid 5{,}2)$, $S_2(0{,}5 \mid -1{,}5 \mid -9{,}2)$

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.3

a) Baumdiagramm:



e_i	$P(e_i)$
(1; 3)	$\frac{1}{30}$
(1; 6)	$\frac{2}{30}$
(3; 1)	$\frac{1}{30}$
(3; 3)	$\frac{1}{15}$
(3; 6)	$\frac{1}{5}$
(6; 1)	$\frac{1}{15}$
(6; 3)	$\frac{1}{5}$
(6; 6)	$\frac{1}{3}$

$P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$; $P(C) = \frac{1}{15}$; $P(D) = 0$

wobei $\overline{A}$: nicht beide Kugeln haben die Aufschrift 6,
also $C = \overline{A} \cap B = \{(3, 3)\}$
$\overline{B}$: nicht beide Kugeln haben die gleiche Aufschrift,
also $D = A \cap \overline{B} = \emptyset$

b) Ziffer 3 wird X-mal entnommen:
$P(1 < X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3)$
$= \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \frac{7}{10} = 0{,}3402$

c) Ziffer 6 wird X-mal gezogen: $P(X \geq 1) > 0,9$

Mit $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ (Gegenereignis: „keine Sechs wird gezogen“)

und $P(X = 0) = \left(\frac{4}{10}\right)^n$ folgt

$$1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{4}{10}\right)^n > 0,9$$

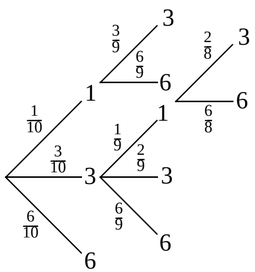
$$0,1 > \left(\frac{4}{10}\right)^n$$

$$\ln 0,1 > n \cdot \ln\frac{4}{10}$$

$$n > 2,51$$

$\Rightarrow$ Es muss mindestens 3-mal gezogen werden.

d) Baumdiagramm:



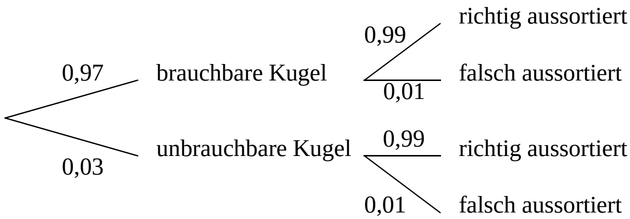
e_i	$P(e_i)$	Gewinn
(1; 3)	$\frac{3}{90}$	0,9
(1; 3)	$\frac{6}{90}$	–0,1
(3; 1; 3)	$\frac{6}{720}$	0,9
(3; 1; 6)	$\frac{18}{720}$	–0,1
(3; 3)	$\frac{6}{90}$	0,9
(3; 6)	$\frac{18}{90}$	–0,1
6	$\frac{6}{10}$	–0,1

Gewinn in Euro X_i	– 0,1	0,9
$P(X = X_i)$	$\frac{107}{120}$	$\frac{13}{120}$

$$E(X_i) = -0,1 \cdot \frac{107}{120} + 0,9 \cdot \frac{13}{120} \approx 0,003$$

Auf lange Sicht erhält der Spieler einen „Gewinn“ von 0,3 ct pro Spiel.

e)



A: „Automat sortiert eine Kugel als unbrauchbar aus“

P(A) = P (brauchbare Kugel und falsch aussortiert)

+ P (unbrauchbare Kugel und richtig aussortiert)

$P(A) = 0,97 \cdot 0,01 + 0,03 \cdot 0,99 = 0,0394$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
1.1	9	5	4	4	4	4	30
1.2	9	3	3	4	7	4	30
2.1	1	3	3	3	3	2	15
2.2	1	1	2	3	3	5	15
2.3	4	2	2	4	3	-	15

Abiturprüfung
Grundkurs

1998 / 99

Gymnasium

8. Gymnasium Berlin-Marzahn

Aufgabe 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^x - e^{2x}$.
K sei das Schaubild (die grafische Darstellung) der Funktion f.

a) Untersuchen Sie die Funktion f bzw. das Schaubild K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte!
Zeichnen Sie K für $-4 \leq x \leq 1$ (1 LE $\triangleq$ 2 cm)!

b) Die Kurve K, die x-Achse und die y-Achse schließen im I. Quadranten eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie deren Inhalt A!

c) Die x-Achse, die y-Achse, die Kurve K und die Gerade mit der Gleichung $x = z$ $(z < 0)$ schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt $A(z)$ und den Grenzwert des Flächeninhalts für $z \to -\infty$!

d) Gegeben ist die Funktionenschar f mit $f_a(x) = ae^x - e^{2x}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$.
Bestimmen Sie für a = 2 den Schnittwinkel α zwischen Nullstellentangente und Wendetangente! (***40%***)

Aufgabe 2: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -\frac{6}{x}(1 - \ln 3x)$ $(0{,}5 \leq x \leq 10)$.

a) Berechnen Sie die Nullstelle von f!
Der Graph von f hat genau einen lokalen Maximumpunkt. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes!
Skizzieren Sie den Graphen von f!

b) Zeigen Sie, dass $F(x) = -3(2 - \ln 3x)\ln 3x$ eine Stammfunktion von f ist!
Der Graph von f, die x-Achse und eine Gerade mit der Gleichung $x = c$ $(c > 1)$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A vollständig. Berechnen Sie c für den Fall, dass A = 3 FE gilt!
Überprüfen Sie Ihre Rechnung zeichnerisch, indem Sie die Gerade $x = c$ in das Koordinatensystem eintragen!

c) Gegeben ist die Funktionenschar g mit $g_a(x) = -\frac{6}{x}(1 - \ln ax)$ $(x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+)$.
Der Graph einer dieser Funktionen hat an der Stelle x = 2 den Anstieg 1.
Berechnen Sie a für diesen Fall! (***30%***)

Aufgabe 3: Geometrie

Gegeben sind die Raumpunkte $A(4\,|\,2\,|\,1)$, $B(4\,|\,5\,|\,1)$, $C(-4\,|\,2\,|\,7)$ und $D_r(4r + 1\,|\,r\,|\,-3r)$ $(r \in \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist!
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC!

b) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, in der alle Punkte D_r, $r \in \mathbb{R}$, liegen!
c) Bestimmen Sie $r \in \mathbb{R}$ so, dass das Dreieck ABD_r einen rechten Winkel besitzt!
d) Es gibt genau ein $r \in \mathbb{R}$, so dass das Dreieck ABD_r gleichschenklig ist. Bestimmen Sie dieses r!
e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, welche die Punkte A, B, C enthält!
Geben Sie eine Normalengleichung für E an!
f) Bestimmen Sie das Volumen V_r der Pyramide $ABCD_r$!
Erwartetes Ergebnis: $V_r = 13$ für alle $r \in \mathbb{R}$.
Kommentieren Sie dieses Ergebnis, deuten Sie es geometrisch! (***30%***)

Erwartungsbild zu Aufgabe 1

a) Nullstelle x_N: $0 = 2e^{x_N} - e^{2x_N} = e^{x_N}(2 - e^{x_N})$

(1) $e^{x_N} \neq 0$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(2) $0 = 2 - e^{x_N} \Rightarrow e^{x_N} = 2$, also $x_N = \ln 2 \approx 0{,}69314$
K schneidet die x-Achse in $S_x(\ln 2 \mid 0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 2e^0 - 2e^{2 \cdot 0} = 2 - 1 = 1$
K schneidet die y-Achse in $S_y(0 \mid 1)$.

Extrempunkte: $f'(x) = 2e^x - 2e^{2x} = 2e^x(1 - e^x)$
$f''(x) = 2e^x - 2 \cdot 2e^{2x} = 2e^x(1 - 2e^x)$

Es gilt $f'(x_E) = 0$, also $0 = 2e^{x_E}(1 - e^{x_E})$.

(1) $2e^{x_E} \neq 0$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) $0 = 1 - e^{x_E} \Rightarrow e^{x_E} = 1$, also $x_E \cdot \ln e = \ln 1$ und damit $x_E = 0$.
Es kann maximal einen lokalen Extrempunkt geben.
$f''(0) = 2e^0(1 - 2e^0) = 2(1 - 2) = -2 < 0$ (Maximum)
$f(x_E) = f(0) = 2e^0 - e^{2 \cdot 0} = 2 - 1 = 1$
Der Punkt $P_E(0 \mid 1)$ ist ein lokaler Maximumpunkt von K.
Wendepunkt: $f'''(x) = 2e^x - 4 \cdot 2e^{2x} = 2e^x(1 - 4e^x)$

Es gilt $f''(x_W) = 0$, also $2e^{x_W}(1 - 2e^{x_W}) = 0$

(1) $2e^{x_W} \neq 0$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(2) $0 = 1 - 2e^{x_W} \Rightarrow e^{x_W} = \frac{1}{2}$, also $\ln e^{x_W} = \ln\frac{1}{2}$ und damit

$$x_W = \ln\frac{1}{2} \approx -0{,}69314.$$

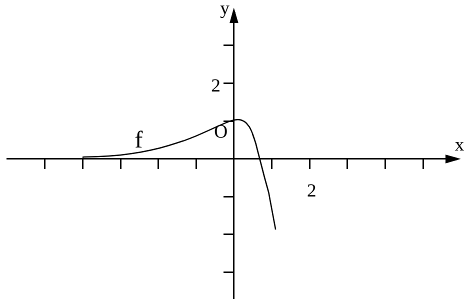
$f'''(\ln\frac{1}{2}) = 2e^{\ln\frac{1}{2}}(1 - 4e^{\ln\frac{1}{2}}) = 2 \cdot \frac{1}{2}(1 - 4 \cdot \frac{1}{2}) = -1 \neq 0$ (Wendestelle)

$f(\ln\frac{1}{2}) = 2e^{\ln\frac{1}{2}} - e^{2\ln\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} - (e^{\ln\frac{1}{2}})^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Der Wendepunkt von K lautet $P_W(\ln\frac{1}{2} \mid \frac{3}{4})$.

Wertetafel (nicht verlangt):

x	– 4	–3	–2	–1	0	1
y	0,036	0,097	0,252	0,600	1	–1,952



b) $A = \int_0^{\ln 2} f(x)dx = \int_0^{\ln 2} (2e^x - e^{2x})dx = [2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}]_0^{\ln 2}$

$= (2e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2\ln 2}) - (2e^0 - \frac{1}{2}e^{2 \cdot 0}) = (4 - 2) - (2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (FE)

Das Flächenstück hat einen Inhalt von 0,5 FE.

c) $A = \int_z^0 f(x)dx = \int_z^0 (2e^x - e^{2x})dx = [2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}]_z^0$

$= (2e^0 - \frac{1}{2}e^{2 \cdot 0}) - (2e^z - \frac{1}{2}e^{2z}) = (2 - \frac{1}{2}) - 2e^z + \frac{1}{2}e^{2z} = \frac{3}{2} - 2e^z + \frac{1}{2}e^{2z}$

Die Flächeninhaltsfunktion lautet $A(z) = \frac{3}{2} - 2e^z + \frac{1}{2}e^{2z}$.

$g = \lim\limits_{z \to -\infty} A(z) = \lim\limits_{z \to -\infty} (\frac{3}{2} - 2e^z + \frac{1}{2}e^{2z}) = \lim\limits_{z \to -\infty} \frac{3}{2} - \lim\limits_{z \to -\infty} 2e^z + \lim\limits_{z \to -\infty} \frac{1}{2}e^{2z}$

$= \frac{3}{2} - \lim\limits_{z \to -\infty} 2 \cdot \lim\limits_{z \to -\infty} e^z + \lim\limits_{z \to -\infty} \frac{1}{2} \cdot \lim\limits_{z \to -\infty} e^{2z} = \frac{3}{2} - 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{3}{2}$

Der Grenzwert der Flächeninhaltsfunktion für $z \to -\infty$ lautet $g = \frac{3}{2}$.

d) Es gilt:

$f_2(x) = 2e^x - e^{2x}$; $f'(x_N) = m_{T_N}$; $f'(x_W) = m_{T_W}$

$x_N = \ln 2 \Rightarrow m_{T_N} = f'(\ln 2) = 2e^{\ln 2}(1 - e^{\ln 2}) = 2 \cdot 2 \cdot (1 - 2) = -4$

$x_W = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow m_{T_W} = f'(\ln \frac{1}{2}) = 2e^{\ln \frac{1}{2}}(1 - e^{\ln \frac{1}{2}}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\tan\alpha = \left|\frac{m_{T_W} - m_{T_N}}{1 + m_{T_N} m_{T_W}}\right| = \left|\frac{0{,}5 - (-4)}{1 + 0{,}5 \cdot (-4)}\right| = \left|\frac{4{,}5}{-1}\right| = 4{,}5 \Rightarrow \alpha \approx 77{,}47°$

Der Schnittwinkel α beträgt etwa 77,47°.

Bewertungsvorschlag:

a)	Nullstelle	3 BE
	Schnittpunkt mit der y-Achse	1 BE
	1. und 2. Ableitung	4 BE
	Extrempunkt	3 BE
	3. Ableitung	2 BE
	Wendepunkt	3 BE
	Skizze des Graphen	5 BE
b)	Flächenberechnung	4 BE
c)	Grenzwertberechnung	4 BE
d)	Berechnung des Schnittwinkels α	3 BE
		32 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2

a) Nullstelle x_N: $f(x_N) = 0$, also $0 = -\frac{6}{x_N}(1 - \ln 3x_N)$

(1) $\frac{6}{x_N} \neq 0$, da $\frac{1}{x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

(2) $0 = 1 - \ln 3x_N \Rightarrow \ln 3x_N = 1$, also $3x_N = e$ bzw. $x_N = \frac{e}{3} \approx 0{,}906$

Die Nullstelle der Funktion f ist $x_N = \frac{e}{3} \approx 0{,}906$.

Maximumpunkt: $f(x) = -\frac{6}{x}(1 - \ln 3x) = -6x^{-1}(1 - \ln 3x)$

$$f'(x) = -6 \cdot (-1)x^{-2}(1 - \ln 3x) + (-6x^{-1})(0 - 3\tfrac{1}{3x}) = 6x^{-2}(1 - \ln 3x) + 6x^{-2}$$

$$= 6x^{-2}(1 - \ln 3x + 1) = 6x^{-2}(2 - \ln 3x) = \frac{6}{x^2}(2 - \ln 3x)$$

$$f''(x) = 6 \cdot (-2)x^{-3}(2 - \ln 3x) + (6x^{-2})(0 - 3\tfrac{1}{3x}) = -12x^{-3}(2 - \ln 3x) - 6x^{-3}$$

$$= -6x^{-3}(2(2 - \ln 3x) + 1) = -6x^{-3}(5 - 2\ln 3x) = -\frac{6}{x^3}(5 - 2\ln 3x)$$

Es gilt $f'(x_E) = 0$, also $0 = \frac{6}{x_E^2}(2 - \ln 3x_E)$.

(1) $\frac{6}{x_E^2} \neq 0$, da $\frac{1}{x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

(2) $0 = 2 - \ln 3x_E \Rightarrow \ln 3x_E = 2$, also $3x_E = e^2$ bzw. $x_E = \frac{1}{3}e^2 \approx 2{,}463$

(oder ausführlich: $\ln 3x_E = \ln 3 + \ln x_E = 2$
$\Rightarrow \ln x_E = 2 - \ln 3 \approx 0{,}9013877$, also $x_E \approx 2{,}463$)

$f''(x_E) = -\frac{6}{x_E^3}(5 - 2\ln 3x_E)$

Wegen $\ln 3x_E = 2$ und $x_E > 0$ folgt $f''(x_E) = -\frac{6}{x_E}(5 - 4) = -\frac{6}{x_E} < 0$.

An der Stelle $x_E = \frac{1}{3}e^2$ hat die Funktion f ein lokales Maximum.

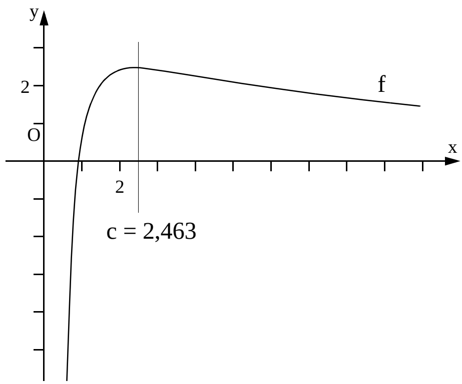
$f(x_E) \approx -\frac{6 \cdot 3}{e^2}(1 - \ln(3\frac{1}{3}e^2)) = -\frac{18}{e^2}(1 - 2) = \frac{18}{e^2} \approx 2{,}436$

Der Maximumpunkt P_E hat die Koordinaten $P_E(\frac{1}{3}e^2 \mid \frac{18}{e^2})$ bzw.

$P_E(2{,}463 \mid 2{,}436)$.

Wertetafel:

x	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	–7,13	0,59	2,38	2,39	2,23	2,04	1,89	1,75	1,63	1,47	1,44



b) Stammfunktionsnachweis: $F(x) = -3(2 - \ln 3x)\ln 3x = (-6 + 3\ln 3x) \cdot \ln 3x$

$f'(x) = (0 + 3 \cdot 3\frac{1}{3x}) \cdot \ln 3x + (-6 + 3\ln 3x) \cdot 3\frac{1}{3x} = \frac{3}{x}\ln 3x - \frac{6}{x} + \frac{3}{x}\ln 3x$

$= \frac{6}{x}\ln 3x - \frac{6}{x} = -\frac{6}{x}(-\ln 3x + 1) = -\frac{6}{x}(1 - \ln 3x) = f(x)$

Es gilt $D_F = D_f = \mathbb{R}^+$, also wurde gezeigt, dass F eine Stammfunktion von f ist.

$$A = \int_{\frac{e}{3}}^{c} f(x)dx$$

$$3 = \int_{\frac{e}{3}}^{c} f(x)dx = \left[-3(2 - \ln 3x) \cdot \ln 3x\right]_{\frac{e}{3}}^{c}$$

$$= (-3(2 - \ln 3c) \cdot \ln 3c) - (-3(2 - \ln 3 \cdot \tfrac{e}{3}) \cdot \ln 3 \cdot \tfrac{e}{3}$$

$$= -6\ln 3c + 3(\ln 3c)^2 - (-3(2-1) \cdot 1) = -6\ln 3c + 3(\ln 3c)^2 + 3$$

$\Rightarrow \quad 0 = -6\ln 3c + 3(\ln 3c)^2 = \ln 3c(-6 + 3\ln 3c)$

(1) $\ln 3c = 0 \Rightarrow 3c = 1$, also $c = \frac{1}{3}$; nicht möglich, da $c > 1$ vorausgesetzt wurde.

(2) $3\ln 3c - 6 = 0 \Rightarrow \ln 3c = 2$, also $3c = e^2$ und $c = \frac{1}{3}e^2 \approx 2{,}463$

Die Gerade $x = c \approx 2{,}463$ wurde bereits in die Skizze von Aufgabe 2a) eingetragen. Grob gerundet kann die eingeschlossene Fläche als Rechteck mit den Seitenlängen 2 LE und 1,5 LE betrachtet werde, dessen Fläche 3 FE beträgt.

c) Allgemein gilt $m = g_a'(x)$, das bedeutet in diesem Fall $1 = g_a'(2)$.

$g_a'(x) = -6(-x^{-2})(1 - \ln ax) + (-\frac{6}{x})(0 - \frac{1}{ax} \cdot a)$

$$= \frac{6}{x^2}(1 - \ln ax) + \frac{6}{x^2} = \frac{6}{x^2}(1 - \ln ax + 1) = \frac{6}{x^2}(2 - \ln ax)$$

$1 = g_a'(2) = \frac{6}{2^2}(2 - \ln 2a) = 1{,}5(2 - \ln 2a) = 3 - 1{,}5\ln 2a$

$\Rightarrow -2 = -1{,}5\ln 2a$ bzw. $\frac{4}{3} = \ln 2a = \ln 2 + \ln a$

$\Rightarrow \ln a = \frac{4}{3} - \ln 2$, also $a \approx 1{,}897$

Gilt $a \approx 1{,}897$, dann hat die Funktion $g_a(x)$ an der Stelle 2 den Anstieg 1.

Bewertungsvorschlag:

a)	Nullstelle und Schnittpunkt mit der y-Achse;	3 BE
	1. und 2. Ableitung;	2 BE
	Extrempunkt;	4 BE
	Skizze des Graphen	3 BE
b)	Stammfunktionsnachweis;	3 BE
	Berechnung von c	4 BE
c)	Zusammenhang von Anstieg und Ableitung	2 BE
	Berechnung von a	3 BE
		24 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3

a) $A(4 \mid 2 \mid 1)$, $B(4 \mid 5 \mid 1)$, $C(-4 \mid 2 \mid 7)$ und $D_r(4r + 1 \mid r \mid -3r)$ $(r \in \mathbb{R})$
Nachweis, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig ist:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-4\\2\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\0\\6\end{pmatrix}$

Weil $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-8\\0\\6\end{pmatrix} = 0 \cdot (-8) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 6 = 0$ gilt, bilden $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ einen rechten Winkel, das Dreieck ΔABC ist also rechtwinklig.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

Flächeninhalt: $A_\Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 = 15$ (FE)

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC beträgt 15 FE.

b) Gerade g, in der alle Punkte D_r ($r \in \mathbb{R}$) liegen:
Aus $D_0(1|0|0)$ und $D_1(5|1|-3)$ folgt ein Richtungsvektor

$\overrightarrow{D_0D_1} = \begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$ ($r \in \mathbb{R}$).

c) Bestimmen von r, so dass das Dreieck ΔABD_r rechtwinklig ist:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD_r} = \begin{pmatrix}4r+1\\r\\-3r\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4r-3\\r-2\\-3r-1\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD_r} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4r-3\\r-2\\-3r-1\end{pmatrix} = 0(4r-3) + 3(r-2) + 0(-3r-1) = 3(r-2)$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD_r} = 3(r-2) = 0 \Rightarrow r = 2$

Das Dreieck ΔABD ist rechtwinklig für $r = 2$.

Analog kann man den Wert von r für den Fall berechnen, dass von $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BD_r} = \begin{pmatrix}4r-3\\r-5\\-3r-1\end{pmatrix}$ ein rechter Winkel gebildet wird. Dies ist für $r = 5$ der Fall, womit auch das Dreieck ΔABD_5 rechtwinklig ist.

Genauso wäre noch zu prüfen, ob $\overrightarrow{D_rA} = -\overrightarrow{AD_r}$ und $\overrightarrow{D_rB} = -\overrightarrow{BD_r}$ für gewisse $r \in \mathbb{R}$ einen rechten Winkel bilden.

$\overrightarrow{D_rA} \cdot \overrightarrow{D_rB} = (3-4r)^2 + (2-r)(5-r) + (3r+1)^2 = 26r^2 - 25r + 20$

$\overrightarrow{D_rA} \cdot \overrightarrow{D_rB} = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{25}{26}r + \frac{10}{13} = 0 \Rightarrow r_{1/2} = \frac{25}{52} \pm \sqrt{\frac{625}{2704} - \frac{2080}{2704}}$

Da die Gleichung $r_{1/2} = \frac{25}{52} \pm \sqrt{\frac{625}{2704} - \frac{2080}{2704}}$ keine reelle Lösung besitzt, können $\overrightarrow{D_rA}$ und $\overrightarrow{D_rB}$ für kein $r \in \mathbb{R}$ einen rechten Winkel bilden.

d) Bestimmen von r, so dass das Dreieck ΔABD_r gleichschenklig ist:

$|\overrightarrow{AB}| = 3$

$|\overrightarrow{AD_r}| = \sqrt{(4r-3)^2 + (r-2)^2 + (-3r-1)^2} = \sqrt{26r^2 - 22r + 14}$

$|\overrightarrow{BD_r}| = \sqrt{(4r-3)^2 + (r-5)^2 + (-3r-1)^2} = \sqrt{26r^2 - 28r + 35}$

$|\overrightarrow{AD_r}| = |\overrightarrow{BD_r}| \Rightarrow \sqrt{26r^2 - 22r + 14} = \sqrt{26r^2 - 28r + 35}$

$26r^2 - 22r + 14 = 26r^2 - 28r + 35 \Rightarrow 6r = 21;\ \ r = 3{,}5$

$|\overrightarrow{AD_r}| = |\overrightarrow{AB}| \Rightarrow 26r^2 - 22r + 14 = 9$ bzw. $r^2 - \frac{11}{13}r + \frac{5}{26} = 0$

$\Rightarrow r_{1/2} = \frac{11}{26} \pm \sqrt{\frac{121}{676} - \frac{130}{676}}$; hat keine reelle Lösung

$|\overrightarrow{BD_r}| = |\overrightarrow{AB}| \Rightarrow 26r^2 - 28r + 35 = 9 \Rightarrow r^2 - \frac{14}{13}r + 1 = 0$

$\Rightarrow r_{1/2} = \frac{7}{13} \pm \sqrt{\frac{49}{169} - \frac{169}{169}}$; hat keine reelle Lösung

Das Dreieck ΔABD_r ist genau dann gleichschenklig, wenn r = 3,5 gilt.

e) Ebenengleichung:
Dreipunktegleichung $\vec{x} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-8\\0\\6\end{pmatrix}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$)

Normalengleichung: $\vec{p} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot 0 + y \cdot 3 + z \cdot 0 = 0$, also $3y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}-8\\0\\6\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot (-8) + y \cdot 0 + z \cdot 6 = 0$, also

$-8x + 6z = 0 \Rightarrow 8x = 6z$ und $x = \frac{3}{4}z$

Für z = 4 folgt x = 3; also gilt $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ und wegen $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ folgt:

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = 0$$

f) Volumen der Pyramide $ABCD_r$:
Grundfläche ΔABC mit A = 15 FE (siehe Aufgabe 3a);
Die Höhe der Pyramide ist der Abstand des Punktes D_r von E.

E : HESSESCHE Normalform $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{n}_0 \Rightarrow \vec{n}_0 = \dfrac{\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$

$$d = |(\vec{d}_r - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0| = \left|\left(\begin{pmatrix}4r+1\\r\\-3r\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4r-3\\r-2\\-3r-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\frac{12}{5}r - \frac{9}{5} + 0r - 0 \cdot 2 - \frac{12}{5}r - \frac{4}{5}\right| = \left|-\frac{13}{5}\right| = \frac{13}{5} = 2{,}6 \text{ (LE)}$$

Der Abstand von D_r zur Ebene E beträgt 2,6 LE und ist unabhängig von r.

$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot d = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 2{,}6 = 13$ (VE)

Das Volumen der Pyramide $ABCD_r$ beträgt 13 VE.
Die Gerade g, in der alle Punkte D_r ($r \in \mathbb{R}$) liegen, muß parallel zur Ebene E verlaufen, denn genau dann ist der Abstand aller Punkte D_r zu dieser Ebene E konstant (Cavalieri).

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis des rechten Winkels	2 BE
	Berechnung der Fläche des Dreiecks	2 BE
b)	Aufstellung der Geradengleichung	1 BE
c)	Bestimmung von r	2 BE
d)	Bestimmung von r	2 BE
	Nachweis, dass dies die einzige Lösung ist	3 BE
e)	Punktrichtungsgleichung	1 BE
	Normalengleichung	3 BE
f)	Abstand von D_r zur Ebene E	4 BE
	Volumenberechnung	1 BE
	Kommentar des Ergebnisses	3 BE
		24 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

1998 / 99

Gymnasium

Marie-Curie-OS Berlin-Wilmersdorf

1. Aufgabe:

Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte A (1 | 1 | – 1), B (2 | 3 | 0) und C (0 | 3 | – 1).

Ferner ist durch g_u: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter $u \in \mathbb{R}$ eine Geradenschar gegeben.

a) Geben Sie für die Ebene E eine Parameterform an.

b) Stellen Sie die Gleichung der Geraden g_1 und g_{-1} auf und eine Gleichung der Ebene Ω, die durch diese Geraden festgelegt wird.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden s, in der sich die Ebenen Ω und E schneiden.

d) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen Ω und E.

e) Ermitteln Sie die Gleichung der Kugel K mit dem Mittelpunkt M (1 | 1 | 2), welche die Ebene E berührt, ohne Verwendung der Abstandsformel.

f) Zeigen Sie, dass es genau zwei Werte für den oben genannten Parameter u gibt, so dass g_u parallel zu E ist.

g) Zeigen Sie, dass keine der Geraden g_u senkrecht auf der Ebene E steht. Achten Sie insbesondere auf eine exakte verbale Begleitung Ihrer Begründung.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 35)

2. Aufgabe:

Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion f durch die Gleichung $f(x) = \frac{x^2 + 9}{2x}$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an und skizzieren Sie den Graphen im Intervall $-5 \le x \le 5$. Verwenden Sie hierbei Berechnungen und Aussagen bezüglich der Untersuchungspunkte: Nullstellen, Polstellen, lokale Extrempunkte, Symmetrie und Verhalten im Unendlichen. Eine umfangreiche textliche Begleitung der Lösung ist hier nicht erforderlich.

b) Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist durch die Gleichung $y = k$ eine Gerade gegeben. Untersuchen Sie rechnerisch die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Graphen von f in Abhängigkeit von k.

c) Am Graph der Funktion f existieren Tangenten, welche parallel zur Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten verlaufen. Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung einer Tangenten und zeichnen Sie diese in die Skizze ein.

d) Der Punkt O sei der Koordinatenursprung, der Punkt P $(x \mid f(x))$ mit $x > 0$ liegt auf dem Graphen der Funktion f. Die Parallele zur x-Achse durch den Punkt P schneidet die y-Achse im Punkt S. Tragen Sie ein Rechteck OSPR in die Skizze ein und bestimmen Sie x so, dass der Umfang des Rechtecks OSPR minimal wird.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 34)

3. Aufgabe:

Gegeben ist die Exponentialfunktion f durch die Gleichung $f(x) = \frac{1}{2} e^{-2x}(1 + x)$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $-1,5 \le x \le 1$ unter Berücksichtigung der Untersuchungspunkte: Achsenschnittpunkte, lokale Extrempunkte, Wendepunkte und Verhalten im Unendlichen. Eine umfangreiche textliche Begleitung der Lösung ist hier nicht erforderlich.

b) An den Graphen der Funktion f wird im Schnittpunkt mit der x-Achse die Tangente t gelegt. Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Geraden n, die durch den Schnittpunkt der Funktion f mit der y-Achse verläuft und auf der Tangente t senkrecht steht.

c) Zeigen Sie durch Integration, dass die Funktion F mit $F(x) = (-\frac{1}{4}x - \frac{3}{8})\, e^{-2x}$; $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.

d) Der Graph der Funktion f, die Koordinatenachsen und die Gerade $x = a$ $(a > 0)$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche für $a = 1$.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 31)

Erwartungsbild zu Aufgabe 1:

a) E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) + \mu(\vec{c} - \vec{a}) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad t \in \mathbb{R}$

g_{-1}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad r \in \mathbb{R}$

Ω: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad t, r \in \mathbb{R}$

c) z. B. Umformung von E, Ω in Koordinatenform (Normalform)

E: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 + \lambda - \mu \\ x_2 = 1 + 2\lambda + 2\mu \\ x_3 = -1 + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 3 + 4\lambda \\ x_3 = -1 + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7$

bzw. $\vec{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 7$

Ω: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 + t - r \\ x_2 = t + r \\ x_3 = 3 + 2t + 2r \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 1 + 2t \\ 2x_1 + x_3 = 5 + 4t \end{array}\right\} \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 - 2x_1 - x_3 = -3$

$\Rightarrow 2x_2 - x_3 = -3 \qquad$ bzw. $\quad \vec{x} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -3$

$$\begin{aligned} E \cap \Omega = s: \quad 0 \cdot (1 + \lambda - \mu) + 2(1 + 2\lambda + 2\mu) - (-1 + \lambda) &= -3 \\ 2 + 4\lambda + 4\mu + 1 - \lambda &= -3 \\ 3\lambda + 4\mu &= -6 \\ \mu &= -\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\lambda \end{aligned}$$

$$s:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\lambda\right)\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-3\\0\end{pmatrix} + r\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow \text{Schnittgerade } s:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}\frac{7}{4}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \vec{x} = \begin{pmatrix}2,5\\-2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}7\\2\\4\end{pmatrix}$$

Bemerkung: Andere Lösungswege sind möglich, jedoch sind hier Koordinaten- oder Normalform im Sinne der weiteren Bearbeitungsteile zweckmäßig.

d) $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_\Omega\right|}{\left|\vec{n}_E\right| \cdot \left|\vec{n}_\Omega\right|}$; $\quad \vec{n}_E \cdot \vec{n}_\Omega = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = 6$

$\left|\vec{n}_E\right| = \sqrt{21}$; $\left|\vec{n}_\Omega\right| = \sqrt{5}$

$\cos\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{5}\sqrt{21}} \quad \Rightarrow$ Schnittwinkel $\alpha \approx 54,2°$

e) Gesucht ist zunächst eine Gerade h durch M senkrecht zur Ebene E:

$h:\ \vec{x} = \vec{m} + \tau\vec{n}_E \quad ; \tau \in \mathbb{R}$; $\qquad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} \quad ; \tau \in \mathbb{R}$

Jetzt wird $h \cap E = \{H\}$ bestimmt:

$2(1 + 2\tau) + (1 + \tau) - 4(2 - 4\tau) = 7 \quad \Rightarrow \tau = \frac{4}{7}$

Damit ist $H\left(1 + \frac{8}{7} \middle| 1 + \frac{4}{7} \middle| 2 - \frac{16}{7}\right)$ und $r_{Kugel} = \left|\overline{HM}\right|$.

$$r_{Kugel} = \left|\begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\\frac{4}{7}\\-\frac{16}{7}\end{pmatrix}\right| \qquad \Rightarrow r_{Kugel} = \sqrt{\frac{48}{7}}\ \text{, also } K:\ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)^2 = \frac{48}{7}$$

f) Da $g_U \parallel E$, folgt $\begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$, also $u^2 + 2u - 8 = 0$

$\Rightarrow$ Es gibt zwei Werte für u: $u = 2$ oder $u = -4$

g) Wenn $g_U \perp E$, dann gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ für jedes $u \in \mathbb{R}$, so dass

$$t_0 \vec{n}_E = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ gilt.}$$

$t_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ liefert $t_0 = -\frac{1}{2}$ und somit $u^2 = -\frac{1}{2}$.

Das ist für kein $u \in \mathbb{R}$ erfüllbar, d.h., es gibt keine Gerade g_u, die senkrecht auf der Ebene E steht.

Bewertungsvorschlag:

a)	Parameterform	2 BE
b)	Gleichungen für g_1, g_{-1} und Ω	2 BE
c)	Umformung der Ebenengleichung und Berechnen der Schnittgeraden	14 BE
d)	Schnittwinkel mithilfe der Normalvektoren	4 BE
e)	Berechnung der Geraden h durch M; Schnittpunktberechnung zwischen h und E, Berechnen des Radius und Aufstellen der Kugelgleichung	5 BE
f)	Ansatz g(u) parallel zu E und Lösung der Gleichung $u^2 + 2u - 8 = 0$	3 BE
g)	Erkennen des Ansatzes $t_0 \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ 2 \end{pmatrix}$, Berechnen von t_0 und u^2 und Schlussfolgerung	5 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2:

a) Definitionsbereich: $D_{f_a} = \{x \mid x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}$

Nullstellen:

$0 = \dfrac{x^2 + 9}{2x} \quad \Rightarrow$ Es existieren keine Nullstellen, da $x^2 + 9 > 0$.

Polstellen: $x_p = 0$ ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

Asymptote:

Aus $(x^2 + 9) : 2x = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2x}$ folgt, dass $s(x) = y = \frac{1}{2}x$ schräge Asymptote ist.

Außerdem gilt: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - s(x)) = 0$

Symmetrie:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 9}{2(-x)} = -\dfrac{x^2 + 9}{2x} = -f(x)$, d.h., es liegt Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung vor

Lokale Extrempunkte:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - 2(x^2 + 9)}{4x^2} = \frac{2x^2 - 18}{4x^2} = \frac{x^2 - 9}{2x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x \cdot 2x^2 - 4x(x^2 - 9)}{4x^4} = \frac{36x}{4x^4} = \frac{9}{x^3}$$

$f'(x) = 0$, also $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = -3$

$f''(3) = \dfrac{9}{3^3} > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum; Tiefpunkt $E_1(3 \mid 3)$

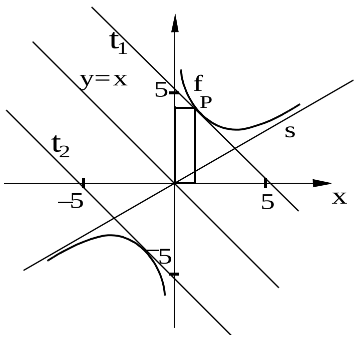
$f''(-3) = \dfrac{9}{(-3)^3} < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum; Hochpunkt $E_2\ (-3 \mid -3)$

Verhalten im Unendlichen:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Skizze:



b) $\frac{x^2+9}{2x} = k \Rightarrow x^2 - 2kx + 9 = 0$, also $x_{1/2} = k \pm\sqrt{k^2-9}$

$\Rightarrow$ 2 Schnittpunkte für $k > 3$ oder $k < -3$,
1 Schnittpunkt für $k = 3$ oder $k = -3$,
kein Schnittpunkt für $-3 < k < 3$.

c) $y = -x$ ist die Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten.

$f'(x) = \frac{x^2-9}{2x^2} = -1$, also $x^2 - 3 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{3}$ oder $x = -\sqrt{3}$

$f(\sqrt{3}) = \frac{12}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$; t_1: $y = -x + 3\sqrt{3}$; t_2: $y = -x - \sqrt{3}$

(lt. Aufgabe muss nur eine Gleichung angegeben werden)

d) $u(x) = 2x + 2\frac{x^2+9}{2x} = \frac{3x^2+9}{x} = 3x + \frac{9}{x}$; $x \neq 0$

$u'(x) = 3 - \frac{9}{x^2}$; $u''(x) = \frac{18}{x^3}$

$u'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 3$, also $x = \sqrt{3}$ ($x = -\sqrt{3}$ entfällt nach Voraussetzung)

$u''(\sqrt{3}) = \frac{18}{3\sqrt{3}} > 0$, d.h., der Umfang des Rechtecks wird für $x = \sqrt{3}$ maximal.

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich	1 BE
	Nulstellen	1 BE
	Polstelle	1 BE
	Asymptote, Verhalten im Unendlichen	2 BE
	Symmetrie	2 BE
	Ableitungen	4 BE
	Extrempunkte mit Nachweis	3 BE
	Skizze	3 BE
b)	Ansatz, Lösen der quadratischen Gleichung und Anzahl der Schnittpunkte	5 BE
c)	Steigung der Winkelhalbierenden, Bestimmen einer Tangentengleichung und Einzeichnen in Skizze von a)	5 BE
d)	Zielfunktion, Ableitungen, Berechnen der Extremstelle und Nachweis	7 BE
		34 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3:

a) Achsenschnittpunkte:

$f(0) = \frac{1}{2}\, e^{-2 \cdot 0}\,(1 + 0) = 0{,}5 \qquad \Rightarrow \quad P_1(0 \mid 0{,}5)$

$0 \quad = \frac{1}{2}\, e^{-2x}\,(1 + x) \qquad \Rightarrow x = -1; \qquad P_2(-1 \mid 0)$

Lokale Extrempunkte:

$f'(x) = \frac{1}{2}\, e^{-2x} + (1 + x)(-1)e^{-2x} = e^{-2x}\,(-\frac{1}{2} - x)$

$f''(x) = -\, e^{-2x} + (-\frac{1}{2} - x)(-2)e^{-2x} = e^{-2x}\,(2x)$

$f'''(x) = 2e^{-2x} + 2xe^{-2x}(-2) = e^{-2x}(2 - 4x)$

$f'(x) = 0$: $\quad e^{-2x}(-\frac{1}{2} - x) = 0 \quad \Rightarrow x - \frac{1}{2}\ ; \quad P_3(-\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{4}e\,)$

$f''(-\frac{1}{2}) = -\, e < 0$, d.h., P_3 ist ein Hochpunkt.

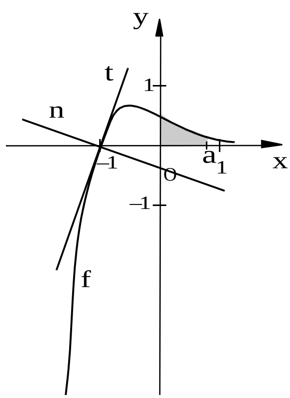
Wendepunkte:

$f''(x) = 0$: $e^{-2x}(2x) = 0 \qquad \Rightarrow x = 0; \qquad P_4(0 \mid 0{,}5)$
$f'''(0) = 2 \neq 0$, d.h., P_4 ist ein Wendepunkt.

Verhalten im Unendlichen:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \; = \; \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}e^{-2x}(1 + x)\right) \; = \; \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + x}{2e^{2x}}$ = 0, d.h., die x-Achse ist Asymptote.

Skizze:



b) $f'(-1) = \frac{1}{2}e^2 = m_t \Rightarrow \quad m_n = -\frac{2}{e^2}$, da $m_t \cdot m_n = -1$

Für die Gerade n gilt also: $y = \frac{2}{e^2}x - \frac{2}{e^2}$

c) Partielle Integration:

Mit $u'(x) = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-2x}$

$v(x) = 1 + x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 1$

folgt $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int e^{-2x}(1+x)\,dx = \frac{1}{2}\left[(1+x)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(1 + x + \frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1}{4}\,e^{-2x}\left(x + \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right)e^{-2x}$

d) $A = \int_0^a f(x)dx = \left[-\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right]e^{-2x}\Big|_0^a = \left(-\frac{1}{4}a - \frac{3}{8}\right)e^{-2a} + \frac{3}{8}$

Für a = 1 folgt: $A = \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{8e^2}\right)$ (FE) $\approx 0{,}3$ (FE)

Bewertungsvorschlag:

a)	Achsenschnittpunkte	2 BE
	Ableitungen	6 BE
	Hochpunkt mit Nachweis	3 BE
	Wendepunkt	2 BE
	Verhalten im Unendlichen	2 BE
	Skizze	3 BE
b)	Steigung der Tangente	
	Steigung und Gleichung der Normalen	5 BE
c)	Ansatz und Ausführung der partiellen Integration	5 BE
d)	Integral in den Grenzen $[0\|1]$	3 BE
		31 BE

Abiturprüfung
Grundkurs

Gymnasium

Gesamtschule
mit gemeinsamer gymnasialer Oberstufe
Bernau/Zepernick

Hinweis: Die nachfolgende Arbeit wurde bereits für die Abiturprüfung 1994/95 eingereicht.

Aufgabe 1:

1.1 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -0{,}5x^3 + 2x^2 + 0{,}5x + a$ und $a \in \mathbb{R}$
Finden Sie ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $f(1) = 0$ ist!
Führen Sie zu dieser Funktion eine vollständige Kurvendiskussion (Definitionsbereich, Nullstellen, Extrema, Graph, Monotonie, Verhalten im Unendlichen, Wertebereich) durch!

1.2 f: $[1; 4] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = b \cdot (-0{,}5x^3 + 2x^2 + 0{,}5x - 2)$ und $b \in \mathbb{R}$
Finden Sie ein $b \in \mathbb{R}$, so dass der Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve von f (im Intervall [1; 4]) genau $21(LE)^2$ beträgt!

1.3 f: $[0; 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -0{,}5x^3 + 2x^2 + 0{,}5x - 2$
t: $[0; 2] \to \mathbb{R}$ mit $t(x) = c \cdot x - c$ und $c \in \mathbb{R}$
Finden Sie ein $c \in \mathbb{R}$, so dass t Tangente an den Graphen von f ist!

1.4 Finden Sie den Durchmesser d, mit dem ein gerader Kreiskegel mit 9 cm langer Seitenlinie maximales Volumen hat!

Aufgabe 2:

2.1 Beschreiben Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ der Abbildung als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$!
Zeichnen Sie den Vektor $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ in die Abbildung ein!

2.2 Definieren Sie: „Die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind linear abhängig.“!

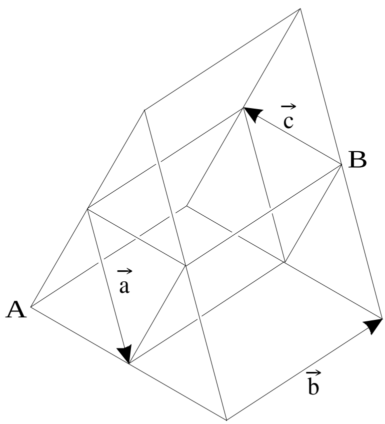
Untersuchen Sie $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit!

Fügen Sie den Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ einen Vektor $\vec{a}_3$ so hinzu, dass $B = \{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet, und beweisen Sie, dass B Basis des $\mathbb{R}^3$ ist!

2.3 Stellen Sie im räumlichen kartesischen Koordinatensystem (45°; $\sqrt{0,5}$) die Parabel dar, die in der y-z-Ebene liegt und den Scheitelpunkt S(0; 2; –1) besitzt, und zeichnen Sie die Gerade g_1, die durch die Punkte A(2; 2; 2) und B(4; 0; 1) verläuft!

Beweisen Sie, dass die Parabel und die Gerade genau einen Punkt gemeinsam haben, und berechnen Sie den Punkt, in dem die Gerade die x-y-Ebene durchstößt!

Bestimmen Sie die Gleichung einer zu g_1 windschiefen Geraden g_2, deren Projektion in die x-y-Ebene senkrecht auf der Projektion von g_1 in die x-y-Ebene steht!



Erwartungsbild zu Aufgabe 1:

1.1. $f(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + a = 2 + a = 0$

$\Rightarrow$ $a = -2$ und $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 2$

Kurvendiskussion:

$Db(f) = \mathbb{R}$, $Wb(f) = \mathbb{R}$

Nullstellen: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$

$\Rightarrow$ (1) $x_{N_1} = 1$ (durch Probieren bzw. weil oben a so ermittelt, dass f(1) = 0)

(2) Nach Polynomdivision erhält man $f(x) = (x-1)(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2)$

und es folgt $(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2) = 0$, also $x_{N_2} = -1$ und $x_{N_3} = 4$.

Extrema: $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{2}$; $f''(x) = -3x + 4$

Wegen $f'(x) = 0$ gilt $-\frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$ bzw. $x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.

$\Rightarrow$ $x_{E_1} = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{19}) \approx -0{,}12$; $x_{E_2} = \frac{1}{3}(4 + \sqrt{19}) \approx 2{,}79$

Da $f''(x_{E_1}) > 0$, hat f an der Stelle x_{E_1} ein lokales Minimum;
da $f''(x_{E_2}) < 0$, hat f an der Stelle x_{E_2} ein lokales Maximum.

Mit $f(x_{E_1}) \approx -2{,}03$ und $f(x_{E_2}) \approx 4{,}1$ ergeben sich die lokalen Extrempunkte $E_1(-0{,}12; -2{,}03)$ und $E_2(2{,}79; 4{,}1)$.

Monotonie:
Für $x < x_{E_1}$ und $x > x_{E_2}$ ist f monoton fallend,
für $x_{E_1} < x < x_{E_2}$ ist f monoton steigend.
Begründung:
f ist monoton fallend für $x \in \mathbb{R}$, wenn $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{2} < 0$.

$\Rightarrow x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{1}{3} = (x - \frac{4}{3})^2 - \frac{19}{9} > 0$, also $|x - \frac{4}{3}| > \frac{1}{3}\sqrt{19}$

(1) Aus $|x - \frac{4}{3}| > 0$ folgt $x - \frac{4}{3} > \frac{1}{3}\sqrt{19}$, also $x > \frac{1}{3}(4 + \sqrt{19}) = x_{E_2}$;

(2) aus $|x - \frac{4}{3}| < 0$ folgt $-x + \frac{4}{3} > \frac{1}{3}\sqrt{19}$, also $x < \frac{1}{3}(4 - \sqrt{19}) = x_{E_1}$.

(analog die Begründung für „monoton steigend“)

Verhalten im Unendlichen:

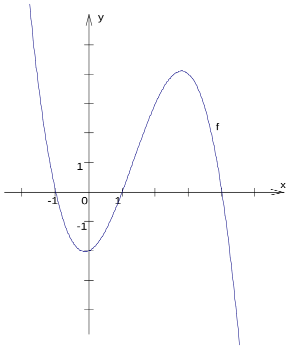
$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Graph der Funktion für a = – 2:



1.2. $A = \int_1^4 f(x)\,dx = 21$

$$A = \int_1^4 b\left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)dx = b\left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 2x\right]_1^4$$

$$= b \cdot \left(\frac{20}{3} - \left(-\frac{29}{24}\right)\right) = b \cdot \frac{63}{8} = 21 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{8}{3}$$

1.3. Wenn t Tangente an den Graphen von f ist, dann gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = t(x_0)$ und $f'(x_0) = c$:

$$f'(x_0) = -\frac{3}{2}x_0^2 + 4x_0 + \frac{1}{2} = c$$

$$f(x_0) = -\frac{1}{2}x_0^3 + 2x_0^2 + \frac{1}{2}x_0 - 2$$

$$t(x_0) = c \cdot x_0 - c = -\frac{3}{2}x_0^3 + 4x_0^2 + \frac{1}{2}x_0 + \frac{3}{2}x_0^2 - 4x_0 - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}x_0^3 + \frac{11}{2}x_0^2 - \frac{7}{2}x_0 - \frac{1}{2}$$

Mit $f(x_0) = t(x_0)$ folgt: $\quad 0 = x_0^3 - \frac{7}{2}x_0^2 + 4x_0 - \frac{3}{2}$

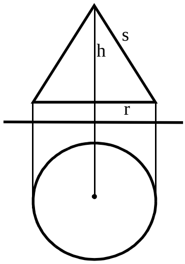
$\Rightarrow$ (1) $x_{01} = 1$ (durch Probieren)

(2) Nach Polynomdivision: $f(x) = (x-1)^2(x-1{,}5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{02} = 1{,}5$

Mit $f'(x_{01}) = 3 = c_1$ und $f'(x_{02}) = \frac{25}{8} = c_2$ folgen die Tangentengleichungen

$t_1(x) = 3x - 3$ und $t_2(x) = \frac{25}{8}x - \frac{25}{8}$

1.4. Aus $V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (Zielfunktion) und $s^2 = h^2 + r^2$ (Nebenbedingung) folgt:



$V = V(h) = \frac{1}{3}\pi(s^2 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(s^2h - h^3)$

Bestimmen der lokalen Extrema:

$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(s^2 - 3h^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{1}{3}s^2}$

Wegen $V''(h) = V''\left(\sqrt{\frac{1}{3}s^2}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(-6\sqrt{\frac{1}{3}s^2}\right) < 0$ ist

$h = \sqrt{\frac{1}{3}s^2}$ eine lokale Maximumstelle von V(h).

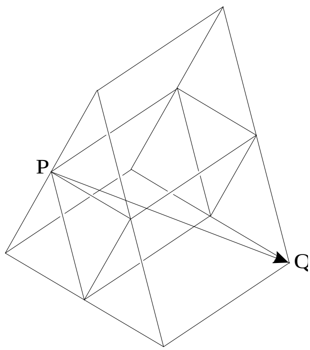
Das Volumen des Kreiskegels ist maximal, wenn $h^2 = \frac{1}{3}s^2$, wenn also

$r^2 = s^2 - h^2 = s^2 - \frac{1}{3}s^2 = \frac{2}{3}s^2$.

Mit s = 9 cm folgt: $d = 2r = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}s^2} = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot 9^2}$, also: $d \approx 14{,}7$ cm.

Erwartungsbild zu Aufgabe 2

2.1 $\overrightarrow{AB} = -2\vec{c} + \vec{b} - \vec{a}$
$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{PQ}$



2.2 Die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind dann linear abhängig, wenn sich aus ihnen der Nullvektor nicht nur trivial linear kombinieren lässt. D.h., es gibt $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$, so dass $a_1\vec{a}_1 + a_2\vec{a}_2 = \vec{o}$.
Daraus folgt für die Vektoren

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$: $\quad a_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Durch Koordinatenvergleich erhält man daraus

$a_1 + 2a_2 = 0$
$2\,a_1 \quad = 0$
$\qquad a_2 = 0$, also $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$

$\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind linear unabhängig, da sich aus ihnen der Nullvektor nur trivial linear kombinieren lässt.

$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$

Beweis: Gezeigt werden muss:

(1) $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ sind linear unabhängig.
(2) $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ sind linear abhängig bei beliebiger Wahl von $\vec{a}_4$.
(Jede maximale Menge linear unabhängiger Vektoren ist eine Basis des Vektorraumes.)

(1) $$a_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 \quad &= 0 \\ 2a_1 + \quad a_3 &= 0 \\ a_2 + 2a_3 &= 0 \end{aligned}$$ führt zu $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $a_3 = 0$.

(2) $$a_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$

(I) $a_1 + 2a_2 \quad + a_4x = 0$
(II) $2a_1 + \quad + a_3 + a_4y = 0$
(III) $a_2 + 2a_3 + a_4z = 0$

Wählt man für $a_4 = 1$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit), so folgt:

$$\begin{array}{rl} -2(\mathrm{I}) & -2a_1 - 4a_2 \qquad - 2x \qquad\qquad = 0 \\ (\mathrm{II}) & \underline{\;2a_1 + \qquad a_3 \qquad + \;\; y \qquad = 0\;} \\ -2(\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) & -4a_2 + a_3 - 2x + y \qquad = 0 \\ 4(\mathrm{III}) & \underline{\;4a_2 + 8a_3 + 4z \qquad\qquad = 0\;} \end{array}$$

$$9a_3 - 2x + y + 4z = 0 \Rightarrow a_3 = \tfrac{1}{9}(2x - y - 4z)$$

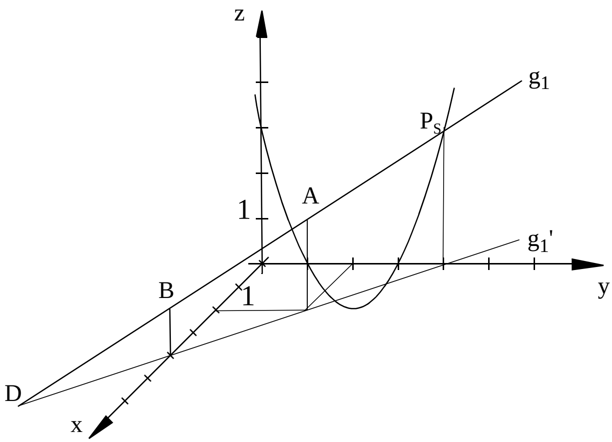
$$2a_1 + a_3 + y = 0 \Rightarrow a_1 = \tfrac{1}{2}(-y - a_3) \Rightarrow a_1 = \tfrac{1}{2}\left(-y - \tfrac{1}{9}(2x - y - 4z)\right)$$

$$a_2 + 2a_3 + z = 0 \Rightarrow a_2 = -2a_3 - z \qquad \Rightarrow a_2 = -\tfrac{2}{9}(2x - y - 4z) - z$$

Da sich der Nullvektor nicht nur trivial aus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ und $\vec{a}_4$ linear kombinieren lässt, sind $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ und $\vec{a}_4$ linear abhängig.

Aus (1) und (2) folgt: B ist Basis des Vektorraums.

2.3



Die Parabel und die Gerade g_1 haben genau einen Punkt P_S gemeinsam, da

für jeden Punkt P ∈ Parabel gilt: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ (y-2)^2 - 1 \end{pmatrix}$

Für jeden Punkt p ∈ g_1 gilt: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen führt zu Schnittpunkt P_S:

$$0 = 2 + t \cdot 2 \qquad \Rightarrow t = -1$$
$$y = 2 + t \cdot (-2) \quad = 2 + (-1)(-2) = 4 \quad \Rightarrow y = 4$$
$$(y-2)^2 - 1 = 2 + t \cdot (-1) \quad = 2 + (-1)(-1) = 3 \quad \Rightarrow y_1 = 4$$

($y_2 = 0$ entfällt, da $(0; 0; 3) \notin g_1$)

⇒ Parabel und Gerade haben genau einen gemeinsamen Punkt $P_S(0;4;3)$.

Der Durchstoßpunkt von g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ durch die x-y-Ebene hat die z - Koordinate 0. Es muß also gelten: $2 - t = 0 \Rightarrow t = 2$

Eingesetzt in die Geradengleichung erhält man für den Durchstoßpunkt:

$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}$, also D(6; –2; 0).

Für die Projektion von g_1: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ in die x-y-Ebene gilt:

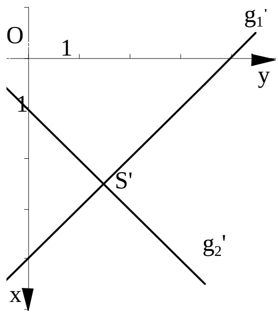
$x = 2 + t_1 \cdot 2$
$y = 2 + t_1(-2)$

$\Rightarrow\ t_1 = \frac{1}{2}x - 1$, also folgt für g_1' : $y = -x + 4$

Eine zu g_1' senkrechte Gerade g_2' in der x-y-Ebene hat den Anstieg m = 1 und verläuft z. B. durch den Punkt P'(1; 0).

Dann folgt für g_2' : $y = x - 1$

g_1' und g_2' schneiden einander im Punkt S'(2,5| 1,5).



Da S' Projektion des Punktes $S_1(2{,}5|\ 1{,}5|\ z) \in g_1$ ist, gilt

(I) $2{,}5 = 2 + 2t_1$
(II) $1{,}5 = 2 - 2t_1$
(III) $z = 2 - t_1$,

also $t_1 = \frac{1}{4}$ und $S_1(2{,}5|\ 1{,}5|\ 1{,}75)$.

Da nur dieser Punkt als möglicher Schnittpunkt in Frage kommt, ist g_2 mit z. B. $S_2(2{,}5|\ 1{,}5|-1)$ und $P_2(1|\ 0|-1)$ zu g_1 windschief.

$\Rightarrow g_2: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix}$

Wie gefordert, gilt dann für die Projektionsgerade g_2' : $x = 1 + 1{,}5t_2$
$y = 0 + 1{,}5t_2$

also $y = x - 1$.