Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2002/03**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Leistungskursfach Mathematik

- Ersttermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	35 BE,
im Teil B	25 BE,
im Teil C	15 BE,
im Teil D	15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes a ($a \in R$) ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = 2x \cdot \ln(x) - a \cdot x \quad (x \in D_{f_a})$ gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_a an.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen der Funktion f_a mit der Abszissenachse sowie des lokalen Extrempunktes und weisen Sie die Art des Extremums nach.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_a keine Wendepunkte besitzt.
Geben Sie die Monotonieintervalle und die Art der Monotonie der Funktion f_a in den jeweiligen Intervallen an.

Erreichbare BE-Anzahl: 11

b) Die Graphen der Funktion f_3 und ihrer Ableitungsfunktion f_3' schließen eine Fläche vollständig ein.
Bestimmen Sie deren Inhalt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Der Graph der Funktion f_2 soll im Intervall $0{,}1 \le x \le 1{,}9$ durch die Graphen der Funktionen g_1 bzw. g_2 näherungsweise beschrieben werden.
Die Funktion g_1 ist gegeben durch: $g_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - \frac{2}{3} \quad (x \in R)$.
Die Funktion g_2 ist quadratisch und ihr Graph verläuft durch die Punkte $P_1(0{,}1;\ f_2(0{,}1))$, $P_2(1;\ f_2(1))$ und $P_3(1{,}9;\ f_2(1{,}9))$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g_2.
Bestimmen Sie jeweils die maximale Abweichung der Funktionswerte $g_1(x)$ von $f_2(x)$ und der Funktionswerte $g_2(x)$ von $f_2(x)$ im vorgegebenen Intervall.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

d) Im Punkt $P(z;\ f_2(z))$ mit $z > 1$ wird an den Graphen der Funktion f_2 die Tangente t gelegt, die zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck bildet.

Bestimmen Sie den Wert z, für den der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks ein lokales Extremum besitzt.
Geben Sie den extremen Flächeninhalt sowie die Art des Extremums an.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

e) Für jedes u ($u \in R$, $u > e^{1,5}$) begrenzen der Graph der Funktion f_3, die Gerade mit der Gleichung $x = u$ und die Abszissenachse im Intervall $[e^{1,5};\ u]$ eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Wert u, für den der Inhalt dieser Fläche $0{,}5 \cdot e^3$ beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind die Ebene E durch die Gleichung $-2x+8y-16z-1=0$ und für jedes a ($a \in R$, $a > 0$) ein Punkt $P_a(-1; -a; -3a)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass kein Punkt P_a in der Ebene E liegt.
Beschreiben Sie ein mögliches Vorgehen zum Aufstellen einer Gleichung derjenigen Ebene, die den Koordinatenursprung O und den Punkt P_3 enthält sowie senkrecht auf der Ebene E steht.
Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form an.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Zeigen Sie, dass alle Punkte P_a auf ein und derselben Geraden liegen.
Untersuchen Sie die Lage dieser Geraden zu den Koordinatenebenen.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Durch den Punkt P_2 verläuft genau eine Gerade s, die bei der Spiegelung an der Ebene E eine durch den Punkt $Q(3; 1; -5)$ verlaufende Bildgerade ergibt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden s.
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und die Größe des Schnittwinkels zwischen der Original- und Bildgeraden an.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

d) Die senkrechte Parallelprojektion des Punktes P_a in jede der drei Koordinatenebenen ergibt jeweils genau einen Bildpunkt. Alle drei Bildpunkte liegen in einer Ebene E_a.
Ermitteln Sie den Wert a, für den der Punkt P_a von der zugehörigen Ebene E_a den Abstand $\frac{1}{11}\sqrt{11}$ besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil C: Stochastik

Adam hat für seinen GTR ein Spaßprogramm geschrieben, das (in Anlehnung an bekannte Bildschirmschoner) den Anfangsbuchstaben „A“ seines Namens an zufällig gewählte Stellen des Displays schreibt. Das Display seines GTR hat 8 Zeilen mit je 16 Feldern.
In jedem Feld kann genau ein Zeichen dargestellt werden. Sein Programm startet stets mit leerem Display (s. Abb. 1).

```
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
```

Abb. 1

Danach wird per Zufallsgenerator ein Feld ausgewählt und in dieses der Buchstabe „A“ geschrieben. Dieser Versuch wird insgesamt 10-mal durchgeführt.
Wird ein Feld ermittelt, in dem bereits „A“ steht, ergibt sich keine Änderung auf dem Bildschirm. Es können also bis zu 10 Buchstaben „A“ nach Programmende auf dem Display stehen (z.B. s. Abb.2).

```
----------------
-A--------------
--------A-A-----
--------------A-
---A--A---------
---------AA-----
----------------
-A-----------A--
```

Abb. 2

a) Nach einer Ausführung des Programms stehen 10 Buchstaben „A“ auf dem Display.
Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Anordnungen dieser 10 Buchstaben „A“ auf dem Display möglich sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach Programmende in der ersten Zeile wenigstens einmal ein „A“ steht.
Ermitteln Sie, wie oft das Programm durchschnittlich ein Feld in der ersten Zeile auswählt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Das Programm wird jetzt so verändert, dass es nicht nach 10 Versuchen abbricht.
Ermitteln Sie, wie viele Versuche notwendig sind, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal ein Buchstabe „A“ in der ersten Zeile steht.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) In einer weiteren Form des Programms werden drei Versuche durchgeführt. Wird dabei ein Feld ermittelt, in dem bereits ein „A“ steht, wird dieser Buchstabegelöscht.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach Programmende genau einmal der Buchstabe „A“ auf dem Display steht.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Fortsetzung Seite 5

Fortsetzung Teil C: Stochastik

Adam arbeitet in einer Firma, die einen GTR-Typ zusammenbaut.
Die Zulieferfirmen F_1 und F_2 liefern unabhängig voneinander ein bestimmtes Bauteil für diesen GTR. Andere Hersteller für dieses Bauteil gibt es nicht.
4% der Bauteile der Firma F_1 und 6% der Bauteile der Firma F_2 sind fehlerhaft. Zwei Drittel aller fehlerhaften Bauteile sind von der Firma F_1.

e) Ermitteln Sie für beide Zulieferfirmen jeweils den prozentualen Anteil an der Gesamtlieferung dieses Bauteils.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

f) Bei einer Lieferung von 2000 Stück dieses Bauteils, die alle von derselben Zulieferfirma kommen, ist durch einen Verlust des Lieferscheines nicht mehr feststellbar, welche der beiden Zulieferfirmen der Produzent war.
Folgende Entscheidungsregel wird getroffen: Sind mehr als 99 Teile fehlerhaft, wird die Lieferung der Firma F_2 zugeordnet.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung fälschlicherweise der Firma F_2 zugeordnet wird, obwohl sie in Wirklichkeit von der Firma F_1 kommt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Für jedes t ($t \in R$, $t > 0$) ist eine Funktion f_t durch $f_t(x) = \frac{x}{t} - 2 + \sin\left(\frac{x}{t}\right)$ $(x \in R)$ gegeben.

Außerdem ist eine Funktion g durch $g(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{|x|+1}}\right)$ $(x \in R)$ gegeben.

a) Geben Sie für die Funktion g die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse an.
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Für jedes t schließen der Graph der Funktion f_t, die y-Achse und der Graph der Funktion g genau eine Fläche vollständig ein.
Beschreiben Sie einen allgemein gültigen Weg, wie man überprüfen kann, ob die x-Achse diese Fläche halbiert.
Führen Sie diese Untersuchung für t = 0,5 durch.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

c) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf Monotonie.
Ermitteln Sie den größten und den kleinsten Anstieg, den die Funktion f_t hat.

Es gibt genau eine Funktion f_{t_1}, für die der maximale Anstieg 0,4 beträgt.

Ermitteln Sie das kleinste Argument x (x > 0), für das gilt: $f_{t_1}'(x) = 0{,}4$.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Beim Bau eines Pumpspeicherwerkes sollen die Punkte A am unteren und B am oberen Staubecken durch einen Tunnel verbunden werden. Aus technologischen Gründen sind zwei geradlinig verlaufende Tunnelabschnitte erforderlich, die sich in genau einem Punkt treffen.
Die Tunnelabschnitte können in einem kartesischen Koordinatensystem näherungsweise durch Geradenstücke beschrieben werden. Eine Längeneinheit entspricht zehn Meter, die z-Koordinate beschreibt die Höhe über NN.
Die Punkte A und B haben die Koordinaten A(0; 0; 3) und B(-8; 12; 19).

Die Geradenstücke haben vom Punkt A aus die Richtung des Vektors $\vec{a}$ und vom Punkt B aus die Richtung des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Für dieses Projekt werden verschiedene Varianten diskutiert.

a) In einem Projektentwurf sind für den Vektor $\vec{a}$ die Koordinaten $a_x = 1$ und $a_z = 5$ festgelegt.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem die beiden Tunnelabschnitte aufeinander treffen.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, in dem die beiden Abschnitte aufeinander treffen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Bei einem anderen Projektentwurf darf die Gesamtlänge beider Tunnelabschnitte nicht größer als 250 m sein.
Ermitteln Sie die Mindesthöhe über NN, in der die beiden Tunnelabschnitte aufeinander treffen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Bei einem weiteren Projektentwurf sollen beide Tunnelabschnitte das gleiche Gefälle haben (Unter Gefälle versteht man den Neigungswinkel gegenüber der x-y-Ebene.). Der Richtungsvektor $\vec{a}$ hat die y-Koordinate $a_y = 1$.
Berechnen Sie für diesen Fall die übrigen Koordinaten des Vektors $\vec{a}$.

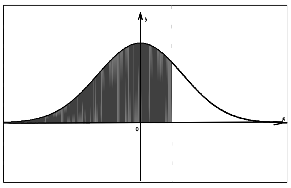
Erreichbare BE-Anzahl: 7

Materialien für Aufgaben zur Stochastik

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000