Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Homepage befinden. Insbesondere ist dies **keine** Seite des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2002, wie sie vom Sächsichen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die offiziellen Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@org.dz.shuttle.de) – Mathe-Lehrer.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 35 BE,
im Teil B 25 BE,
im Teil C 15 BE,
im Teil D 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbf{R}$, $a > 0$) ist eine Funktion f_a durch $y = f_a(x) = ax^2\left(1 - \ln\left(\frac{x^2}{a}\right)\right)$ und ihre zweite Ableitung durch $f''_a(x) = -2a\left(\left(\frac{x^2}{a}\right) + 2\right)$ gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion an und bestimmen Sie die Nullstellen dieser Funktion.
Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion f_a achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f_a und untersuchen Sie die Art der Extrema. Erreichbare BE-Anzahl: 13

b) Begründen Sie, dass es genau eine Funktion f_a gibt, die den Wertebereich $\{y \mid y \in \mathbf{R}, y \leq 1\}$ besitzt und geben Sie den Wert a für diesen Fall an. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Der Graph jeder Funktion f_a besitzt genau zwei Wendepunkte. Alle Wendepunkte der Graphen der Funktionen f_a liegen auf dem Graphen einer Funktion g.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g. Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion F_1 mit der Gleichung $y = F_1(x) = \frac{1}{9}x^3(5 - 3\ln(x^2))$ eine Stammfunktion der Funktion f_1 ist.
Der Graph der Funktion f_1 die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = z$ ($z \in \mathbf{R}$, $0 < z < 1$) und $x = 1$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A(z) vollständig.
Berechnen Sie den Flächeninhalt A(z).
Geben Sie den Flächeninhalt für $z = \frac{1}{e}$ an. Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Der Graph der Funktion f_1 rotiert im Intervall $0{,}5 \leq x \leq \sqrt{e}$ um die x-Achse. Ermitteln Sie das Volumen des betreffenden Rotationskörpers. Erreichbare BE-Anzahl: 2

f) Für jedes u ($u \in \mathbf{R}$, $u > 0$) existiert im Punkt $R(u \mid f_1(u))$ eine Tangente t_u an den Graphen der Funktion f_1.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente.
Bestimmen Sie die Werte u, für die die Tangente t_u den positiven Teil der x-Achse und den negativen Teil der y-Achse schneidet. Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind die Punkte $A(3 \mid -1 \mid -5)$, $B(1 \mid 5 \mid -2)$ und $C(-2 \mid 2 \mid 1)$ sowie für jedes a eine Gerade g_a durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R}) \text{ gegeben.}$$

a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass es keinen Punkt gibt, der auf allen Geraden g_a liegt.
Untersuchen Sie, ob es einen Wert a gibt, für den der Punkt B auf der Geraden g_a liegt.
Zeigen Sie, dass jede der Geraden g_a windschief zur x-Achse ist. Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Alle Geraden g_a liegen in ein und derselben Ebene E.
Die Strecke $\overline{OA}$ wird durch senkrechte Parallelprojektion in die Ebene E abgebildet. Berechnen Sie die Länge der Projektionsstrecke. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Die Punkte A, B und C sind Eckpunkte eines Dreiecks. Durch die Gerade g_5 wird dieses Dreieck in zwei Teilflächen zerlegt.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass eine der Teilflächen ein Trapez ist.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Teilflächen. Erreichbare BE-Anzahl: 8

d) Die Gerade h geht durch die Punkte A und C.
Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen den Geraden g_a und h.
Es gibt genau eine Gerade g_a, die von der Geraden h minimalen Abstand besitzt.
Beschreiben Sie, wie eine Gleichung dieser Geraden ermittelt werden kann.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil C: Stochastik

Ein Spezialbetrieb für Stoßdämpferreparaturen an PKW hat ermittelt, dass die Defekte an Stoßdämpfern eines Typs in genau drei einander ausschließende Fehlerkategorien (F1, F2, F3) eingeteilt werden können. F1 tritt in 70% und F2 in 15% der Schadensfälle auf. Ein Stoßdämpfer, der den Fehler F1 aufweist, verursacht in 90% dieser Fälle ein Klopfgeräusch beim Durchfahren von Fahrbahnunebenheiten. Bei Fehler F2 beträgt die entsprechende Wahrscheinlichkeit 50%, während Fehler F3 keine Klopfgeräusche verursacht.
Die Kosten für die Behebung der einzelnen Fehlerarten betragen in diesem Betrieb pro Stoßdämpfer: 400€ bei F1, 200€ bei F2 und 100€ bei F3.
Ein Fahrzeug mit Klopfgeräuschen an einem Stoßdämpfer wird in die Werkstatt gebracht.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die kostenintensivste Fehlerart F1 vorliegt.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Reparaturkosten. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Im Betrieb werden pro Woche durchschnittlich 25 defekte Stoßdämpfer an Autos dieses Typs repariert. In den Fällen, in denen Fehler F1 auftritt, wird ein bestimmtes Ersatzteil benötigt. Die Anlieferung der Ersatzteile erfolgt wöchentlich und der verfügbare Lagerraum ist klein.

c) Berechnen Sie, wie viele solcher Ersatzteile wenigstens eingelagert werden müssen, damit in einer Woche bei durchschnittlichem Bedarf die Fahrzeuge mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit ohne Nachbestellung von Stoßdämpfern sofort repariert werden können. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Der Hersteller produziert die Stoßdämpfer parallel und zu gleichen Anteilen auf 6 Maschinen. Die jeweilige Tagesproduktion wird in einer Halle gelagert.

d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass vier zufällig dieser Halle entnommenen Stoßdämpfer von vier unterschiedlichen Maschinen stammen. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Ein Test von Stoßdämpfern dieser Firma ergab, dass diese eine durchschnittliche Lauf Leistung von 50000 km erbringen. Weiter zeigte sich, dass die Lauf Leistung normalverteilt ist und eine Standardabweichung von 10000 km aufweist.

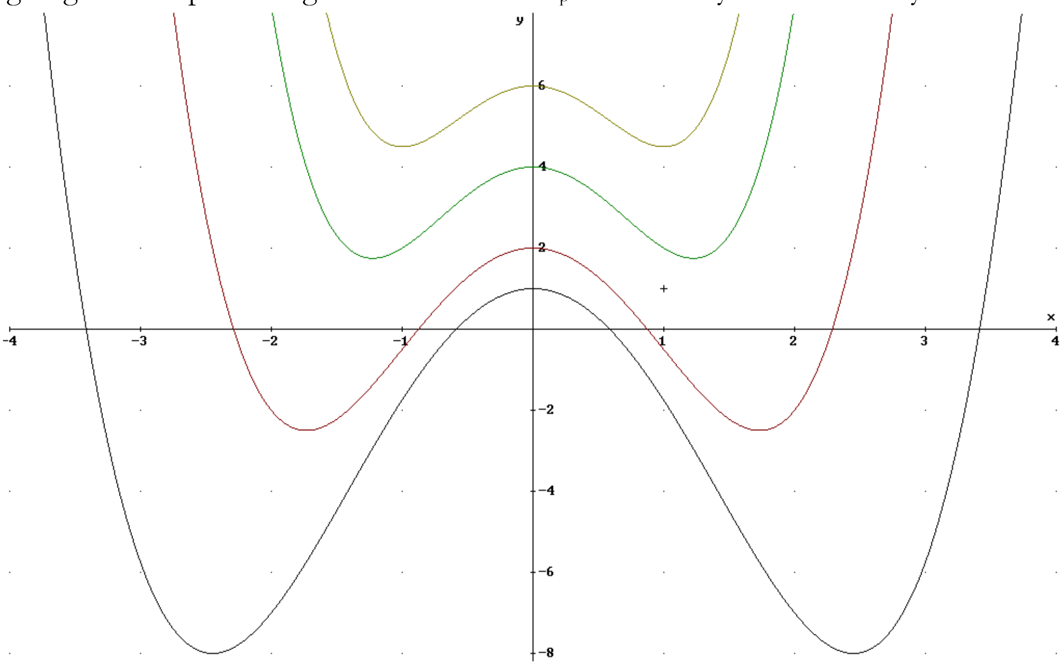
e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stoßdämpfer dieser Marke weniger als 90% der durchschnittlichen Laufleistung bringt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Für jedes p (p ∈ **R**, p > 0) ist eine Funktion f_p durch $y = f_p(x) = \frac{p}{4}x^4 - 3x^2 + p$ gegeben. Die Abbildung zeigt die Graphen einiger der Funktionen f_p in einem x-y-Koordinatensystem.



a) Ermitteln Sie alle Werte p (p ∈ **N**), für die die Graphen der zugehörigen Funktion f_p dargestellt sind. Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen f_p auf Symmetrie. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Es gibt Funktionen f_p, deren jeweiliger Graph mit der x-Achse im I. und II. Quadranten eine Fläche A_p vollständig begrenzt.

b) Ermitteln Sie alle Werte p, für die eine solche Fläche existiert.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche A_3.
Begründen Sie, dass die Fläche A_3 die größte aller Flächen A_p ist. Erreichbare BE-Anzahl: 7

c) Untersuchen Sie, ob es eine Funktion gibt, auf deren Graph alle lokalen Minimumpunkte der Funktionen f_p liegen und geben Sie gegebenenfalls eine Gleichung dieser Funktion an.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1 \mid 5 \mid 0)$, $B(8 \mid -2 \mid 0)$ sowie $C_a(2a \mid -3 \mid -3)$ ($a \in \mathbf{R}$, $a > 0$) gegeben.
Für jedes a wird durch die Punkte A, B und C_a eine Ebene E_a bestimmt. Die Ebene und die drei Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide P_a mit dreiseitiger Grundfläche.

a) Zeigen Sie, dass für jedes a ($a \in \mathbf{R}$, $a > 0$) die Ebene E_a die x-Achse in genau einem Punkt $X_a(a \mid 0 \mid 0)$ schneidet.
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide P_a. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Jeder Pyramide P_a sind Quader so einbeschrieben, dass der Koordinatenursprung Eckpunkt des Quaders ist und der einzige nicht in den Koordinatenebenen liegende Eckpunkt zur Ebene E_a gehört.

b) Einige der Quader besitzen in der x-y-Koordinatenebene liegende quadratische Grundflächen mit der Seitenkante 2.
Berechnen Sie den Wert a, für den das Volumen dieses Quaders 7 beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Einige der Quader sind Würfel.
Berechnen Sie den Wert a, für den das Volumen des Würfels $\frac{125}{8}$ beträgt.
Ermitteln Sie die obere Grenze aller derartigen Würfelvolumina. Erreichbare BE-Anzahl: 7

Lösungsvorschläge

Teil A

a) $\mathbf{D} = \mathbf{R}\setminus\{0\}$

Nullstellen: $x_{0_{1/2}} = \pm\sqrt{\mathrm{e}\cdot a}$

Achsensymmetrie: zu zeigen ist $f_a(-x) = f_a(x) \Leftrightarrow a(-x)^2\left(1 - \ln\frac{(-x)^2}{a}\right) = ax^2\left(1-\ln\frac{x^2}{a}\right)$

lokale Extrempunkte.

- $f_a'(x) = -2ax\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$
- $f_a'(x_e) = 0 \Leftrightarrow x_e^2 = a \Leftrightarrow x_e = \pm\sqrt{a}$
- $f_a''(\pm\sqrt{a}) = -4a < 0 \Rightarrow P_{Max1}(-\sqrt{a} \mid a^2)$ und $P_{Max2}(\sqrt{a} \mid a^2)$

b) Da P_{Max} auch globale Extrema sind, muss $y \leq a^2 = 1$ gelten $\Rightarrow a = 1$

c) Ortskurve der Wendepunkte:

- $f''_a(x_W) = 0 \Rightarrow W_{1/2}\left(\frac{\pm\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \;\middle|\; 3\frac{a^2}{e^2}\right) = (x \mid y)$
- $a = x^2e^2 \Rightarrow y = 3x^4e^2$

d) $F'_1(x) = \frac{5}{9}(x^3)' - \left((x^3)'\frac{\ln x^2}{3} + \frac{x^3}{3}(\ln x^2)'\right) = f_1(x)$

$$\int_z^1 f_1(x)\,dx = F_1(1) - F_1(z) = \frac{2}{3}z^3\ln z - \frac{5}{9}z^3 + \frac{5}{9}$$

$$A\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{5}{9} - \frac{11}{9\mathrm{e}^3}$$

e) Rotationskörper:
mit GTR: π fnInt(Y1²,X,.5,e^.5) ->
V = 2.29386

f) Tangentengleichung t_u in R_u:
t_u: $y = f'_1(u)\,x + f_1(u) - f'_1(u)\,u \Leftrightarrow y = -4u\cdot\ln u\cdot x + 2u^2\cdot\ln u + u^2$
um die Bedingungen zu erfüllen, muss $2u^2\cdot\ln u + u^2 < 0$ (negativer Teil der y-Achse) und $-4u\cdot\ln u > 0$ (positiver Anstieg heißt positiver Teil der x-Achse wird geschnitten) gelten weitere Umformungen:

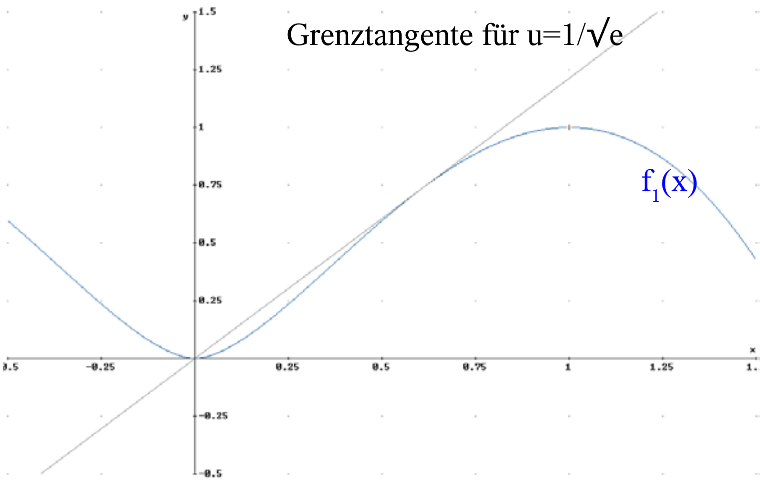


Abbildung 1

$$u^2\cdot(2\ln u + 1) < 0 \underset{u>0}{\Rightarrow} 2\ln u + 1 < 0 \Rightarrow u < e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

und $-4u\cdot\ln u > 0 \underset{u>0}{\Rightarrow} \ln u < 0 \Rightarrow u < 1$ führen zu $0 < u < 1/\sqrt{e}$

Teil B

a) Die Geraden g_a sind alle parallel zueinander, denn der Richtungsvektor ändert sich nicht. Der Stellungsvektor hängt aber von a ab und ist damit für unterschiedliche a auch unterschiedlich. Somit sind die Geraden echt parallel zueinander.

$b \underset{?}{\in} g_a \Rightarrow$ hat keine Lösung (Widerspruch für y- und z-Komponenten)

Aus dem Richtungsvektor ist abzulesen, dass die Geraden g_a nicht parallel zur x-Achse sind. Somit reicht es, nachzuweisen, dass keine Schnittpunkte mit der x-Achse vorliegen:

$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$. Der Widerspruch der letzten beiden Gleichungen ist offensichtlich. Also sind die Geraden g_a und die x-Achse windschief.

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Da nur die Länge der Projektion von $\overline{OA}$ berechnet werden muss, ist es vielleicht am einfachsten, in einem rechtwinkligen Dreieck zu operieren, welches entstehen würde, wenn $\overline{OA}$ direkt an dessen Bild $\overline{O'A'}$ ansetzen würde[1]. Wichtig für die Längenberechnung ist der Winkel, den die Ebene E mit der Richtung $\overrightarrow{OA}$ bildet. Am schnellsten geht das mit GTR prgmGeometri:

```
prgmGEOMETRI█
```

```
ANALYT. GEOMETRI
1:ABSTAENDE
2:SCHNITTWINKEL
3:VEKTORPRODUKT
4:DREIECK
5:EBENENGLEICHUN
6:SPIEGELUNG
7:DURCHSTOSSPKT
```

```
SCHNITTWINKEL
1:ZWEIER EBENEN
2:GERADE-EBENE
3:ZWEIER RICHTUN
```

```
EINGABE GERADE
1:PKT.-RICHTUNG
2:ZWEIPUNKT
```

```
EINGABE PKT. R3
X=?0
Y=?0
Z=?0
EINGABE PKT. R3
X=?3
Y=?-1
Z=?-5█
```

```
EINGABE EBENE
1:PKT. + 2 RICHT
2:DREIPUNKT
```

```
Y=?1
Z=?-7
EINGABE RICHTUNG
X=?1
Y=?0
Z=?0
EINGABE RICHTUNG
X=?5█
```

```
WINKEL IN RAD
      .2287689138
     IN GRAD
      13.10749324
GTR AUF RADIANT
UMGESTELLT
             Done
█
```

Das Programm speichert den Winkel in Variable W, nachdem die Länge von $\overline{OA}$ bekannt ist, kann die Länge des Bildes berechnet werden:

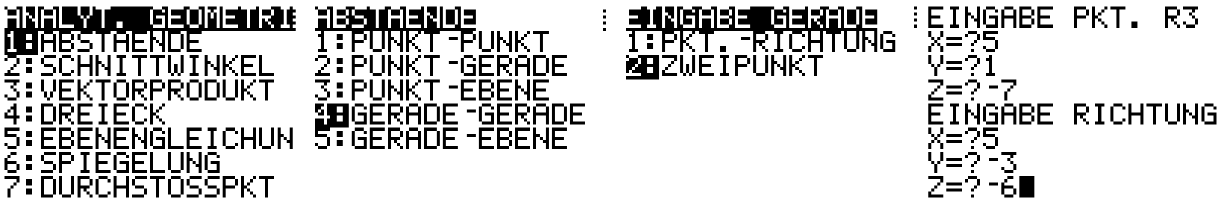
```
W
      .2287689138
cos(W)*√(35
      5.761944116
█
```

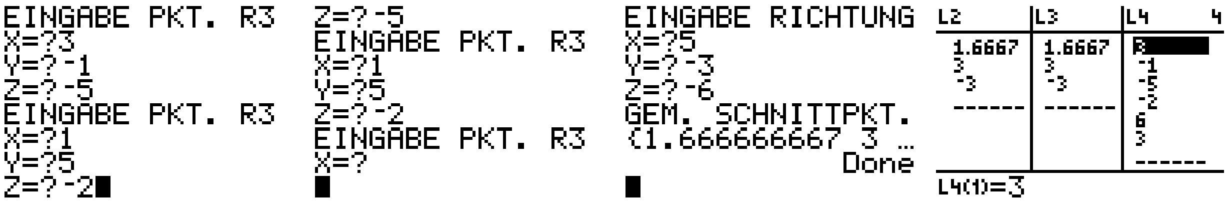
c) Richtungsvektoren des Dreiecks: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{CA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$. Damit steht fest, dass Ecke B von g_5 [2]abgeschnitten wird. Ansatz zur Bestimmung der Schnittpunkte: $g_{AB} \cap g_5 = S_{AB}$ und $g_{BC} \cap g_5 = S_{BC}$. Weiter mit GTR prgmGeometri:

---

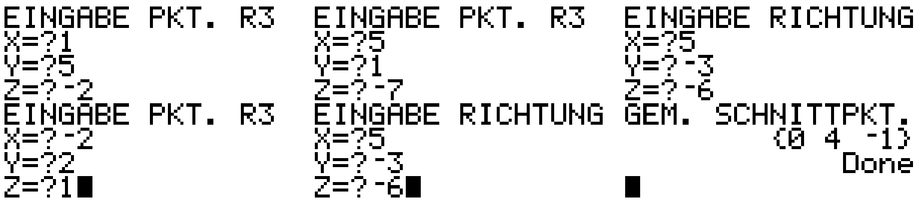
1 Das Dreieck AOA' hätte dann den rechten Winkel OAA' und bei O (d. h. ∠A'OA ist der Winkel der durch die Richtung $\overrightarrow{OA}$ und die Ebene E gebildet wird.

2 vermutlich (das ist erst nachzuweisen)





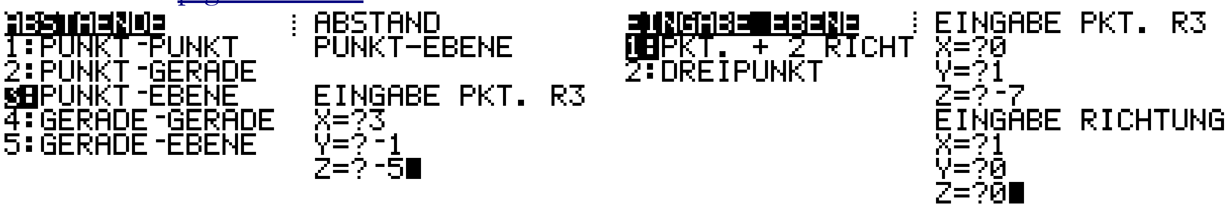
nach Stat-Edit-Menü und

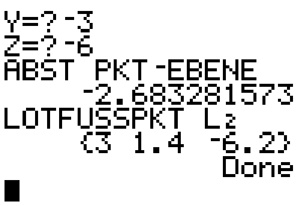


aus der Existenz der beiden Schnittpunkte kann schon auf die Existenz des Trapezes geschlossen werden, denn wie wir oben bereits sahen, sind zwei Seiten parallel.
Aus dem oben stehenden ergibt sich für die Grundseiten der Dreiecke: $\overline{CA} = \sqrt{70}$ und $\overline{S_{AB}S_{BC}} = \frac{\sqrt{70}}{3}$. Außerdem muss nach dem Strahlensatz das gleiche Teilverhältnis 1:3 für die Höhen vorliegen. Für die Flächeninhalte ergibt sich dann $F_{ABC}:F_{SAB\,B\,SBC} = 1:9$

d) $h = g_{AC}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Wie bereits oben bemerkt, sind die Geraden h und g_a mindestens parallel, wenn nicht gar identisch[3].
Da A $\notin g_a$ für irgendein $a \in \mathbf{R}$ gilt, besteht ein echter Abstand zwischen h und g_a. Wie in Teilaufgabe b) bereits bemerkt, liegen alle Geraden g_a in einer Ebene E. Der minimale Abstand ist als der Abstand von einem beliebigen Punkt auf h (z. B. A) zur Ebene E zu ermitteln. Kein Problem für den GTR prgmGeometri:





Eine Gleichung der gesuchten Gerade ist dann: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}4 \\ -6.2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

3 Identisch scheidet aber aus, nach dem was in der Aufgabenstellung gefragt wird.

Teil C

Gegebenes und Bezeichnungen:

- P(F1) = 0,7; P(F2) = 0,15; P(F3) = 0,15
- $P_{F1}(K) = 0{,}9$; $P_{F2}(K) = 0{,}5$; $P_{F3}(K) = 0$ (K – Klopfgeräusch)
- k(F1) = 400; k(F2) = 200; k(F3) = 100 (k – Kosten)

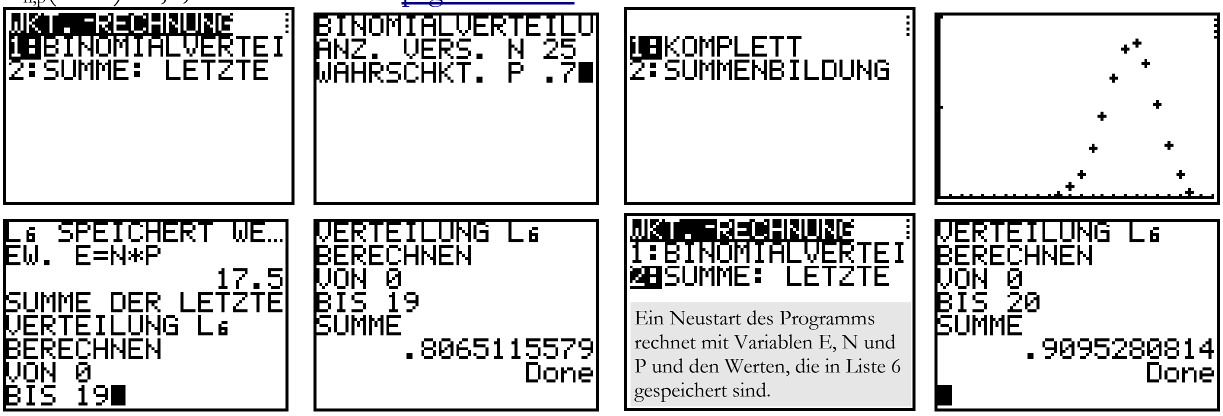
a) Anwendung des Satz von Bayes:[4]

$$P_K(F1) = \frac{P(F1)\cdot P_{F1}(K)}{P(F1)\cdot P_{F1}(K) + P(F2)\cdot P_{F2}(K) + \underbrace{P(F3)\cdot P_{F3}(K)}_{=\,0}} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}9}{0{,}7\cdot 0{,}9 + 0{,}15\cdot 0{,}5}$$

$P_K(F1) = 0{,}8936$

b) $E = P_K(F1)\cdot k(F1) + P_K(F2)\cdot k(F2) = 0{,}8936\cdot 400€ + (1-0{,}8936)\cdot 200€ = 378{,}72€$

c) Bernoullikette:
n = 25; p = P(F1) = 0,7; die Zufallsgröße ist binomialverteilt: $B_{n,p}(k)$
$B_{n,p}(X<k)>0{,}9$; weiter mit GTR prgmWarsche:



Es sollten mindestens 20 Ersatzteile eingelagert werden, um mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit keine Nachbestellung in Auftrag geben zu müssen.

d) Folgende Überlegung entspricht dem Zeichnen eines Baumdiagramms: Beim Entnehmen des ersten Bauteils ist es egal (Wahrscheinlichkeit ist 1), welche Maschine dieses herstellte. Beim Zweiten gibt es noch 5 von 6 „günstigen" Maschinen. Beim Dritten noch 4 von 6 und zuletzt noch 3 von 6. Das führt zur Aussage: Die Wahrscheinlichkeit, das vier unterschiedliche Maschinen die Bauteile produzierten beträgt 0,2778.

e) Normalverteilung mit $\mu = 50000$ und $\sigma = 10000$: $\Phi_{\mu,\sigma}(X<45000)$

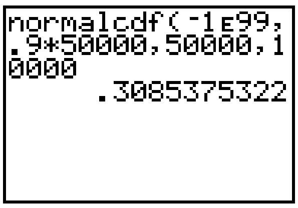


Abbildung 2: ab TI-83

Teil D1

a) Die Werte für p sind auf der y-Achse abzulesen, denn es gilt $f_p(0)=p$: $p \in \{1, 2, 4, 6\}$

4 Wie so häufig in der Stochastik, kommt es auf genaues lesen des Textes an.

Achsensymmetrie liegt vor, denn $f_p(x) = f_p(-x)$, da nur gerade Potenzen von x im Funktionsterm vorkommen.

b) Eine solche Fläche existiert, wenn der Graph mindesten zwei Nullstellen hat.

$\frac{p}{4} z_N^2 - 3 z_N + p = 0$ (Ersetzung von x_N^2 durch z_N)

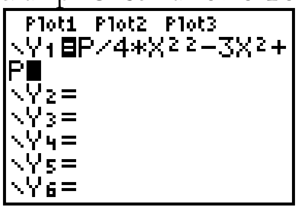
$z_{N_{1/2}} = \frac{6}{p} \pm \frac{2}{p} \cdot \sqrt{9 - p^2}$ und $x_{N_{1,2,3,4}} = \pm \sqrt{z_{N_{1/2}}}$

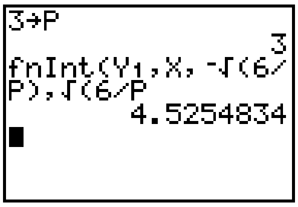
Zwei Lösungen für z und 4 Lösungen für x gibt es offensichtlich[5] nur für p < 3.

Zur Berechnung des Flächeninhaltes spielen nur die Werte $z_{N_1} = \frac{2}{p} \cdot (3 - \sqrt{9 - p^2})$ bzw.

$x_{N_{1/2}} = \pm \sqrt{z_{N_1}}$ eine Rolle.

Für p=3 ist nur eine Teilfläche zu bestimmen:





Der Flächeninhalt A_3 ist am größten, da zum einen p ein Verschiebung entlang der y-Achse bewirkt. Große Werte für p ergeben große Flächen. Außerdem bewirkt die Verschiebung, dass die Intervallgrenzen weiter auseinander liegen. Wegen $0 < p \leq 3$, hat A_3 den größten Betrag.

c) Ortskurve der Minimumpunkte:

$P_{Min_{1/2}} \left(\pm \sqrt{\frac{6}{p}} \;\middle|\; \frac{p^2 - 9}{p} \right)$ und

Eliminierung von p (p > 0) im

Gleichungssystem: $x = \pm \sqrt{\frac{6}{p}}$, $y = \frac{p^2 - 9}{p}$

führt zu $y = \frac{3 \cdot (4 - x^4)}{2x^2}$. Auf dieser Kurve liegen alle Minimumpunkte.

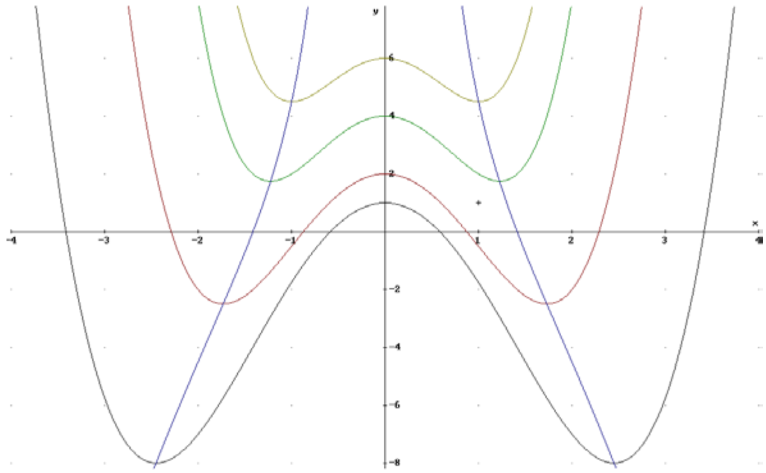


Abbildung 3: mit Ortskurve

Teil D2

a) $E_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit x-Achse:

$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ ⇒ x = a für s = 1/7 und t = ½

Nur X_a ist Schnittpunkt mit der x-Achse.

Ermittlung weiterer Durchstoßpunkte D zur Bestimmung des Volumens. Die Pyramide ist gerade.

5 Wenn man es genau nimmt, sollte man noch bemerken, dass die Wurzel $\sqrt{9 - p^2}$ stets kleiner als 3 ist und sich somit auch nur positive Werte für z ergeben.

Die Grundseite liegt in der x-y-Koordinatenebene. Die Höhe ist dann der z-Wert im Duchstoßpunkt D_z mit der z-Achse.
$D_x(a \mid 0 \mid 0)$; $D_y(0 \mid 6 \mid 0)$; $D_z(0 \mid 0 \mid 6) \Rightarrow$ Grundfläche $A_G = 6a/2 = 3a$ und

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{3} 3a \cdot 6 = 6a$$

b) x = 2; y = 2 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$z = \dfrac{4(a-3)}{a}$ für $s = \dfrac{3a-8}{a}; t = \dfrac{1}{a}$ □ Volumen des Quaders

$V_Q = 4z = 7 \Rightarrow a = \dfrac{16}{3}$

c) Kantenlänge des Würfels: b

$$\begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$b = \dfrac{3a}{a+3}$ für $s = \dfrac{5a - b(a+4)}{7a}; t = \dfrac{b}{2a}$ mit $V = b^3 = \dfrac{125}{8}$ $\Rightarrow$ a = 15

allgemein gilt:

$$V(a) = \frac{27a^3}{(a+3)^3} = \frac{a^3}{a^3} \cdot \frac{27}{1 + \underbrace{\frac{9}{a}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{27}{a^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{27}{a^3}}_{\to 0}} \quad \text{und} \quad \lim_{a \to \infty} V(a) = 27$$