Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2002/03**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Grundkursfach Mathematik

- Nachtermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung, ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{1}{2}x} \quad (x \in R)$.

a) Geben Sie die Nullstelle, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art sowie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion f an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion, deren Graph durch den Koordinatenursprung geht und im Punkt $P(2;2)$ einen lokalen Extrempunkt hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-x^2 - 4x - 8\right) \quad (x \in R)$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $Q(0;-12)$ geht.

Der Graph der Funktion f, die Parabel g mit der Gleichung $y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \quad (x \in R)$ und die Gerade $x = 2$ begrenzen im Intervall $[0;2]$ eine Fläche vollständig.
Weisen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten nach, dass der Inhalt dieser Flache $\left(\frac{20}{e} - \frac{16}{3}\right)$ beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

d) Es gibt genau eine Tangente an den Graphen der Funktion f, die zur Geraden mit der Gleichung $y = -3ex \quad (x \in R)$ parallel ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Für jede Zahl t $(t \in R, t > 0)$ ist eine Funktion f_t durch $y = f_t(x) = tx^2 e^{-\frac{1}{2}x} \quad (x \in R)$ gegeben.
Der Graph der Funktion f_t besitzt genau einen lokalen Maximumpunkt.
Zeigen Sie, dass alle diese Punkte auf ein und derselben Geraden liegen. Geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an.
Begründen Sie, dass es keine Zahl t gibt, so dass der lokale Maximumpunkt der Funktion f_t unterhalb der x-Achse liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Prisma ABCDEFGH mit rechteckiger Grundfläche ABCD durch die Punkte $A(4;1;-4)$, $B(5;7;-1)$, $C(-1;7;1)$ und $E(5{,}5;-1{,}5;0{,}5)$ gegeben. Die Strecke $\overline{AE}$ ist eine Kante des Prismas.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D.
Stellen Sie das Prisma in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
Zeigen Sie, dass dieses Prisma ein Quader ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Raumdiagonalen $\overline{EC}$ zur Diagonalen $\overline{AC}$ der Grundfläche ABCD des Quaders.

Begründen Sie, dass die Raumdiagonalen $\overline{EC}$ und $\overline{AG}$ eindeutig eine Ebene bestimmen und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Auf der Verlängerung der Kante $\overline{AE}$ über den Punkt E hinaus existiert ein Punkt K derart, dass gilt: $\left|\overrightarrow{EK}\right| = \sqrt{115}$.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes K.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Ein Punkt P teilt die Kante $\overline{AB}$ im Verhältnis 2:3. Der Punkt Q ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EF}$.
Die Strecke $\overline{PQ}$ teilt das Rechteck ABFE in zwei Trapeze.
Zeigen Sie, dass sich die Flächeninhalte dieser Trapeze wie 9:11 verhalten.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

Im ersten Quadranten des Koordinatensystems betrachten wir die Quadratfläche, die von der x-Achse, der y-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 50$ und $y = 50$ begrenzt wird.

In dieses Quadrat wird ein Kreis mit einem Durchmesser von 30,9 so eingezeichnet, dass er völlig innerhalb des Quadrates liegt. Zufällig wird ein Punkt auf die Quadratfläche „geworfen".
Dabei wird bei jedem „Wurf" die Quadratfläche getroffen. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist auf dieser Fläche gleich verteilt. Landet der „geworfene" Punkt dabei innerhalb des Kreises oder auf dem Kreisbogen, dann zählt er als „Treffer", landet er außerhalb des Kreises, dann zählt er als „Niete".

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Wurf auf die Quadratfläche einen Treffer zu erzielen, etwa 0,3 beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei zehn Würfen genau drei Treffer erzielt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 100 Würfen die Anzahl der Treffer höchstens um zwei vom erwarteten Wert abweicht.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Berechnen Sie die Anzahl der Würfe, die mindestens notwendig sind, damit die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einen Treffer zu erzielen, mindestens 95% beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

e) Jemand behauptet, mit diesem Zufallsexperiment die Zahl π näherungsweise bestimmen zu können.
Dazu führt er zunächst das Experiment 1000 mal durch. Er zählt dabei 296 Treffer.
Geben Sie einen unter Nutzung dieser Werte bestimmten Näherungswert für π an.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f durch $f(x) = 2x^2(1{,}5 - \ln x) \quad (x \in D_f)$ und g durch $g(x) = 2x(1 - \ln x)\,(x \in D_g)$.

a) Die Funktionen haben denselben größtmöglichen Definitionsbereich.
Geben Sie diesen an.
Begründen Sie anhand von mindestens zwei Eigenschaften der Graphen der Funktionen f und g, dass die Funktion g die erste Ableitung der Funktion f sein könnte.
Untersuchen Sie, ob die Vermutung zutrifft, dass die Funktion g die erste Ableitung der Funktion f ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Für jedes a $(a \in R, a > 0)$ ist eine Funktion g_a durch $g_a(x) = 2x(a - \ln x) \quad (x \in D_{g_a})$ gegeben.
Zeigen Sie, dass die Funktion g_a genau eine lokale Extremstelle x_{E_a} besitzt.
Es gibt genau einen Wert a, für den gilt: $(x_{E_a})^2 = g_a(x_{E_a})$
Berechnen Sie diesen Wert a.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Aufgabe D2: Geometrie/Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2;0;2)$, $B(3;2;-3)$, $C(-2;2;7)$ und $P_a(a;2;1)\ (a \in R)$ gegeben. Die Punkte A und B liegen auf der Geraden g.
Die Gerade g und der Punkt C bestimmen eine Ebene E.

a) Zeigen Sie, dass kein Punkt P_a auf der Geraden g liegt.
Es existieren Punkte P_a, für die die Punkte A, B und P_a ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{P_aB}$ bilden.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieser Punkte P_a.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Ermitteln Sie alle Werte a, für die der Winkel $\angle BAP_a$ stumpf ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Die Punkte A', B' und C' entstehen durch senkrechte Projektion der Punkte A, B und C in die x-y-Ebene und liegen auf dem Kreis k. Sie sind außerdem Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks.
Der Kreis k begrenzt die Grundfläche eines geraden Kreiskegels, dessen Spitze in der Ebene E liegt.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Kreiskegels.

Erreichbare BE-Anzahl: 5