Schriftliche Abiturprüfung 2001
Fach: Mathematik
Prüfungsart: 3. Prüfungsfach
Dauer: 3,5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!

Aufgabe 1:

1. Gegeben ist die Funktionenschar
$f_a : IR \to IR, \quad x \mapsto a \cdot (ax+1) \cdot e^{-ax} \quad , a \in IR^+$.

1.1 Zeigen Sie, dass für den Funktionsterm der 2. Ableitung gilt:
$f_a''(x) = a^3 \cdot (ax-1) \cdot e^{-ax}$.

1.2 Bestimmen Sie a so, dass die Funktion an der Stelle 1 einen Wendepunkt besitzt.

1.3 Diskutieren Sie die Funktion $f: IR \to IR$
$x \mapsto (x+1) \cdot e^{-x}$

1.4 Der Graph von f schließt mit der x - Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an.

1.5 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangenten t von f_a. Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
(Zur Kontrolle: $t: \quad y = \frac{-a^2}{e} \cdot x + \frac{3a}{e}$)

2. Die beiden Koordinatenachsen, die Parallelen zu diesen Achsen durch den Punkt P(3 | 8) und die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{16}{3} - x^2$ schließen im 1.Quadranten eine Fläche ein. In diese Fläche wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass P(3 | 8) ein Eckpunkt ist und ein weiterer Eckpunkt Q(x | y) auf der Parabel liegt. Die Rechteckseiten verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen.
Wie sind die Koordinaten von Q zu wählen, wenn der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß werden soll ?

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Ebene $e: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 15 = 0$

und die Geradenschar $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, t \in \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar g_t liegen.

1.2 Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden sowie den Schnittwinkel der Ebene e und der Ebene $e^*: x_2 - 2x_3 + 5 = 0$.

1.3 Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Ebene e und den Geraden der Schar g_t in Abhängigkeit von t.

2. Gegeben sind die Punkte A(– 4 | 4 | 2), B(1 | –1 | 0) und C(5 | 1 | 2).
Durch die Punkte A und C verläuft die Gerade g. Spiegelt man den Punkt B an der Geraden g, so erhält man den Punkt D.

2.1 Bestimmen Sie den Spiegelpunkt D.

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

letzte Seite

Aufgabe 3:

1. Eine Firma stellt Drahtzaun her. Dieser wird in Form von Rollen ausgeliefert. Es ist bekannt, dass 4 % aller Rollen Ausschuss sind. Die Ausschussrollen treten unabhängig voneinander auf.

1.1 Aus der laufenden Produktion werden 20 Rollen Drahtzaun entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Keine der entnommenen Rollen ist Ausschuss.
B: Mindestens 2 aber höchstens 4 Rollen sind Ausschuss.

1.2 Eine Rolle ist Ausschuss, wenn sie mindestens einen der beiden Fehler
F_1 : "Fehler in der Qualität des Drahtes" oder
F_2 : "Fehler im Drahtgeflecht" aufweist. Andere Fehlerarten kommen nicht vor.
Beide Fehler treten unabhängig voneinander auf. Die Wahrscheinlichkeit für Fehler F_1 beträgt 0,025.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Fehler F_2 auftritt.

1.3 Der Verkauf des Drahtes erfolgt zu gleichen Anteilen über die Vertriebszentren Augsburg, Bremen und Chemnitz. 20 % der Lieferungen des Vertriebszentrums Augsburg, 25 % der Lieferungen des Vertriebszentrums Bremen und 10 % des Vertriebszentrums Chemnitz sind unpünktlich.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine zufällig betrachtete Auslieferung unpünktlich ist.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine unpünktliche Lieferung aus Chemnitz stammt.

1.4 Bei einer Qualitätskontrolle werden 500 Drahtrollen untersucht. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Ausschussrollen und sei binomialverteilt. Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyscheff ab, in welchem Intervall mit mehr als 90 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der unbrauchbaren Drahtrollen liegt ?