Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2003, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht werden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 12.05.03.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
- im Teil A 35 BE,
- im Teil B 25 BE,
- im Teil C 15 BE,
- im Teil D 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab[2]

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
90 BE	90-86	85-82	81-77	76-73	72-68	67-64	63-59	58-55	54-50	49-46	45-41	40-37	36-31	30-25	24-19	18-0

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

2 Der Bewertungsmaßstab ist nicht Bestandteil der Prüfungsunterlagen.

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = 2x \cdot \ln(x) - a \cdot x$ ($x \in \mathbf{D}_{f_a}$) gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_a an.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen der Funktion f_a mit der Abszissenachse sowie des lokalen Extrempunktes und weisen Sie die Art der Extremums nach.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_a keine Wendepunkte besitzt.
Geben Sie die Monotonieintervalle und die Art der Monotonie der Funktion f_a in den jeweiligen Intervallen an. Erreichbare BE-Anzahl: 11

b) Die Graphen der Funktion f_3 und ihrer Ableitungsfunktion f_3' schließen eine Fläche vollständig ein.
Bestimmen Sie deren Inhalt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Der Graph der Funktion f_2 soll im Intervall $0{,}1 \leq x \leq 1{,}9$ durch die Graphen der Funktionen g_1 bzw. g_2 näherungsweise beschrieben werden.
Die Funktion g_1 ist gegeben durch: $g_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - \frac{2}{3}$ ($x \in \mathbb{R}$).
Die Funktion g_2 ist quadratisch und ihr Graph verläuft durch die Punkte $P_1(0{,}1 \mid f_2(0{,}1))$, $P_2(1 \mid f_2(1))$ und $P_3(1{,}9 \mid f_2(1{,}9))$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g_2.
Bestimmen Sie jeweils die maximale Abweichung der Funktionswerte $g_1(x)$ von $f_2(x)$ und der Funktionswerte $g_2(x)$ von $f_2(x)$ im vorgegebenen Intervall. Erreichbare BE-Anzahl: 6

d) Im Punkt $P(z \mid f_2(z))$ mit $z > 1$ wird an den Graphen der Funktion f_2 die Tangente t gelegt, die zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck bildet.
Bestimmen Sie den Wert z, für den der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks ein lokales Extremum besitzt.
Geben Sie den extremen Flächeninhalt sowie die Art des Extremums an. Erreichbare BE-Anzahl: 8

e) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$, $u > e^{1,5}$) begrenzen der Graph der Funktion f_3, die Gerade mit der Gleichung $x = u$ und die Abszissenachse im Intervall $[e^{1,5}; u]$ eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Wert u, für den der Inhalt dieser Fläche $0{,}5 \cdot e^3$ beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind die Ebene E durch die Gleichung $-2x + 8y - 16z - 1 = 0$ und für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ein Punkt $P_a(-1 \mid -a \mid -3a)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass kein Punkt P_a in der Ebene E liegt.
Beschreiben Sie ein mögliches Vorgehen zum Aufstellen einer Gleichung derjenigen Ebene, die den Koordinatenursprung O und den Punkt P_3 enthält sowie senkrecht auf der Ebene E steht.
Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form an. Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Zeigen Sie, dass alle Punkte P_a auf ein und derselben Geraden liegen.
Untersuchen Sie die Lage dieser Geraden zu den Koordinatenebenen. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Durch den Punkt P_2 verläuft genau eine Gerade s, die bei der Spiegelung an der Ebene E eine durch den Punkt $Q(3 \mid 1 \mid -5)$ verlaufende Bildgerade ergibt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden s.
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und die Größe des Schnittwinkels zwischen der Original- und Bildgeraden an. Erreichbare BE-Anzahl: 7

d) Die senkrechte Parallelprojektion des Punktes P_a in jede der drei Koordinaten- ebenen ergibt jeweils genau einen Bildpunkt. Alle drei Bildpunkte liegen in einer Ebene E_a.

Ermitteln Sie den Wert a, für den der Punkt P_a von der zugehörigen Ebene E_a den Abstand $\frac{1}{11}\sqrt{11}$ besitzt. Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil C: Stochastik

Adam hat für seinen GTR ein Spaßprogramm geschrieben, das (in Anlehnung an bekannte Bildschirmschoner) den Anfangsbuchstaben „A“ seines Namens an zufällig gewählte Stellen des Displays schreibt. Das Display seines GTR hat 8 Zeilen mit je 16 Feldern. In jedem Feld kann genau ein Zeichen dargestellt werden. Sein Programm startet stets mit leerem Display (s. Abb. 1).

Danach wird per Zufallsgenerator ein Feld ausgewählt und in dieses der Buchstabe „A“ geschrieben. Dieser Versuch wird insgesamt 10-mal durchgeführt.
Wird ein F ermittelt, in dem bereits „A“ steht, ergibt sich keine Änderung auf dem Bildschirm. Es können also bis zu 10 Buchstaben „A“ nach Programmende auf dem Display stehen (z.B. s. Abb.2).

a) Nach einer Ausführung des Programms stehen 10 Buchstaben „A“ auf dem Display. Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Anordnungen dieser 10 Buchstaben „A“ auf dem Display möglich sind.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach Programmende in der ersten Zeile wenigstens einmal ein „A“ steht.
Ermitteln Sie, wie oft das Programm durchschnittlich ein Feld in der ersten Zeile auswählt.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Das Programm wird jetzt so verändert, dass es nicht nach 10 Versuchen abbricht.
Ermitteln Sie, wie viele Versuche notwendig sind, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal ein Buchstabe „A“ in der ersten Zeile steht.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) In einer weiteren Form des Programms werden drei Versuche durchgeführt. Wird dabei ein Feld ermittelt, in dem bereits ein „A“ steht, wird dieser Buchstabe gelöscht.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach Programmende genau einmal der Buchstabe „A“ auf dem Display steht. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Adam arbeitet in einer Firma, die einen GTR- Typ zusammenbaut.
Die Zulieferfirmen F_1 und F_2 liefern unabhängig voneinander ein bestimmtes Bauteil für diesen GTR. Andere Hersteller für dieses Bauteil gibt es nicht.
4% der Bauteile der Firma F_1 und 6% der Bauteile der Firma F_2 sind fehlerhaft. Zwei Drittel aller fehlerhaften Bauteile sind von der Firma F_1.

e) Ermitteln Sie für beide Zulieferfirmen jeweils den prozentualen Anteil an der Gesamtlieferung dieses Bauteils. Erreichbare BE-Anzahl: 3

f) Bei einer Lieferung von 2000 Stück dieses Bauteils, die alle von derselben Zulieferfirma kommen, ist durch einen Verlust des Lieferscheines nicht mehr feststellbar, welche der beiden Zulieferfirmen der Produzent war.
Folgende Entscheidungsregel wird getroffen: Sind mehr als 99 Teile fehlerhaft, wird die Lieferung der Firma F_2 zugeordnet.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung fälschlicherweise der Firma F_2 zugeordnet wird, obwohl sie in Wirklichkeit von der Firma F_1 kommt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) ist eine Funktion f_t durch $f_t(x) = x/t - 2 + \sin(x/t)$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.

Außerdem ist eine Funktion g durch $g(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{|x|+1}}\right)$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.

a) Geben Sie für die Funktion g die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse an.
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie. Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Für jedes t schließen der Graph der Funktion f_t, die y-Achse und der Graph der Funktion g genau eine Fläche vollständig ein.
Beschreiben Sie einen allgemein gültigen Weg, wie man überprüfen kann, ob die x-Achse diese Fläche halbiert.
Führen Sie diese Untersuchung für t = 0,5 durch. Erreichbare BE-Anzahl: 7

c) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf Monotonie.
Ermitteln Sie den größten und den kleinsten Anstieg, den die Funktion f_t hat.
Es gibt genau eine Funktion f_{t1}' für die der maximale Anstieg 0,4 beträgt.
Ermitteln Sie das kleinste Argument x (x> 0), für das gilt: $f_{t1}'(x) = 0,4$. Erreichbare BE-Anzahl: 6

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Beim Bau eines Pumpspeicherwerkes sollen die Punkte A am unteren und B am oberen Staubecken durch einen Tunnel verbunden werden. Aus technologischen Gründen sind zwei geradlinig verlaufende Tunnelabschnitte erforderlich, die sich in genau einem Punkt treffen.
Die Tunnelabschnitte können in einem kartesischen Koordinatensystem näherungsweise durch Geradenstücke beschrieben werden. Eine Längeneinheit entspricht zehn Meter, die z-Koordinate beschreibt die Höhe über NN.
Die Punkte A und B haben die Koordinaten A(0 | 0 | 3) und B(-8 | 12 | 19).
Die Geradenstücke haben vom Punkt A aus die Richtung des Vektors $\vec{a}$ und vom Punkt B aus die Richtung des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Für dieses Projekt werden verschiedene Varianten diskutiert.

a) In einem Projektentwurf sind für den Vektor $\vec{a}$ die Koordinaten $a_x = 1$ und $a_z = 5$ festgelegt.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem die beiden Tunnelabschnitte aufeinander treffen.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, in dem die beiden Abschnitte aufeinander treffen.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Bei einem anderen Projektentwurf darf die Gesamtlänge beider Tunnelabschnitte nicht größer als 250 m sein.
Ermitteln Sie die Mindesthöhe über NN, in der die beiden Tunnelabschnitte aufeinander treffen.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Bei einem weiteren Projektentwurf sollen beide Tunnelabschnitte das gleiche Gefälle haben (Unter Gefälle versteht man den Neigungswinkel gegenüber der x-y-Ebene.). Der Richtungsvektor $\vec{a}$ hat die y-Koordinate $a_y = 1$.
Berechnen Sie für diesen Fall die übrigen Koordinaten des Vektors $\vec{a}$. Erreichbare BE-Anzahl: 7

Lösungsvorschläge

Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
Ansatz für Koordinaten des Schnittpunktes: $f(x0)=0$
Koordinaten des Schnittpunktes mit der Abszissenachse: $S_x(e^{0,5a} \mid 0)$
1. Ableitung: $f_a'(x) = 2 \cdot \ln(x) - a + 2$
2. Ableitung: $f_a''(x) = 2/x$
Extremstelle: $x_E = e^{0,5a-1}$
Nachweis der Art des Extremums: $f_a''(x_E)>0$ wegen $x_E>0$
Koordinaten des lokalen Minimumpunktes: $P_{Min}(e^{0,5a-1} \mid -2e^{0,5a-1})$
Nachweis der Nichtexistenz von Wendepunkten: $f_a''(x)>0$ wegen $x>0$
erstes Monotonieintervall: z. B.: für x mit $0 < x \leq e^{0,5a-1}$ monoton fallend
zweites Monotonieintervall: z. B.: für x mit $e^{0,5a-1} \leq x$ monoton wachsend 11 BE

b) Schnittstellen: $x_1 = 0,5311$ und $x_2 = 5,5763$
Ansatz für Flächeninhalt: $\int_{x_1}^{x_2} f_3'(x) - f_3(x)\,dx$
Flächeninhalt A: $A \approx 12,7$ 3 BE

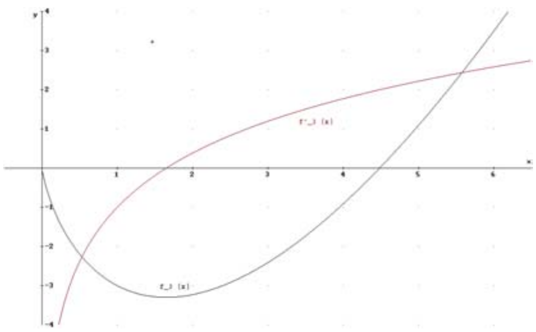
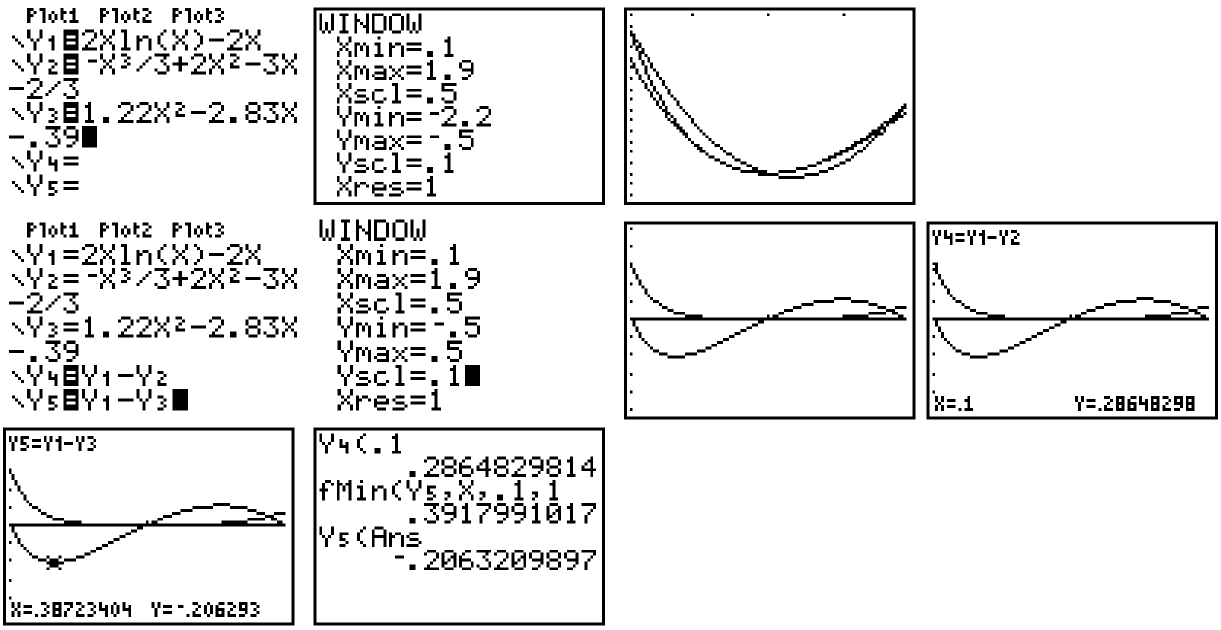
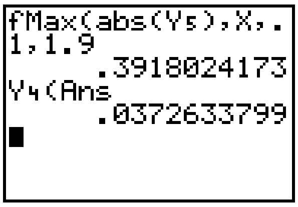


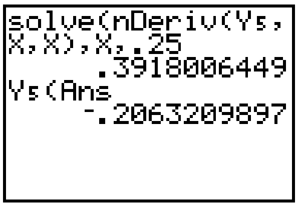
Abbildung 1

c) Ansatz für Gleichung der Funktion g_2:
g2: $y = ax^2 + bx + c$
I: $f(0,1) = a(0,1)^2 + b(0,1) + c$
II: $f(1) = a + b + c$
III: $f(1,9) = a(1,9)^2 + b(1,9) + c$
Gleichung der Funktion g_2: z. B.: $g_2(x) = 1,22x^2 - 2,83x - 0,39$
Ansatz für maximale Abweichung von g_1 zu f_2



oder





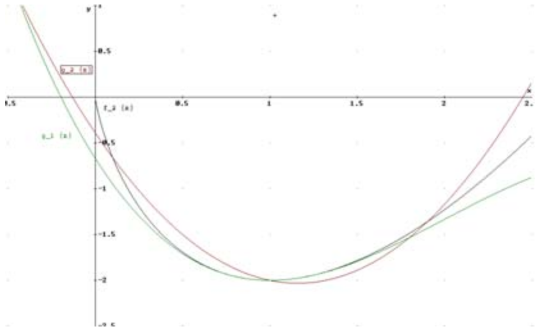
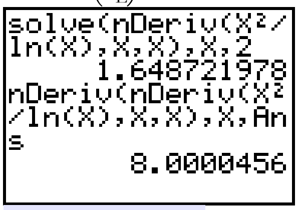


Abbildung 2

maximale Abweichung von g_1 zu f_2: d ≈ 0,29
Ansatz für maximale Abweichung von g_2 zu f_2
maximale Abweichung von g_2 zu f_2: d ≈ 0,21 6 BE

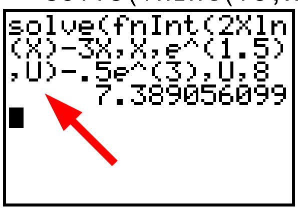
d) Ansatz für Gleichung der Tangente:
$t_z(x) = f_2'(z)(x-z) + f_2'(z)$
Gleichung der Tangente: $t_z(x) = 2 \ln(z)\, x - 2z$
Nullstelle der Tangente: $x_0 = 2/\ln(z)$
Ansatz für Zielfunktion: $A(z) = ½\, x_0\, f_2'(z)$
Zielfunktion: $A(z) = z^2/\ln(z)$
nach den Regeln der Kunst $A'(z_E) = 0$ → GTR: `solve(nDerive(A(z),z,z),z, 2)`
und $A''(z_E) = ?$[3] → GTR: `nDerive(nDerive(A(z),z,z),z,zE)`



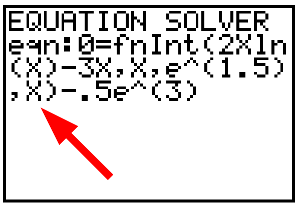
Wert z: z ≈ 1,65
Art des Extremums: lokales Minimum
minimaler Flächeninhalt A: A ≈ 5,44 8 BE

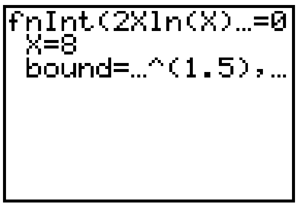
e) Ansatz für Flächeninhalt: $A(u) = \int_{e^{1.5}}^{u} f_3(x)\,dx$

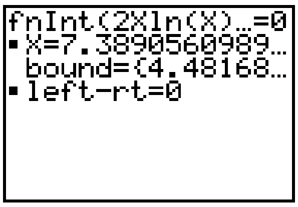
Ansatz für Wert u: $A(u) = ½\, e^3$
Den Rest kann der Taschenrechner erledigen: Verwendet wird die Nullstellenberechnung mit `solve`, der Umformung $A(u) - ½\, e^3 = 0$ und das Integrieren mit `fnInt`
→ `solve(fnInt(f3,x,e^1.5,u)-.5e^3,u,Startwert)`



Der Solver kann leider nur nach x-Werten suchen:







Wer unbedingt selbst integrieren möchte:
Ansatz für partielle Integration
partielle Integration
Stammfunktion: $F_3(x) = x^2 \ln(x) - 2x^2$
Flächeninhalt A(u): $A(u) = u^2 \cdot \ln(u) - 2u + ½e^3$

3 Wichtig ist, zu beachten, dass der eigentlich negative Wert für A(z) ohne Beachten des Vorzeichens zu einer falschen Aussage führt.

Wert u: u = e² 7 BE
35 BE

Teil B

a) Ansatz für Nachweis: P_a in E
Nachweis: -2(-1) + 8(-a) – 16(-3a) = 1 ⇒ a < 0 und das steht im Widerspruch zu a>0
Aussage zum Stützvektor der Ebene
Aussage zu einem Richtungsvektor
Aussage zum zweiten Richtungsvektor und zum Aufstellen der Gleichungkurz:
$E_1: \vec{x} = \vec{O} + s\cdot\vec{OP_3} + t\cdot\vec{n}$ mit $\vec{n}$ ist Normalenvektor von E oder $\left(\vec{n}\times\vec{OP_3}\right)\cdot\vec{x} = 0$
Gleichung der Ebene: 60x + y - 7z = 0 6 BE

b) Gleichung der Geraden bzw. Ansatz für Nachweis: die Punkte sind leicht in eine Gerade zu überführen: $P_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - a\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \quad (a>0)$

Nachweis: $P_a \in \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \quad (s\in\mathbb{R})$

Aussage zur Lage bzgl. x-y-Ebene
Aussage zur Lage bzgl. y-z-Ebene
Aussage zur Lage bzgl. x-z-Ebene:
P_a schneidet die x-Achse bei x = -1 und ist echt parallel zur y-z-Ebene. 5 BE

c) Hier sei mir eine kurze Abschweifung erlaubt. Wer schon einmal Billard gespielt hat, kennt die Standardaufgabe der Spiegelung – nämlich mit einer Kugel über Bande eine andere Kugel treffen zu müssen.
Die Lösung ist simpel[4] und die zugrunde liegende Idee sollte bei der folgenden Aufgabe nicht vergessen werden.
Ansatz für Spiegelung: mein Plan

1. Spiegle z. B. Q → Q'
2. bilde Gerade $g_{P2Q'}$
3. finde S = $g_{P2Q'} \cap E$
4. berechne Winkel zwischen Normalenvektor von E und Richtungsvektor von $g_{P2Q'}$

Die Spieglung kann der GTR übernehmen:
prgmGeometrie[5]:

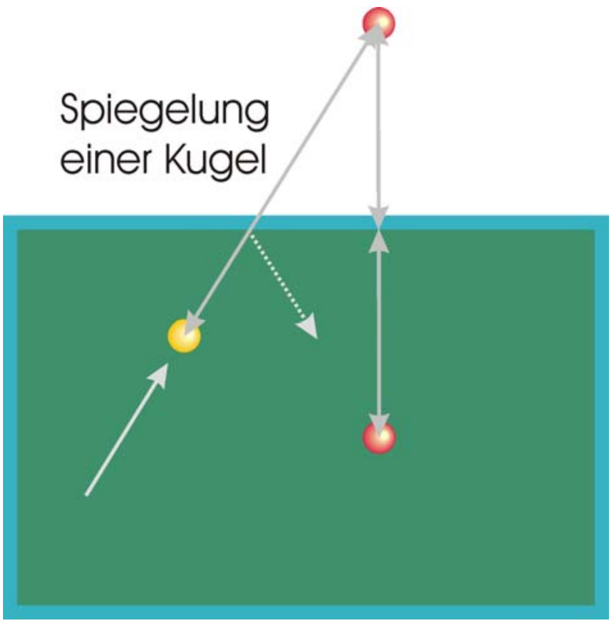
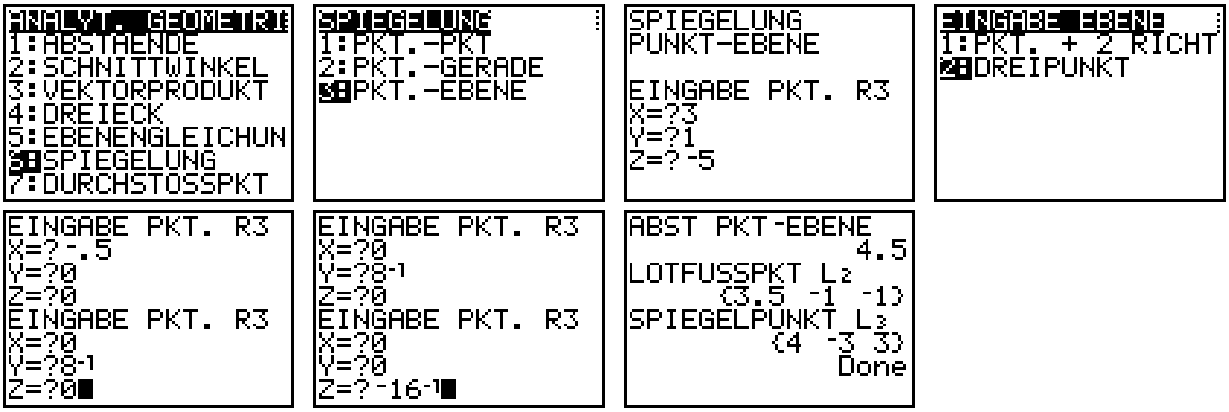


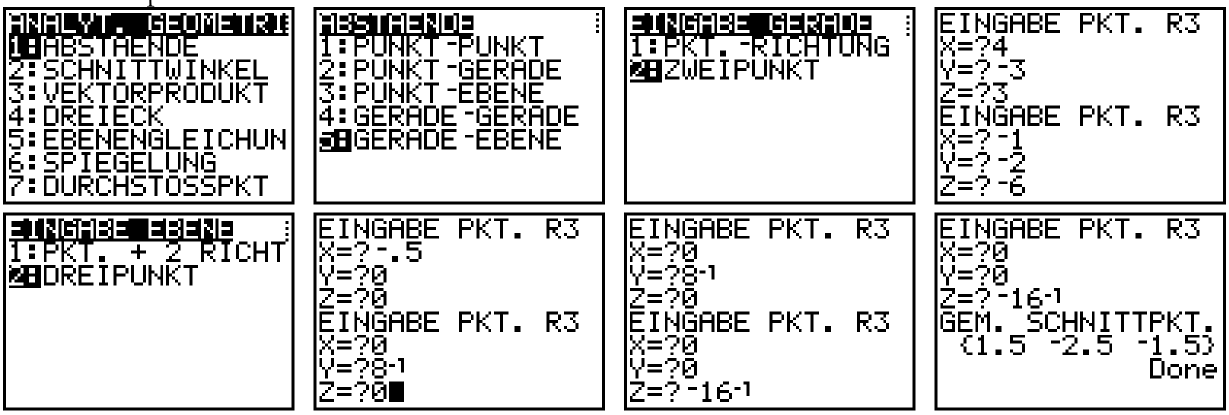
Abbildung 3

---

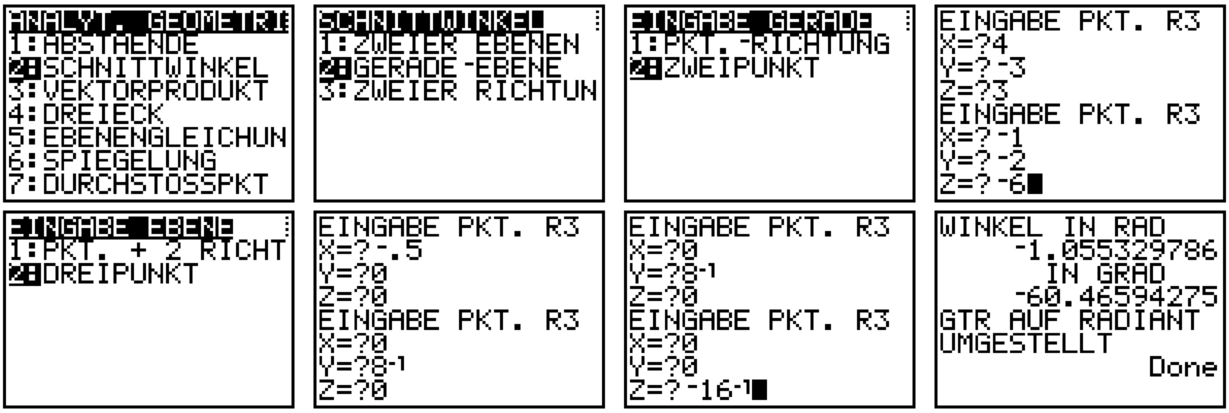
4 Ein Laie wird damit vermutlich treffen können.
5 Da im Programm Geometrie keine Ebenen in Koordinaten- oder Normalenform eingegeben werden können, wurden die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bestimmt und zur Eingabe in der Dreipunktform verwendet.



und Schnittpunkt der Geraden mit E



Winkel zwischen Gerade und E



Koordinaten des Lotfußpunktes
Koordinaten des Bildpunktes des Punktes P_2
Gleichung der Bildgeraden
Koordinaten des Schnittpunktes S: S(1,5 | 2,5 | 1,5)

Gleichung der Geraden s, z. B.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ -0,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$

Größe des Schnittwinkels α: $\alpha \approx 59{,}1° = 180° - 2 \cdot 60{,}4659°$ 7 BE

d) Koordinaten der drei Bildpunkte: $P_{axy}(-1 \mid -a \mid 0)$; $P_{axz}(-1 \mid 0 \mid -3a)$; $P_{ayz}(0 \mid -a \mid -3a)$

Ansatz für Gleichung der Ebene E_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -3a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3a \end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -3a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3a \end{pmatrix} = -a \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ und der Normalenform: $$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Gleichung der Ebene E_a: 3ax + 3y + z = -6a

Ansatz für Abstand: $$d(a) = \left| \frac{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ -3a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} \right| = \left| \frac{-3a}{\sqrt{10+9a^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

möglich ist auch ein Ansatz über das Volumen der Pyramide $P_{P_{axy}, P_{axz}, P_{ayz}, P_a}$ durch $V_P = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{6} V_{Quader}$

mit $V_Q = 3a^2$; $A_G = \frac{\sqrt{10a^2 + 9a^4}}{2}$ und $h = \frac{V_Q}{2A_G} = \frac{1}{\sqrt{11}}$

Abstand in Abhängigkeit von a
Ansatz für Wert a
Wert a: a = 1/3 — 7 BE

25 BE

Teil C

a) Ansatz für Anzahl: $\binom{8 \cdot 16}{10}$
Anzahl n der Anordnungen: n ≈ 2,27 ·10^{14} — 2 BE

b) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: Die Zufallsgröße ist binomialverteilt mit den Parametern n = 16 und p = 1/8

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{10}$$

Wahrscheinlichkeit: P(X ≥ 1) ≈ 0,7369
Erwartungswert: E(X) = 1,25 — 3 BE

c) Ansatz für Anzahl:
X sei die Zufallsgröße, die beschreibt, wie viel „A“ bei n Versuchen in der 1. Zeile stehen.
$P(X>0) \geq 0{,}99 \Rightarrow P(X=0) = (7/8)^n \leq 0{,}01 \Rightarrow n \geq 34{,}5$
Anzahl n der Versuchsdurchführungen: n = 35 — 2 BE

d) Erkennen der möglichen Fälle:
Ein „A“ wird an eine beliebige Stelle geschrieben (p_1 = 1), dann wird
   a) dieses „A“ gelöscht (p_{22} = 1/128) und erneut ein „A“ an beliebige Stelle geschrieben (p_{23} = 1) oder
   b) es wird ein „A“ auf eine freie Stelle geschrieben (p_{32} = 127/128) und eines der beiden „A“ getroffen (p_{33} = 2/128)

Ansatz für Wahrscheinlichkeit: p = 1 ·(1/128 + 127/128 · 2/128)
Wahrscheinlichkeit für genau ein „A“: p ≈ 0,0233 — 3 BE

e) Analyse des Zufallsversuches:
X beschreibe, welche Firma das Teil herstellt und Y beschreibe, ob das Teil fehlerhaft ist (F) oder nicht ($\overline{F}$).
Gegeben sind folgende Größen: $P_{X=F1}(Y=F) = 0{,}04$; $P_{X=F2}(Y=F) = 0{,}06$; $P_{Y=F}(X=F_1) = 2/3$
Ansatz, z. B. über Satz von BAYES oder den entsprechenden Baumdiagrammen:

I: $P(X=F_1) \cdot P_{X=F1}(Y=F) = P_{Y=F}(X=F_1) \cdot P(Y=F) = P(F \cap F_1)$

II: $P(X=F_2) \cdot P_{X=F2}(Y=F) = P_{Y=F}(X=F_2) \cdot P(Y=F)$

gesucht ist das Verhältnis $\frac{P(X=F_1)}{P(X=F_2)} = \frac{P_{X=F_2}(Y=F) \cdot P_{Y=F}(X=F_1)}{P_{X=F_1}(Y=F) \cdot P_{Y=F}(X=F_2)} = \frac{3}{1}$

Prozentuale Anteile: F_1: 75%, F_2: 25% 3 BE

f) Ansatz für Wahrscheinlichkeit:
Die Größe ist binomialverteilt und wird über eine Normalverteilung genähert.
$n= 2000$; $p = 0{,}04$; $\mu = n \cdot p = 80$; $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$
$P_{F1}(X>99) = 1 - P_{F1}(X\leq 99) \approx 1 - \Phi(2{,}16)$
Wahrscheinlichkeit: $p \approx 0{,}015$
In Abhängigkeit vom Lösungsweg und von verwendeten Hilfsmitteln kann diese Wahrscheinlichkeit im Intervall von $0{,}0125 < p < 0{,}0155$ liegen. 2 BE

15 BE

Teil D1

a) Koordinaten des Schnittpunkts mit der y-Achse:
$S_y\,(0 \mid 0{,}54) = (0 \mid \cos 1)$
Symmetrie und Begründung: achsensymmetrisch zur y-Achse, wegen $|-x| = |x|$ 2 BE

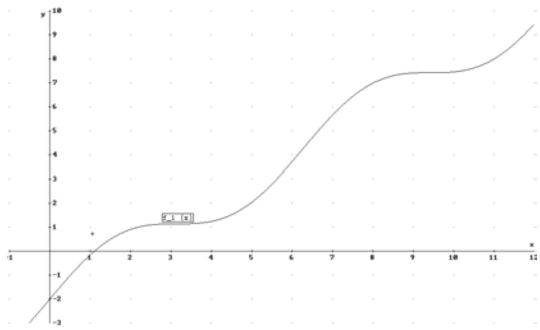


Abbildung 4

b) $f_{½}(x_0) = 0$; $f_{½}(x_S) = g(x_S)$;

$$A_1 = \left| \int_0^{x_0} f_{\frac{1}{2}}(x)\,dx \right| ;$$

$$A_2 = \left| \int_0^{x_S} f_{\frac{1}{2}}(x) - g(x)\,dx \right| \quad \text{und}$$

Überprüfung der Aussage mit
$2 \cdot A_1 \underset{?}{=} A_2$.

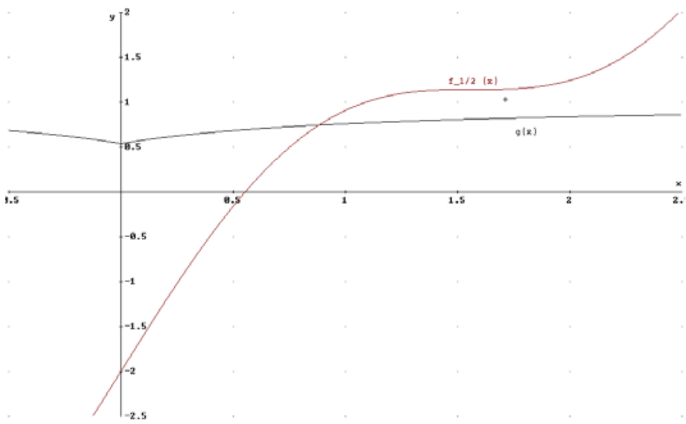


Abbildung 5

Aussage zur Ermittlung der Schnittstelle der Graphen
Aussage zum Flächeninhalt der Gesamtfläche
Aussage zur Ermittlung der Nullstelle der Funktion f_t
Aussage zur Ermittlung einer Teilfläche und zur Prüfung der Aussage
Inhalt der Gesamtfläche: $A_2 = 0{,}5243$
Inhalt einer Teilfläche: $A_1 = 0{,}9749$
Schlussfolgerung: Die Fläche wird im Fall $t = 0{,}5$ durch die x-Achse nicht halbiert. 7 BE

c) 1. Ableitung: $f_t'(x) = \frac{1}{t} \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{t}\right) + 1 \right)$

Aussage zur Monotonie: monoton wachsend, denn $1 \geq \cos(x/t) \geq -1$ und $f_t'(x) \geq 0$
kleinster Anstieg: 0 für $\cos(x/t) = -1 \Rightarrow x = (2k - 1)\,\pi t$ ($k \in \mathbb{Z}$)

größter Anstieg: 2/t für cos(x/t) = 1 ⇒ x = 2k ·πt (k ∈ ℤ)
Wert für t: t = 5 wegen 2/t = 0,4
ein maximaler Anstieg findet sich bei k=0 ⇒ x = 0
der Erste mit x > 0 ist also bei k=1 ⇒ Wert für x: x = 10π 6 BE
15 BE

Teil D2

a) $g_B(x): \vec{x} = \vec{OB} + s\vec{b} \quad (s \in \mathbb{R})$
$g_A(x): \vec{x} = \vec{OA} + t\vec{a} \quad (t \in \mathbb{R})$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 5 \end{pmatrix}$

Ansatz für Lagebeziehung: $g_A \cap g_B = S$
Werte der Parameter in den Gleichungen der Geraden: s = 24/25; t = 56/25; y = 11/2
Koordinaten des Schnittpunktes S: S(0,96 | 5,28 | 7,8)
Größe des Winkels α: α = 135° = 45° 4 BE

b) Gehen wir davon aus, dass der Punkt zwischen A und B P_t heißt. P_t ist dann von B aus über $\vec{b}$ zu erreichen: $P_t\begin{pmatrix} -8+4t \\ 12-3t \\ 19-5t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}^+)$ * außerdem soll $\left|\vec{BP_t}\right| + \left|\vec{AP_t}\right| < 25$ ** gelten. Das ergibt:

$\sqrt{50} \cdot t + \sqrt{(-8+4t)^2 + (12-3t)^2 + (16-5t)^2} < 25$ und weiter mit GTR: `solve(√50*X+√((-8+4X)^2+(12-3X)^2+(16-5X)^2)-25,X,10)` → 2,7974 und z = `19 - 5*Ans` → 5,013

Koordinaten des Schnittpunktes in Abhängigkeit von einem Parameter*
Ansatz für Länge des Tunnels**
Lösen der Gleichung
Mindesthöhe über NN: 50,1 m 4 BE

c) Beispiel in Abbildung 6 für Ansatz und Lösung:
Da der Parameter a_x nicht ausgeklammert werden kann, ändert sich mit a_x auch die Richtung des Vektors $\vec{a}$. Es ist also noch dasjenige a_x zu bestimmen, für das sich tatsächlich eins Schnittpunkt $S = g_A \cap g_B$ ergibt. Die Lösung des Gleichungssystems wie in Teilaufgabe a) ist $a_x = 0$, s = 6 und t = 2. Der Vektor heißt $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{n}\right) = \measuredangle\left(\vec{b}, \vec{n}\right) \text{ mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \left|\vec{n}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{b}\right|} \Rightarrow \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + 1 + a_z^2}} = \frac{-5}{\sqrt{50}}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 1 \\ \sqrt{a_x^2 + 1} \end{pmatrix} \quad (a_x \in \mathbb{R})$$

Abbildung 6

Gefälle der Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{b}$
Ansatz zur Berechnung des Gefälles der anderen Geraden
Zusammenhang zwischen x- und z-Koordinate des Vektors $\vec{a}$
Ansatz für Schnitt beider Geraden
Gleichung mit einer abhängigen Variablen
Wert des Parameters
gesuchte Koordinaten des Vektors: $a_x = 0$; $a_z = 1$ 7 BE
15 BE