

---

# Schriftliche Abiturprüfung Grundkursfach Mathematik

**- Ersttermin -**

**Material für den Prüfungsteilnehmer**

---

## Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten**.

**Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.**

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B und C** sowie dem **Wahlteil D**.

Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.

Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

**Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabedaten berechnet.**

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

### Erlaubte Hilfsmittel:

- 1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
  - 1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
  - 1 Tabellen- und Formelsammlung, ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
- Zeichengeräte

# Prüfungsinhalt

## Pflichtaufgaben

### Teil A: Analysis

Gegeben sind die Funktionen  $f$  und  $F$  durch die Gleichungen

$$y = f(x) = \frac{20x}{(x^2 + 3)^2} \quad (x \in D_f) \quad \text{und} \quad y = F(x) = -\frac{10}{x^2 + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstelle der Funktion  $f$  an.  
Untersuchen Sie die Funktion  $f$  auf Symmetrie.  
Untersuchen Sie die Funktion  $f$  auf achsenparallele Asymptoten und geben Sie gegebenenfalls deren Gleichungen an.

Der Graph der Funktion  $f$  besitzt genau zwei lokale Extrempunkte  $P_{\text{MIN}}$  und  $P_{\text{MAX}}$ .

Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

- b) Weisen Sie nach, dass die Funktion  $F$  eine Stammfunktion der Funktion  $f$  ist.  
Begründen Sie, dass die Funktion  $F$  höchstens eine lokale Extremstelle hat.

Für jedes  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ) begrenzen der Graph der Funktion  $f$ , die  $x$ -Achse und die Gerade mit der Gleichung  $x = a$  eine Fläche vollständig.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von  $a$ .

Ermitteln Sie den Wert  $a$ , für den der Flächeninhalt 2,5 beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

- c) Für jedes  $u$  ( $u \in \mathbb{R}$ ,  $0 < u < 10$ ) sind der Koordinatenursprung und der Punkt  $P_u(u; f(u))$  Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.

Es existiert genau ein Wert  $u$ , für den der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal wird.

Ermitteln Sie diesen Wert  $u$  und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl; 4

- d) Der Graph einer ganzrationalen Funktion  $g$  dritten Grades verläuft durch die lokalen Extrempunkte  $P_{\text{MIN}}$  und  $P_{\text{MAX}}$  des Graphen der Funktion  $f$ .

Außerdem hat die Funktion  $g$  an der Stelle  $x = -\frac{1}{3}$  einen Wendepunkt.

In diesem Wendepunkt besitzt die Tangente an den Graphen der Funktion  $g$  den

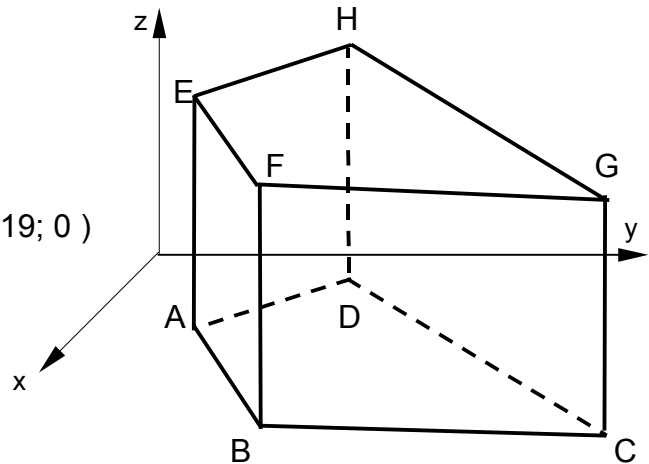
Anstieg  $-\frac{1}{12}$ .

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion  $g$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 5

## Teil B: Geometrie / Algebra

Die Abbildung zeigt die Skizze eines in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellten geraden Prismas mit der Grundfläche ABCD und der Höhe  $h = 5$ . Die Eckpunkte der Grundfläche sind die Punkte  $A(4; 3; 0)$ ,  $B\left(\frac{21}{2}; \frac{9}{2}; 0\right)$ ,  $C(14; 19; 0)$  und  $D\left(\frac{5}{2}; \frac{19}{2}; 0\right)$ .



(Skizze nicht maßstäblich)

- a) Geben Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte des Prismas an. Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist. Ermitteln Sie die Größe des Winkels  $\sphericalangle$  BAD.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

- b) Durch die Punkte A, C und E ist eine Ebene  $\varepsilon$  und durch die Punkte B und H eine Gerade  $h$  bestimmt. Geben Sie jeweils eine Gleichung der Ebene  $\varepsilon$  und der Geraden  $h$  an. Untersuchen Sie, ob der Punkt  $Q\left(\frac{13}{2}; 7; \frac{5}{2}\right)$  Schnittpunkt der Ebene  $\varepsilon$  und der Geraden  $h$  ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- c) Vom geraden Prisma ABCDEFGH wird die Pyramide mit der Grundfläche EFG und der Spitze B abgetrennt. Begründen Sie, dass das Volumen des Restkörpers  $\frac{5}{6}$  des Volumens des Prismas beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Die folgende Teilaufgabe bezieht sich nur auf die x-y-Ebene.

- d) In der x-y-Ebene liegt ein Kreis  $k$ , dessen Radius  $r = \sqrt{50}$  beträgt und dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks ABCD ist. Die Gerade  $t$  sei Tangente an den Kreis  $k$  im Punkt  $R\left(\frac{11}{2}; 14\right)$ . Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente  $t$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 2

### Teil C: Stochastik

Ein Glücksrad  $G_1$  ist in 36 gleich große Sektoren eingeteilt, die paarweise verschieden mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 36 beschriftet sind. Bei jeder Drehung des Rades wird genau ein Sektor mithilfe eines Zeigers „gezogen“.

- a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass bei einer Drehung des Rades  $G_1$  eine durch drei teilbare Zahl „gezogen“ wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

- b) Das Glücksrad  $G_1$  wird 10-mal gedreht.

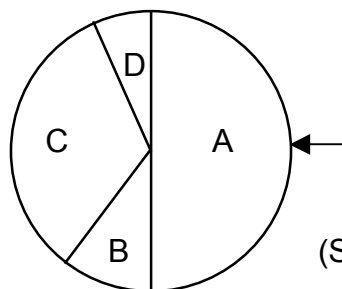
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass dabei genau zweimal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen“ wird.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei mindestens zweimal, aber höchstens fünfmal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen“ wird.

Ermitteln Sie, wie oft man das Glücksrad  $G_1$  mindestens drehen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen“ wird?

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- c) Das Glücksrad  $G_2$  sei in vier Sektoren A, B, C und D eingeteilt (s. Skizze).



Zentriwinkel des Sektors B:  $36^\circ$   
des Sektors C:  $120^\circ$   
des Sektors D:  $24^\circ$

(Skizze nicht maßstäblich)

Bei jeder Drehung des Rades wird mithilfe eines Zeigers genau ein Sektor ermittelt.

Der Spieler zahlt einen Einsatz von 1€ und erhält beim „Ziehen“ des Sektors D 5€, des Sektors B 2€ und des Sektors C 1€ ausgezahlt. Bei der Ziehung des Sektors A erhält er nichts.

Ermitteln Sie, welchen Gewinn (erhaltenes Geld abzüglich des Einsatzes) ein Spieler im Schnitt erwarten kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- d) Das Glücksrad  $G_3$  sei in vier Sektoren eingeteilt.

Geben Sie die Größen der Zentriwinkel dieser Sektoren so an, dass sich die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie „gezogen“ werden, wie 1:2:4:8 verhalten.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

## Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

### Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben ist eine Funktion  $f$  durch

$$y = f(x) = \left(3 - \frac{3}{x}\right) \cdot e^x \quad (x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 2, x \neq 0).$$

- a) Der Graph einer quadratischen Funktion  $g$ , der achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse ist, verläuft durch den Punkt  $P(0; -40)$ . Außerdem ist die Nullstelle der Funktion  $f$  auch Nullstelle der Funktion  $g$ .

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion  $g$  und geben Sie alle Schnittpunkte der Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- b) Der Graph der Funktion  $t$  ist Tangente an den Graphen der Funktion  $f$  im Punkt  $Q(1; f(1))$ .

Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente  $t$ .

Im Intervall  $0,8 \leq x \leq 1,2$  wird der Graph der Funktion  $f$  näherungsweise durch diese Tangente  $t$  beschrieben.

Ermitteln Sie die maximale Abweichung der Funktionswerte der Funktionen  $f$  und  $t$  in diesem Intervall.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- c) Für jedes  $a$  ( $a \in \mathbb{R}, a > 0$ ) ist eine Funktion  $h_a$  durch  $y = h_a(x) = ax^2 - 20$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) gegeben.

Es existiert ein Wert  $a$ , so dass die Funktionen  $f$  und  $h_a$  an der Stelle  $x = 1$  die maximale Differenz ihrer Funktionswerte  $f(x) - h_a(x)$  haben.

Berechnen Sie diesen Wert  $a$  und geben Sie die maximale Differenz an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

## Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt  $M(3; -1; 0)$  und für jedes  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) eine Gerade  $g_a$  durch die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}) \text{ gegeben.}$$

a) Begründen Sie, dass alle Geraden  $g_a$  zueinander parallel verlaufen.

Es gibt einen Wert  $a$ , für den der Punkt  $M$  Schnittpunkt der Geraden  $g_a$  mit der  $x$ - $y$ -Koordinatenebene ist.

Ermitteln Sie diesen Wert  $a$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 3

$M$  ist der Schnittpunkt der Diagonalen eines in der  $x$ - $y$ -Koordinatenebene liegenden regelmäßigen Sechsecks  $ABCDEF$  mit dem Eckpunkt  $A(3 + \sqrt{3}; -2; 0)$ .

b) Zeigen Sie, dass ein zum Punkt  $A$  benachbarter Eckpunkt des Sechsecks die Koordinaten  $(3 + \sqrt{3}; 0; 0)$  besitzt.

Berechnen Sie die Koordinaten des anderen benachbarten Eckpunktes des Punktes  $A$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Das Sechseck  $ABCDEF$  ist Grundfläche von schiefen Pyramiden mit dem Volumen  $18\sqrt{3}$ , deren Spitzen auf der Geraden  $g_{-3}$  liegen.

Ermitteln Sie die Koordinaten aller Punkte, die Spitzen einer solchen Pyramide sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 4