verwendeter GTR: ***Casio CFX-9850G***

Teil A Analysis

geg.: $y = f_k(x) = x^2 e^{1-kx}$ und $y = g_k(x) = xe^{1-kx}$ $(k \in R, k > 0; x \in R)$

a) - Nullstellen $f_k(x_N) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_N = 0}$

- Nachweis der Funktionsgleichung der 2. Ableitung

$f_k'(x) = 2xe^{1-kx} + x^2 \cdot (-k)e^{1-kx} = (2x - kx^2)e^{1-kx}$

$f_k''(x) = (2-2kx)e^{1-kx} + (2x - kx^2) \cdot (-k)e^{1-kx} = (2 - 4kx + k^2x^2)e^{1-kx}$

- Berechnung und Nachweis der lokalen Extrempkte

(A) Berechnung der Extremstellen mit der notwendigen Bedingung $f_t'(x_E) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1. \quad 0 = 2x_E - kx_E^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.1. \quad 0 = x_{E1} \\ 1.2. \quad 0 = 2 - kx_E \Leftrightarrow x_{E2} = \dfrac{2}{k} \end{cases} \\ 2. \quad 0 = e^{1-kx} \quad \text{keine Lösung} \end{cases}$$

(B) Nachweis der Existenz und Art der Extrema

$f_k''(x_{E1}) = (2 - 0 + 0)e^1 = 2e > 0 \Rightarrow f_k$ besitzen bei $x_{E1} = 0$ ein lokales Minimum

$f_k''(x_{E2}) = \left(2 - 4k\dfrac{2}{k} + k^2\dfrac{4}{k^2}\right)e^{1-k\frac{2}{k}} = (2 - 8 + 4)e^{-1} = -\dfrac{2}{e} < 0 \Rightarrow f_k$ besitzen bei $x_{E2} = \dfrac{2}{k}$ ein lokales Maximum

(C) Berechnung der y-Koordinate des Extrempunktes

$f_k(x_{E1}) = 0$ $\boxed{T(0;0)}$

$f_k(x_{E2}) = \dfrac{4}{k^2}e^{1-k\frac{2}{k}} = \dfrac{4}{k^2e}$ $\boxed{H_k\left(\dfrac{2}{k};\dfrac{4}{k^2e}\right)}$

- Berechnung der Ortskurve der Extrempkte

$x_{E2} = \dfrac{2}{k} \Leftrightarrow k = \dfrac{2}{x_{E2}}$ Einsetzen in y_{E2}: $\dfrac{4}{\frac{4}{x_{E2}^2}e} = \dfrac{x_{E2}^2}{e}$ $h(x) = \dfrac{x^2}{e}$

Da die Fkt h auch den Pkt $O(0;0)$ enthält, liegen tatsächlich alle Extrempkte auf demGrafen dieser Fkt.

b) Berechnung der Wendestellen der Fktn f_k notwendige Bedingung: $f_k''(x_W) = 0$

$$f_k''(x_W) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \quad 0 = x_W^2 - \dfrac{4}{k}x_W + \dfrac{2}{k^2} \Leftrightarrow x_{W1,2} = \dfrac{2}{k} \mp \sqrt{\dfrac{4}{k^2} - \dfrac{2}{k^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{W1} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{k} \\ x_{W2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{k} \end{cases} \\ 2. \quad 0 = e^{1-kx} \quad \textit{keine Lösung} \end{cases}$$

c) Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte der Fktn f_k und g_k

(A) Berechnung der Schnittstellen $f_k(x_s) = g_k(x_s) \Leftrightarrow 0 = f_k(x_s) - g_k(x_s)$

$$0 = x_S^2 e^{1-kx_s} - x_s e^{1-kx_s} = x_s(x_s - 1)e^{1-kx_s} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ 0 = x_{S1} \\ 2.\ 0 = x_S - 2 \Leftrightarrow x_{s2} = 1 \\ 3.\ 0 = e^{1-kx_s} \quad \textit{keine Lösung} \end{cases}$$

(B) Berechnung der y-Koordinaten

$g_k(x_{s1}) = 0$ $\boxed{S_1(0;0)}$

$g_k(x_{S2}) = e^{1-k}$ $\boxed{S_2(1;e^{1-k})}$

Berechnung desjenigen k_q für das $Q(1;1)$ Schnittpkt der Fktn ist

$1 = e^{1-k_q} \Leftrightarrow \ln 1 = 0 = 1 - k_q \Leftrightarrow k_q = 1$

d) Aufstellung der Gleichung der Tangente t_{1,k_d} am Grafen derjenigen f_{k_d} an der Stelle $x_B = 1$ für die gilt: $m_t = 1$

x-Koordinate des Berührungspkts: $x_B = 1$

y-Koordinate des Berührungspkts: $y_B = e^{1-k_d} \overset{\text{mit } k_d = 1}{\Rightarrow} y_B = e^0 = 1$

Tangentenanstieg: $m_t = 1 = f'_{k_d}(1) = (2 - k_d)e^{1-k_d}$

Ermittlung von k_d durch probieren oder mit GTR: $k_d = 1$

Pkt-Richtungsgl. der Tangente: $y - 1 = 1(x - 1)$

explizite Form der Tangentengl: $y = x$

e) Extremwertproblem

Extremgröße: $A_R = a \cdot b$

Nebenbedingungen: $a = u; \quad b = f_1(u) = u^2 e^{1-u}$

Zielfkt.: $A_R = u \cdot u^2 e^{1-u} = \boxed{u^3 e^{1-u} = A_R(u) \quad (u \in R; u > 0)}$

Berechnung der lokalen Extrempkte der Zielfkt mit GTR $H(3;3{,}65)$

Für $u_E = 3$ hat das Rechteck den maximalen Flächeninhalt von 3,65FE.

y-Koordinate von R_{u_E}: $f_1(3) = 3^2 e^{1-3} = \frac{9}{e^2}$ $R_{u_E}\left(3; \frac{9}{e^2}\right)$

f) - Best. einer Stammfktsgl. der Fktn g_k

mittels partieller Integration $\int (f_1(x) \cdot f_2(x))dx = F_1(x)f_2(x) - \int (F_1(x) \cdot f_2'(x))dx$

wähle $f_1(x) = e^{1-kx}$, $f_2(x) = x$

Stammfkt von f_1 mit Regel für verkettete Fktn mit linearer innerer Funktion

$f(x) = a(mx + n) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{m} A(mx + n) : F_1(x) = -\frac{1}{k} e^{1-kx}$

Ableitung der Fkt f_2: $f_2'(x) = 1$

$$\int (e^{1-kx} \cdot x)dx = -\frac{1}{k} e^{1-kx} \cdot x - \int \left(-\frac{1}{k} e^{1-kx} \cdot 1\right)dx = -\frac{x}{k} e^{1-kx} + \frac{1}{k} \int e^{1-kx} dx = -\frac{x}{k} e^{1-kx} - \frac{1}{k^2} e^{1-kx}$$

$$\boxed{G_k(x) = -\frac{e^{1-kx}}{k}\left(x + \frac{1}{k}\right)}$$

- Berechnung desjenigen Wertes a für den gilt: $\int_0^a g_1(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^4 g_1(x)dx$

$$\int_0^a g_1(x)dx = \left[-e^{1-x}(x+1)\right]_0^a = -e^{1-a}(a+1) - (-e^1) = e - e^{1-a}(a+1) = \frac{1}{2}\int_0^4 g_1(x)dx = A \overset{GTR}{\approx} 1{,}23$$

Lösung der Gl. mit GTR: $0 = e - e^{1-a}(a+1) - A \Leftrightarrow a \overset{GTR}{\approx} 1{,}54$

Teil B Geometrie / Algebra

gegeben $A(8;0;-5)$, $B(5;8;0)$, $C(-4;4;1)$, $D(-1;-4;-4)$, $S_a(2+2a; 2-3a; -2+6a)$ $(a \in R, a > 0)$

a) - Nachweis, dass $ABCDS_a$ gerade, quadratische Pyramide

quadratische Pyramide, wenn ABCD Quadrat $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$$(1)\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-8 \\ 8-0 \\ 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+1 \\ 4+4 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$$

(2) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4-5 \\ 4-8 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-8 \\ -4-0 \\ -4+5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}$

(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (-3)\cdot(-9) + 8\cdot(-4) + 5\cdot 1 = 27 - 32 + 5 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

aus (1), (2), (3) folgt ABCD ist ein Quadrat, d.h. die Pyramide ist qudratisch (*)

Pyramide gerade wenn gilt: $\overrightarrow{MS_a} \perp$ auf Grundebene (M Diagonalenschnittpunkt)

Koordinaten vom M: $M = M_{\overline{AC}}\left(\frac{8-4}{2}; \frac{0+4}{2}; \frac{-5+1}{2}\right) = (2;2;-2)$

Aufstellung des Höhenvektors: $\overrightarrow{MS_a} = \begin{pmatrix} 2+2a-2 \\ 2-3a-2 \\ -2+6a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -3a \\ 6a \end{pmatrix}$

(4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MS_a} = -3\cdot 2a + 8\cdot(-3a) + 5\cdot 6a = -6a - 24a + 30a = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MS_a}$

aus (4) folgt $\overrightarrow{MS_a} \perp$ auf Grundebene, d.h. die Pyramide ist gerade (**)

aus (*), (**) folgt die Behauptung

- Bestimmung des Volumens der Pyramide $ABCDS_3$

$$V_{Py} = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{MS_3}\right| = \frac{1}{3}\left(\sqrt{9+64+25}\right)^2 \cdot \sqrt{36+81+324} =$$
$$= \frac{1}{3} 98 \cdot \sqrt{441} = 686$$

Berechnung desjenigen Punktes S_a für der die Pyramide das Volumen $38\frac{1}{9} = \frac{343}{9}VE$ hat

$$\frac{343}{9} = \frac{98}{3}\sqrt{4a^2 + 9a^2 + 36a^2} = \frac{98}{3}\cdot 7a \Leftrightarrow a = \frac{343}{9}\cdot\frac{3}{98\cdot 7} = \frac{49}{3\cdot 98} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{S_{\frac{1}{6}}\left(\frac{7}{3};\frac{3}{2};-1\right)}$$

b) Ermittlung des Schnittwinkels einer Seitenebene $ABCDS_3$ mit der Grundebene

Schnittwinkel der Ebenen ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen

Ebenengl. der Grundebene (GTR aus den Pktn A,B, C)

$E_G: \quad 2x - 3y + 6z = -14 \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_G}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ebenegl. einer Seitenebene (GTR aus den Pktn A,B, $S_3(8;-7;16)$

$E_S: \quad 29x + 9y + 3z = 217 \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_S}} = \begin{pmatrix} 29 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

Berechnung des Schnittwinkels (GTR Eingabe der Normalenvektoren)

$$\boxed{\angle\left(\overrightarrow{n_{E_G}}, \overrightarrow{n_{E_S}}\right) \approx 76{,}74°}$$

c) - Ermittlung des Volumens des Kegels

$V_K = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ dabei sind $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{98} = 7$; $h = \left|\overrightarrow{MS_3}\right| = 21$

$$\boxed{V_K \approx 1077{,}57VE}$$

d) Begründung der entstehenden Teilflächen bei Teilung der Grundfläche durch x-y-Ebene

z-Koordinate der Eckpkte gibt an, ob der betreffende Pkt oberhalb, unterhalb oder in der x-y-Ebene liegt

$z_A, z_D < 0 \Rightarrow$ A, D liegen unterhalb der x-y-Ebene

$z_B = 0 \Rightarrow$ B liegt in der x-y-Ebene

$z_c > 0 \Rightarrow$ C liegt oberhalb der x-y-Ebene

D.h. die x-y-Ebene enthält den Eckpunkt B und teilt die Strecke $\overline{CD}$. Der Durchstoßpunkt P der Strecke $\overline{CD}$ durch die x-y-Ebene ist Eckpunkt des Dreiecks BCP und des Vierecks ABPD.

Anmerkung des Autors
Im Lösungsvorschlag werden als Flächenarten „Trapez“ und „Dreieck“ angegeben. Die Angabe „Trapez“ kann wegen $\overline{AB} \| \overline{PD}$ gemacht werden. Allerdings ist diese Angabe meines Erachtens nicht aus der Aufgabenstellung erkennbar. Ansonsten müsste konsequenter Weise auch die Angabe „rechtwinkliges Dreieck“ erwartet werden.

Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks BCP
Ermittlung der Koordinaten des Durchstoßpkts

Gerade durch C und D: $\vec{x} = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

Berechnung des DSP mit GTR (Eingabe $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{DC}$ und der Koeffizienten der x-y-Ebene $A = 0; B = 0; C = 1; D = 0$) $\boxed{P(-3{,}4;2{,}4;0)}$

(alternativ: Ansatz $z_P = 0 = 1 + 5t \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}$, damit Berechnung x_P, y_P)

Berechnung der Fläche des Dreiecks BCP mit GTR (Eingabe der Koordinaten der Eckpunkte; Ausgabe unter anderem des Flächeninhaltes): $\boxed{A_D = 9{,}8FE}$

(alternativ: $A_D = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CP}\right|$ wegen rechtem Winkel bei C)

Teil C Stochastik

a) ZEa1 ... Auswahl eines mangelhaften Produktes und Feststellung wer diese Produkt geprüft hat
BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

$K_1 = k$ ... Kontrolleur 1 hat geprüft $\quad P(k) = 0{,}65$

$K_2 = \overline{k}$ ... Kontrolleur 2 hat geprüft $\quad P(\overline{k}) = 1 - P(k) = 0{,}35$

ZEa2 ... Untersuchung eines mangelhaften Produkts und Erkennen des Fehlers
BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

e ... Mangel erkannt $\quad$ Wahrscheinlichkeit unbekannt

$\overline{e}$ ... Mangel nicht erkannt $\quad P(e) = 1 - P(\overline{e})$

bekannt sind folgende bedingten Wahrscheinlichkeiten

Kontrolleur 1 erkennt ein mangelhaftes Produkt $\quad P_k(e) = 0{,}85 \Rightarrow P_k(\overline{e}) = 1 - P_k(e)$

Kontrolleur 2 erkennt ein mangelhaftes Produkt $\quad P_{\overline{k}}(e) = 0{,}9$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein mangelhaftes Produkt erkannt wird

$$\boxed{P(e) = P_k(e) \cdot P(k) + P_{\overline{k}}(e) \cdot P(\overline{k}) = 0{,}8675}$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein defektes, als intakt eingestuftes Produkt von Kontrolleur 1 stammt
D.h. gesucht ist $P_{\overline{e}}(k)$

nach Pfadregel gilt: $P(\overline{e} \cap k) = P_k(\overline{e}) \cdot P(k) = P(\overline{e}) \cdot P_{\overline{e}}(k) \Leftrightarrow P_{\overline{e}}(k) = \frac{P(k) \cdot P_k(\overline{e})}{P(\overline{e})}$

$$P_{\overline{e}}(k) = \frac{P(k)(1 - P_k(e))}{1 - P(e)} = \boxed{P(k)\frac{1 - P_k(e)}{1 - P(e)} \approx 0{,}7358 = P_{\overline{e}}(k)}$$

b) Zufallsgröße Xb beschreibt die in einem Jahr bei Ausfall anfallenden Reparaturkosten
Xb setzt sich additiv aus den beiden Zufallsgrößen Xb1 und Xb2 zusammen
Xb1 beschreibt die anfallenden Kosten bei Ausfall von Teil 1

$E(Xb1) = 0{,}1 \cdot 25€ = 2{,}5€$

Xb2 beschreibt die anfallenden Kosten bei Ausfall von Teil 2

$E(Xb2) = 0{,}08 \cdot 15€ = 1{,}2€$

Erwartungswert von Xb

$\boxed{E(Xb) = E(Xb1) + E(Xb2) = 3{,}7€}$

c) Zufallsgröße Xc beschreibt die Leistung der Heizelemente
Xc soll normalverteilt sein mit dem Erwartungswert $\sigma = 1000$ und der Standardabweichung $\mu = 100$

gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $950 \le Xc \le 1050$
Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit GTR-Programm

Eingabe: Erwartungswert 1000; Standardabweichung 100, min. Erfolge 950, max. Erfolge 1050
Ausgabe: gesuchte Wahrscheinlichkeit

$\boxed{P(950 \le Xc \le 1050) \approx 0{,}3829}$

d) ZEd1 ... Auswahl eines Produktes und Feststellung von welcher Maschine es stammt
BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

$M_1 = m$ ... von Maschine 1 hergestellt $\quad P(m) = 0{,}6$

$M_2 = \overline{m}$ ... nicht von Maschine 1 hergestellt $\quad P(\overline{m}) = 1 - P(m) = 0{,}4$

ZEd2 ... Auswahl eines Produktes und Überprüfung ob es fehlerhaft ist
BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

f ... fehlerhaft $\quad$ gesuchte Wahrscheinlichkeit

$\bar{f}$ ... nicht fehlerhaft $\quad P(\bar{f}) = 1 - P(f)$

bekannt sind folgende bedingten Wahrscheinlichkeiten

ein von Maschine 1 produziertes Produkt ist nicht fehlerhaft $\quad P_m(\bar{f}) = 0{,}9$

ein fehlerfreies Teil stammt von Maschine 1 $\quad P_{\bar{f}}(m) = 0{,}58$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein mangelhaftes Produkt erkannt wird
nach Pfadregel gilt:

$$P(\bar{f}) \cdot P_{\bar{f}}(m) = P_m(\bar{f}) \cdot P(m) \Leftrightarrow 1 - P(f) = \frac{P_m(\bar{f}) \cdot P(m)}{P_{\bar{f}}(m)}$$

$$\boxed{P(f) = 1 - \frac{P_m(\bar{f}) \cdot P(m)}{P_{\bar{f}}(m)} \approx 0{,}0690}$$

Teil D1 Wahlaufgabe Analysis

geg.: $\quad y = f(t) = 5e^{\left(-\frac{1}{4}t\right)} \sin(\pi t) \quad (t \in R, t \ge 0)$

a) - Angabe der Nullstellen von f im Intervall $0 \le t \le 2$
GTR: $t_{N1} = 0; t_{N2} = 1; t_{N3} = 2$
- Angabe der lokalen Extrempunkte im Intervall $0 \le t \le 2$
GTR: $H(0{,}48;4{,}43);\quad T(1{,}48;-3{,}45)$

b) Nachweis, dass t_{Ek} nicht gilt arithmetisches Mittel benachbarter Nullstellen ist
Berechnung der allgemeinen Nullstellen von f

$$0 = 5e^{\left(-\frac{1}{4}t_N\right)} \sin(\pi t_N) \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ 0 = 5e^{\left(-\frac{1}{4}t_N\right)} & \textit{keine Lösung} \\ 2.\ 0 = \sin(\pi t_N) \Leftrightarrow \pi t_N = k\pi \Leftrightarrow t_{Nk} = k & (k \in N) \quad (1) \end{cases}$$

Notwendige Bedingung für Extremstellen $f'(t_E) = 0$

$$f'(t) = 5\left(-\frac{1}{4}e^{\left(-\frac{1}{4}t\right)} \cdot \sin(\pi t) + e^{\left(-\frac{1}{4}t\right)} \cdot \pi\cos(\pi t)\right) = 5e^{\left(-\frac{1}{4}t\right)}\left(-\frac{1}{4}\sin(\pi t) + \pi\cos(\pi t)\right)$$

$$f'(t_E)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ 0=5e^{\left(-\frac{1}{4}t\right)} & \text{liefert keine Lösung} \\ 2.\ 0=-\frac{1}{4}\sin(\pi t)+\pi\cos(\pi t) \Leftrightarrow 0=\sin(\pi t)-4\pi\cos(\pi t) & (2) \end{cases}$$

aus (1) folgt: falls t_E arithmetisches Mittel benachbarter Nullstellen ist, so muss gelten

$$t_{Ek}=\frac{t_{Nk}+t_{Nk+1}}{2}=\frac{k+k+1}{2}=k+\frac{1}{2}$$

Nachweis, dass diese Beziehung die Gleichung (2) nicht erfüllt

$$\sin\left(\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)-4\pi\underbrace{\cos\left(\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)}_{=0}=\sin\left(\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\neq 0 \Rightarrow \text{ Behauptung}$$

c) Nachweis, dass $f\left(n+\frac{1}{2}\right)$ $(n\in N)$ geometrische Zahlenfolge bildet

für geometrische Zahlenfolge gilt: $a_{n+1}=q\cdot a_n$ für alle n

$$n=k:\quad a_k=\left|f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right|=\left|5e^{-\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\sin\left(\pi\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)\right)\right|$$

$$n=k+1:\quad a_{k+1}=\left|f\left(k+1+\frac{1}{2}\right)\right|=\left|5\underbrace{e^{-\frac{1}{4}\left(k+1+\frac{1}{2}\right)}}_{=e^{-\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\cdot e^{-\frac{1}{4}}}\cdot\underbrace{\sin\left(\pi\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)+\pi\right)}_{-\sin\left(\pi\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)\right)}\right|=\left|f\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}}\cdot(-1)\right|=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\cdot a_k$$

$$a_0=5e^{-\frac{1}{8}}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=5e^{-\frac{1}{8}} \Rightarrow \text{ explizite Vorschrift der geom. ZF: } a_n=5e^{-\frac{1}{8}}\cdot e^{-\frac{n}{4}}$$

Ermittlung, wie viele Glieder der Zahlenfolge addiert werden müssen um erstmals den Wert 19 überschreiten

<u>Variante 1:</u> GTR mit Menü 8 (RECUR) Zahlenfolge konfigurieren und ablesen des Wertes für den Summenfolge erstmals größer 19 $s_{12}=19{,}17$ d.h. **13** Glieder (wegen Beginn bei 0!) müssen addiert werden

<u>Variante 2:</u> $s_n=a_0\dfrac{q^n-1}{q-1}\Leftrightarrow q^n=\dfrac{s_n(q-1)}{a_0}+1\Leftrightarrow n=\dfrac{\ln\left(\frac{s_n(q-1)}{a_0}+1\right)}{\ln q}\approx 12{,}2$

d.h. 13 Folgenglieder müssen addiert werden.

Teil D2 Wahlaufgabe Geometrie / Algebra

gegeben: $A(8;4;0)$, $B(8;8;0)$, $C(4;8;0)$, $D(4;4;0)$, $E_h(8;4;h)$, $F_h(8;8;h)$, $G_h(4;8;h)$, $H_h(4;4;h)$

Ebene ε $y+z=12$ enthält die Punkte $E_{h\alpha};F_h;G_h;H_{h\alpha}$

a) - Berechnung der Höhe des Bohrtisches

F erfüllt die Ebenengleichung: Einsetzen von F in ε $8+h=12\Leftrightarrow h=4$

- Berechnung des Neigungswinkels

Der Neigungswinkel der Ebene ist gleich dem Winkel der vom Normalenvektor der x-y-Ebene und dem Normalenvektor der Bohrtischebene eingeschlossen wird.

$$\vec{n}_{xy}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\vec{n}_{\varepsilon}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad \angle(\vec{n}_{xy};\vec{n}_{\varepsilon})\overset{GTR}{=}45°$$

b) Berechnung der Koordinaten des Punktes K für den Kontrollsensor

K ist der Durchstoßpunkt einer Gerade g durch die Wandebene w

Die Gerade g ist festgelegt durch den Punkt R und den Spiegelungspunkt L' von L bezüglich des Einfallslotes s. Das Einfallslot ist festgelegt durch den Punkt R und den Normalenvektor der Bohrtischebene.
S sei der Lotfußpunkt von L auf dem Einfallslot s. Dann gilt:

$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OR} + t\overrightarrow{RL'}$ (*) wobei $\overrightarrow{OL'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LL'} = \overrightarrow{OL} + 2 \cdot \overrightarrow{LS}$ (**)

für S muss gelten: (1) $\vec{n}_\varepsilon \cdot \overrightarrow{SL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 - x_S \\ 10 - y_S \\ 20 - z_S \end{pmatrix} = 10 - y_S + 20 - z_S = 30 - y_S - z_S = 0$

(2) $S \in s$; Gerade s: $\vec{x} = \overrightarrow{OR} + l \cdot \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_S = 6 \\ y_S = 6 + l_S \\ z_S = 6 + l_S \end{cases}$

Einsetzen von (2) in (1): $30 - 6 - l_S - 6 - l_S = 0 \Leftrightarrow l_S = 9$

Verwendung von $l_S = 9$ in (2) $\quad S(6;15;15)$

Berechnung von L' mit (**): $\overrightarrow{OL'} = \overrightarrow{OL} + 2 \cdot \overrightarrow{LS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

Geradengl. von g $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

Berechnung des Durchstoßpunktes von G durch w $y = 13$

Variante 1

GTR Programm: $\quad K(9;13;8)$

Variante 2

$y_K = 6 + 14t_K = 13 \Leftrightarrow t_K = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_K = 6 + 0{,}5 \cdot 6 = 9 \\ z_K = 6 + 0{,}5 \cdot 4 = 8 \end{cases} \Rightarrow K(9;13;8)$

c) Nachweis der allgemeinen Gleichung für die Bohrtischebene

Ebenengleichung in Parameterform z.B.: $E_B: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OF_h} + s \cdot \overrightarrow{F_hG_h} + t \cdot \overrightarrow{F_hE_{h\alpha}}$

Koordinaten der verwendeten Punkte:

$F_h(8;8;h)$, $G_h(4;8;h)$ gegeben

$E_{h\alpha}(8;y_{h\alpha};z_{h\alpha})$: $\frac{y_F - y_E}{|\overrightarrow{EF}|} = \cos\alpha \overset{y_F=8}{\Leftrightarrow} y_E = 8 - |\overrightarrow{EF}|\cos\alpha$; $\frac{z_E - z_F}{|\overrightarrow{EF}|} = \sin\alpha \overset{y_F=h}{\Leftrightarrow} z_E = h + |\overrightarrow{EF}|\sin\alpha$

Aufstellung der Richtungsvektoren: $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 8 - |\overrightarrow{EF}|\cos\alpha - 8 \\ h + |\overrightarrow{EF}|\sin\alpha - h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -|\overrightarrow{EF}|\cos\alpha \\ |\overrightarrow{EF}|\sin\alpha \end{pmatrix}$

Parametergleichung: $E_B: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ h \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -|\overrightarrow{EF}|\cos\alpha \\ |\overrightarrow{EF}|\sin\alpha \end{pmatrix}$

Umwandlung in parameterfreie Form

$$\begin{array}{llll|l} x = & 8 & -4r & & \\ y = & 8 & & -|\overrightarrow{EF}|\cos\alpha & \sin\alpha \\ z = & h & & +|\overrightarrow{EF}|\sin\alpha & \cos\alpha \\ \hline y\sin\alpha + z\cos\alpha = & \multicolumn{3}{l|}{8\sin\alpha + h\cos\alpha} & \end{array}$$