

**verwendeter GTR: Casio CFX-9850G**

**Teil A Analysis**

gegeben  $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{1}{2}x} \quad (x \in \mathbb{R})$

a) - Angabe der Nullstelle

GTR:  $x_N = 0$  (oder ablesen vom Funktionsterm)

- Angabe der Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte

GTR:  $T(0;0); H(4,00;1,08)$  (Standardwerkzeuge verwenden)

- Angabe der Koordinaten des Wendepunktes

**Variante 1** direkte Lösung mit GTR: Verwendung eines Programms das zur Berechnung der WP Intervallschachtelung benutzt

$W_1(1,19;0,39); W_2(6,81;0,77)$

Vorteil: sehr schnelle Lösung ohne Rechenaufwand

Nachteil: gelieferte Lösung zu ungenau; Lage der WP muss vermutet werden, daher können mögliche Wendestellen übersehen werden

**Variante 2** Berechn. der Wendestellen aus NST der 2. Ableitung

$$f'(x) = x e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{4}x^2 e^{-\frac{1}{2}x} = \left(x - \frac{x^2}{4}\right) e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right) e^{-\frac{1}{2}x} = \left(1 - x + \frac{x^2}{8}\right) e^{-\frac{1}{2}x}$$

quadrat. Anteil der Funktionsgl. liefert Wendestellen  $x_{W1} \approx 1,17; x_{W2} \approx 6,83$

y-Koord. mit TABL GTR:  $W_1(1,17;0,38); W_2(6,83;0,77)$

Vorteil: exaktere Lösung, keine Lösungen „übersehbar“

Nachteil: aufwendige Berechnung der Ableitungen, Gefahr von Rechenfehlern

**Variante 3** Berechnung der Wendestellen aus den Extremstellen der 1. Ableitung

- Eingabe der Funktion auf Pos. 1 im Graph-Menü

- Eingabe der numerischen Ableitung auf Position 2  $Y2 = d/dx(Y1, X)$

- Anzeige des Graphen (verwendete Einstellungen  $0 \leq x \leq 10; -1 \leq y \leq 2$ ) von Y2 und

Berechnung der Extremstellen  $x_{W1} \approx 1,17; x_{W2} \approx 6,83$

- y-Koord. mit TABL GTR:  $W_1(1,17;0,38); W_2(6,83;0,77)$

Vorteil: geringer Rechenaufwand, rel. exakte Werte

Nachteil: bei ungeeigneter Intervallwahl können Lösungen übersehen werden

b) - Ermittlung einer Funktionsgleichung einer Funktion mit der Eigenschaften

1. h ist eine quadratische Funktion:  $h(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

2. h verläuft durch Koordinatenursprung:  $O(0;0) \in h : h(0) = a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0 = 0$

3. h hat bei  $P(2;2)$  einen lokalen Extrempunkt

3.1.  $P(2;2) \in h : h(2) = a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 2$

3.2.  $h'(2) = 0 : h'(x) = 2a_2 x + a_1 : h'(2) = 2a_2 \cdot 2 + a_1 = 4a_2 + a_1 = 0$

Aufstellung und Lösung des linearen Gleichungssystems aus den Beziehungen 2., 3.1., 3.2.

2.  $a_0 = 0$

3.1.  $4a_2 + 2a_1 + a_0 = 2 \quad L = \{(-0,5;2;0)\}$

3.2.  $4a_2 + a_1 = 0$

Aufstellung der Funktionsgleichung

$$h(x) = -0,5x^2 + 2x$$

c) - Nachweis einer Stammfunktion der Funktion f

Bedingung: F Stammfkt von f falls  $F'(x) = f(x)$

verwendete Ableitungsregeln: Kettenregel, Produktregel, Summenregel, konstanter Faktor

$$F'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(-x^2 - 4x - 8) + e^{-\frac{1}{2}x}(-2x - 4) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 + (-2x - 4)\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 - 2x - 4\right) = \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{1}{2}x} = f(x)$$

Ermittlung derjenigen Stammfkt die durch  $Q(0;-12)$  verläuft

Da  $F$  Stammfunktion von  $f$  ist, ist auch jede Fkt  $F_c$  mit  $F_c(x) = F(x) + c$  Stammfkt von  $f$

ges. ist diejenige Fkt  $F_c$  für die gilt:  $Q(0;12) \in F_c$ :  $F_c(0) = e^0(-0 - 0 - 8) + c = -12 \Leftrightarrow c = -4$

gesuchte Funktion:  $F_{-4}(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(-x^2 - 4x - 8) - 4$

Nachweis der Größe eines Flächeninhaltes

$$A = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^2 g(x) dx - \int_0^2 f(x) dx = [G(x)]_0^2 - [F(x)]_0^2 = \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2\right]_0^2 - [F(x)]_0^2 =$$

$$= \left[-\frac{8}{6} + 4 - (0)\right] - [e^{-1}(-4 - 8 - 8) - e^0(-8)] = -\frac{4}{3} + 4 + \frac{20}{e} - 8 = \frac{20}{e} - 4 - \frac{4}{3} = \frac{20}{e} - \frac{16}{3}$$

d) - Ermittlung einer Tangentengleichung

Bedingung: Tangente parallel zu  $y = -3ex$ . D.h.:  $m_t = f'(x_B) = -3ex_B$

Verwendung der Bedingung zur Berechn. der x-Koordinate des Berührungspunktes

$$x_B \stackrel{GTR}{\approx} -2 \Rightarrow y_B = f(x_B) \approx 5,44$$

Gl. der Tangente in Punkt-Richtungs-Form  $y - y_B = m_t(x - x_B)$ :

$$t: y - 5,44 = -8,15(x + 2)$$

e) - Untersuchung von Extrempunkten einer Funktionenschar  $y = f_t(x) = tx^2 e^{-\frac{1}{2}x}$  ( $x \in \mathbb{R}; t \in \mathbb{R}, t > 0$ )

(1) mögliche Extremstellen  $f'_t(x_E) = 0$

$$f'_t(x) = 2txe^{-\frac{1}{2}x} + tx^2\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} = 2t\left(x - \frac{x^2}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}x} = 2tx\left(1 - \frac{x}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'_t(x_E) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1. 0 = x_{E1} \\ 2. 0 = 1 - \frac{x_E}{4} \Leftrightarrow x_{E2} = 4 \\ 3. 0 = e^{-\frac{1}{2}x_E} \text{ keine Lösung} \end{cases}$$

(2) Nachweis der Art der Extrema

$$f''(x) = 2t\left[\left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} + \left(x - \frac{x^2}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}\right] = 2t\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right)e^{-\frac{1}{2}x} = 2t\left(1 - x + \frac{x^2}{8}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$f''_t(x_{E1}) = 2t > 0$  an der Stelle 0 haben alle Fktn ein lok. Minimum

$f''_t(x_{E2}) = 2t\left(1 - 4 + \frac{16}{8}\right)e^{-\frac{1}{2} \cdot 4} = -2te^{-2} < 0$  an der Stelle 4 haben alle Fktn ein lok. Maximum

Da die x-Koordinate des Extrempunktes nicht von  $t$  abhängt, müssen alle Extrempunkte auf einer Parallelen zur y-Achse liegen. Die gesuchte Gerade hat die Gleichung  $x = 4$ .

(3) y-Koordinate des Maximums

$f_t(4) = t \cdot 16 \cdot e^{-2} > 0$  Es gibt keine Funktion deren lok. Maximum unterhalb der x-Achse liegt, weil kein  $t$  existiert für das der Funktionswert negativ wird.

## Teil B: Geometrie/Algebra

gegeben: Prisma ABCDEFGH mit rechteckiger Grundfläche ABCD,  $\overline{AE}$  ist Kante des Prismas, bekannte Punkte:  $A(4;1;-4)$ ,  $B(5;7;-1)$ ,  $C(-1;7;1)$ ,  $E(5,5;-1,5;0,5)$

a) - Ermittlung der Koordinaten des Punkte D

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 4-1-5 \\ 1+7-7 \\ -4+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-2;1;-2)$$

Darst. im kartesischen Koordinatensystem wird hier nicht angegeben.

Nachweis, dass es sich bei dem Prisma um einen Quader handelt

Jedes gerade vierseitige Prisma mit rechteckiger Grundfläche ist ein Quader

Dass die Grundfläche ABCD ist Rechteckfläche ist, wird als wahr vorausgesetzt. Dann folgt aus der Konstruktion des Körpers, dass es sich um eine Prisma mit rechteckiger Grundfläche handelt.

Es muss also noch gezeigt werden, dass das Prisma gerade ist.

$$(1) \vec{AE} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 1,5 - 15 + 13,5 = 0 \Rightarrow \vec{AE} \perp \vec{AB}$$

$$(2) \vec{AE} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -9 + 0 + 9 = 0 \Rightarrow \vec{AE} \perp \vec{BC}$$

D.h. die Seitenkanten des Prismas stehen senkrecht auf der Grundfläche und somit handelt es sich um einen Quader.

b) - Berechnung des Winkels zwischen 2 Vektoren

$$\angle(\vec{CA}, \vec{CE}) = a: \vec{CA} \cdot \vec{CE} = |\vec{CA}| \cdot |\vec{CE}| \cos a \Leftrightarrow a = \arccos \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CE}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CE}|} \stackrel{GTR}{\approx} 30,04^\circ$$

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad \vec{CE} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ -8,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Begründung, dass die beiden Diagonalen eine Ebene bestimmen

Die drei Punkte A, C und E, durch die die beiden Diagonalen verlaufen, liegen nicht auf einer Geraden und bestimmen deshalb eine Ebene eindeutig.

Variante 1: Ebenenagl. in parameterfreier Form: GTR  $39,5x + 30y + 3,5z = 174$

Variante 2:  $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{CA} + s \cdot \vec{CE}$

c) - Ermittlung der Koordinaten des Punktes K

$$\sqrt{115} = |\vec{EK}| = \sqrt{(x_K - x_E)^2 + (y_K - y_E)^2 + (z_K - z_E)^2}$$

$$\text{außerdem liegt K auf der Geraden g: } \vec{x} = \vec{OE} + t\vec{AE} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} + t_K \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \\ z_E - z_A \end{pmatrix}$$

Verwendung in der Ausgangsgleichung zur Berechnung des Parameters  $t_K$

$$\begin{aligned} \sqrt{115} &= \sqrt{(x_E + t_K(x_E - x_A) - x_E)^2 + (y_E + t_K(y_E - y_A) - y_E)^2 + (z_E + t_K(z_E - z_A) - z_E)^2} = \\ &= \sqrt{(t_K(x_E - x_A))^2 + (t_K(y_E - y_A))^2 + (t_K(z_E - z_A))^2} = \\ &= \sqrt{t_K^2(x_E - x_A)^2 + t_K^2(y_E - y_A)^2 + t_K^2(z_E - z_A)^2} = \\ &= t_K \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2 + (z_E - z_A)^2} = \\ &= t_K |\vec{AE}| \Leftrightarrow t_K = \frac{\sqrt{115}}{|\vec{AE}|} = \frac{\sqrt{115}}{\sqrt{28,75}} = \sqrt{4} = 2 = t_K \end{aligned}$$

Verwendung des Parameters zur Berechnung der Koordinaten von K

$$\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ -6,5 \\ 9,5 \end{pmatrix} \Rightarrow K(8,5; -6,5; 9,5)$$

d) - Beweis eines Flächenverhältnisses von Trapezflächen

Trapez 1 ist Trapez APQE mit der Höhe  $\overline{AE} = h_1$  und den Grundseiten  $\overline{AP} = a_1; \overline{EQ} = b_1$

Trapez 2 ist Trapez APQE mit der Höhe  $\overline{BF} = h_2$  und den Grundseiten  $\overline{PB} = a_2; \overline{QF} = b_2$

nach Voraussetzung gelten folgende Beziehungen für die Trapezseiten:

$$(1) h_1 = h_2$$

$$(2) 3a_1 = 2a_2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{3}a_2$$

$$(3) b_1 = b_2$$

$$(4) c = a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \stackrel{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \frac{2}{3}a_2 + a_2 = b_2 + b_2 \Leftrightarrow \frac{5}{3}a_2 = 2b_2 \Leftrightarrow b_1 = b_2 = \frac{5}{6}a_2$$

Flächeninhalt eines Trapezes:  $A = h \cdot m = h \cdot \frac{a+b}{2}$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{h_1 \cdot \frac{a_1 + b_1}{2}}{h_2 \cdot \frac{a_2 + b_2}{2}} = \frac{h_2 \left( \frac{2}{3}a_2 + b_2 \right)}{h_2 (a_2 + b_2)} = \frac{\frac{2}{3}a_2 + \frac{5}{6}a_2}{a_2 + \frac{5}{6}a_2} = \frac{\frac{9}{6}a_2}{\frac{11}{6}a_2} = \frac{9}{11}$$

Teil C: Stochastik

gegeben: quadratische Fläche mit Seitenlänge 50 und einbeschriebener Kreisfläche mit Durchmesser von 30,9

a) - Nachweis der Trefferwahrscheinlichkeit

ZEa: „Wurf eines Punktes in die Quadratfläche“

BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

Treffer (Punkt im Kreis)  $P(t) = p$

Niete (Punkt nicht im Kreis)  $P(n) = P(\bar{t}) = 1 - P(t) = \bar{p}$

Da die Trefferwahrscheinlichkeit gleichmäßig über die gesamte Quadratfläche verteilt sein soll, kann der Wahrscheinlichkeit eines Treffers aus dem Verhältnis der Kreisfläche zur Gesamtfläche berechnet werden (Klassische Wahrscheinlichkeit).

$$P(t) = p = \frac{A_K \text{ (günstige Fälle)}}{A_Q \text{ (mögliche Fälle)}} = \frac{\frac{\pi}{4}d^2}{a^2} \approx 0,3000$$

b) - ZEb=ZEa10: 10malige Nacheinanderausführung von ZEa

ZEb ist dann eine BERNOULLI-Kette der Länge 10 mit der Erfolgswahrscheinlichkeit 0,3

ZG Xb gibt die Anzahl der Treffer bei einmaliger Ausführung von ZEb an

ZG Xb ist dann binomialverteilt mit den Parametern  $n = 10; p = 0,3$

Ereignis B: **genau 3** Treffer werden erzielt

$$P(B) = P(Xb = 3) \stackrel{GTR}{\approx} 0,2668$$

c) - ZEc=ZEa100: 100malige Nacheinanderausführung von ZEa

ZEc ist dann eine BERNOULLI-Kette der Länge 100 mit der Erfolgswahrscheinlichkeit 0,3

ZG Xc gibt die Anzahl der Treffer bei einmaliger Ausführung von ZEc an

ZG Xc ist dann binomialverteilt mit den Parametern  $n = 100; p = 0,3$

Ereignis C: Wert von Xc weicht **höchstens um 2** vom Erwartungswert  $\mu$  ab

$$P(C) = P(\mu - 2 \leq Xc \leq \mu + 2)$$

Berechnung des Erwartungswertes:  $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,3 = 30$

$$P(C) = P(30 - 2 \leq Xc \leq 30 + 2) \stackrel{GTR}{\approx} 0,4144$$

d) - ZEd=ZEan: n-malige Nacheinanderausführung von ZEa

ZEd ist dann eine BERNOULLI-Kette der Länge n mit der Erfolgswahrscheinlichkeit 0,3

ZG Xd gibt die Anzahl der Treffer bei einmaliger Ausführung von ZEd an

ZG Xd ist dann binomialverteilt mit den Parametern  $n; p = 0,3$

Ereignis D: **mindestens 1** Treffer

$$P(D) \geq 0,95$$

Ereignis  $\bar{D}$ : **höchstens 0 Treffer**

$$0,95 \leq P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P(Xd = 0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = 1 - (1-p)^n \Leftrightarrow$$

$$0,7^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n \ln 0,7 \leq \ln 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,7} \approx 8,4$$

Es müssen mindestens 9 Würfe gemacht werden.

- e) - Berechnung von p unter Verwendung des statistischen Ergebnisses 1000 Durchführungen, 296 Treffer  
relative Häufigkeit wird als Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit verwendet

$$\frac{h(t)}{n} = \frac{A_K}{A_Q} = \frac{\frac{\pi}{4} d^2}{a^2} \Leftrightarrow \pi = \frac{4a^2 h(t)}{d^2 n} = \frac{4 \cdot 50^2 \cdot 296}{30,9^2 \cdot 1000} \approx 3,1001$$

## Teil D: Wahlaufgaben

### D1: Analysis

gegeben  $f(x) = 2x^2(1,5 - \ln x)$  ( $x \in D_f$ );  $g(x) = 2x(1 - \ln x)$  ( $x \in D_g$ )

- a) - Angabe des Definitionsbereich von f und g

Da in der Aufgabenstellung lediglich gefordert wird den Definitionsbereich anzugeben, sind keine Berechnungen oder Nachweise in der Lösungsdarstellung notwendig. Die Darstellung der Ermittlung des Definitionsbereiches erfolgt hier nur aus Gründen der Nachvollziehbarkeit.

Einschränkungen durch enthaltene elementare Funktionen:  $t(x) = \ln x$ :  $x > 0$

Einschränkungen durch Art der Zusammensetzung: keine

$D_f; D_g$ :  $x \in \mathbb{R}, x > 0$

graphische Darstellung der beiden Funktionen mit GTR

1. bei  $x = 1,5$  hat die Funktion f eine lokale Extremstelle (lok. Maximum) und die Funktion g eine Nullstelle.

2. An der Nullstelle wechselt die Funktion g vom positiven in den negativen Bereich und die Funktion f von monoton steigend zu monoton fallend.

Die Funktion g spiegelt also das Monotonieverhalten der Funktion f wieder. Deshalb könnte g die 1. Ableitung von f sein.

Untersuchung, ob g 1. Ableitung von f ist

$$f'(x) = 4x(1,5 - \ln x) + 2x^2 \left( 0 - \frac{1}{x} \right) = 6x - 4x \ln x - 2x = 4x - 4x \ln x = 4x(1 - \ln x) \neq g(x)$$

Es gilt nicht  $f'(x) = g(x)$ , d.h. g ist nicht 1. Ableitung von f.

Prüfung mit GTR durch gleichzeitige graphische Darstellung der Funktion g und der numerischen Ableitung (f auf Y1, g auf Y2, 1. Ableitung von f auf Y3 d/dx(Y1,X))

gegeben  $g_a(x) = 2x(a - \ln x)$  ( $x \in D_{g_a}; a \in \mathbb{R}, a > 0$ )

- b) - Nachweis, dass  $g_a$  genau eine Extremstelle besitzt

$$g'_a(x) = 2(a - \ln x) + 2x \left( -\frac{1}{x} \right) = 2(a - 1 - \ln x)$$

$$g'_a(x_E) = 0 \Leftrightarrow 0 = a - 1 - \ln x_E \Leftrightarrow \ln x_E = a - 1 \Leftrightarrow x_E = e^{a-1}$$

Da keine weiteren Lösungen existieren, besitzt die Funktion  $g_a$  genau eine lokale Extremstelle

bei  $x_E = e^{a-1}$ .

Berechnung desjenigen a für das gilt:  $x_E^2 = g_a(x_E)$

$$\begin{aligned}(e^{a-1})^2 &= 2e^{a-1}(a - \ln(e^{a-1})) = 2e^{a-1}(a - a + 1) = 2e^{a-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &= 2e^{a-1} - (e^{a-1})^2 = (2 - e^{a-1})e^{a-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1. 0 = e^{a-1} \text{ keine Lösung} \\ 2. 0 = 2 - e^{a-1} \Leftrightarrow e^{a-1} = 2 \Leftrightarrow a - 1 = \ln 2 \Leftrightarrow a = 1 + \ln 2 \end{cases}\end{aligned}$$

## D2: Geometrie/Algebra

gegeben  $A(2;0;2)$ ,  $B(3;2;-3)$ ,  $C(-2;2;7)$  und  $P_a(a;2;1)$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), Gerade  $g$  mit  $A, B \in g$ , Ebene  $E$  mit  $g, C \in E$

a) - Nachweis, dass kein Punkt  $P_a$  auf  $g$  liegt

$$\text{Geradengleichung von } g: \vec{x} = \vec{OA} + s\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Punktprobe für  $P_a$  mit  $g$

$$a = 2 + s_x \Rightarrow s_x = a - 2$$

$$2 = 2s_y \Rightarrow s_y = 1$$

$$1 = 2 - 5s_z \Rightarrow s_z = \frac{1}{5}$$

Da  $s_y \neq s_z$  gilt, kann kein Punkt  $P_a$  die Geradengleichung erfüllen.

Ermittlung der Koordinaten desjenigen Punktes  $P_a$  für den gilt:  $|\vec{P_aA}| = |\vec{AB}|$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$$

$$\vec{P_aA} = \begin{pmatrix} 2-a \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}: |\vec{P_aA}| = \sqrt{(2-a)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 - 4a + a^2 + 4 + 1} = \sqrt{9 - 4a + a^2} = \sqrt{30} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 = 9 - 4a + a^2 \Leftrightarrow 0 = a^2 - 4a - 21 \stackrel{GTR}{\Leftrightarrow} a_1 = -3; a_2 = 7$$

$$P_{-3}(-3;2;1); P_7(7;2;1)$$

b) - Ermittlung aller Werte  $a$  für die Winkel  $\angle(BAP_a) = \alpha$  stumpf ist

$$\text{Bedingung: } a > 90^\circ \Leftrightarrow \cos a = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{AP_a}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{AP_a}|} < 0 \Leftrightarrow \vec{BA} \cdot \vec{AP_a} < 0$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{AP_a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a - 2 + 4 + 5 = a + 7 < 0 \Leftrightarrow a < -7$$

c) - Bestimmung des Volumens des geraden Kreiskegels  $KG$

$$\text{Ansatz: } V_{KG} = \frac{1}{3} A_G h; \quad A_G = A_K = \pi r^2$$

Grundfläche: Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks  $\Delta A'B'C'$

Die Eckpunkte des Dreiecks entstehen aus den Punkten  $A, B, C$  durch senkrechte Parallelprojektion in die  $x$ - $y$ -Ebene. D.h. es gilt  $z_{A'} = z_{B'} = z_{C'} = 0$

$$A'(2;0); B'(3;2); C'(-2;2)$$

Eine Skizze des Sachverhaltes zeigt, dass der rechte Winkel des Dreiecks bei  $A'$  liegt. Der Mittelpunkt des Grundkreises ist dann die Mitte der Strecke  $\overline{A'B'}$  und der Radius ist die Hälfte dieser Strecke.

$$M_{\overline{B'C'}} \left( \frac{3-2}{2}; \frac{2+2}{2} \right) = M \left( \frac{1}{2}; 2 \right); \vec{B'C'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}: r = \frac{1}{2} |\vec{B'C'}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \frac{5}{2} = r \quad (1)$$

Höhe: Die x-y-Ebene bildet die Grundfläche des Kegels. Deshalb gilt:  $h = |z_S|$  Wobei  $z_S$  die z-Koordinate die Spitze des Kegels bezeichnet.

Da es sich um einen geraden Kreiskegel handelt, liegt die Spitze senkrecht über (oder unter) dem Mittelpunkt der Grundfläche. Außerdem soll die Spitze des Kegels in der Ebene E liegen. D.h. die Koordinaten des Punktes S erhält man durch senkrechte Parallelprojektion von M in die Ebene E. D.h. zu suchen ist die z-Koordinate desjenigen Punktes der Ebene E für den gilt:

$$x_S = x_M; y_S = y_M$$

Aufstellung der einer parameterfreien Gleichung von E (aus den Punkten A, B, C mit GTR)

$$E: 4x + 3y + 2z = 12$$

$$\text{Berechnung von } z_S: 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2 + 2z_S = 12 \Leftrightarrow 2z_S = 4 \Leftrightarrow z_S = 2 \quad (2)$$

Verwendung der Werte (1) und (2) zur Berechnung der Volumens

$$V_{KG} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi 2,5^2 \cdot 2 \approx 13,1$$