Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2004, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 07.04.05.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und F durch $f(x) = (x + 1)^2 \cdot e^{1-x}$ ($x \in \mathbb{R}$) und
$F(x)=-e^{1-x} \cdot (x^2 + 4x + 5)$ ($x \in \mathbb{R}$).

a) Geben Sie von der Funktion f die Nullstelle, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art sowie die Koordinaten der Wendepunkte an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $2 \cdot f(x) + F(x) + f'(x) = -2 \cdot e^{1-x}$.
Jede Gerade $y = c$ ($c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$) hat mit dem Graphen der Funktion f gemeinsame Punkte.
Geben Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte in Abhängigkeit von c an.

Erreichbare BE-Anzahl: 10

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

b) Die Tangente an den Graphen der Funktion f in dem Punkt P(2 | f(2)) schneidet die x-Achse im Punkt Q und die y-Achse im Punkt R.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OQR (O ist der Koordinatenursprung).
Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = e^{1-x}$ ($x \in \mathbb{R}$).
Weisen Sie rechnerisch nach, dass sich die Graphen der Funktionen f und g in genau 2 Punkten schneiden.
Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte an.
Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$, $u > 0$) schneidet die Gerade mit der Gleichung $x = u$ den Graphen der Funktion f im Punkt M_u und den Graphen der Funktion g im Punkt N_u.
Es existiert genau ein Wert u, für den die Länge der Strecke $\overline{M_u N_u}$ maximal wird.
Ermitteln Sie diese maximale Streckenlänge. Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) begrenzen der Graph der Funktion f, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = a$ eine Fläche vollständig.
Geben Sie für a = 3,5 den Inhalt dieser Fläche an.
Untersuchen Sie, ob ein Wert a existiert, für den der Inhalt der Fläche 5e beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(5 | -2 | -3), B(2 | 2 | -3), C(-6 | -4 | -3), D(-3 | -8 | -3) und F(2 | 2 | 2) gegeben.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist. Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Die Punkte A, B, C, D und F sind Eckpunkte eines Quaders ABCDEFGH.
Geben Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte des Quaders an.
Berechnen Sie das Volumen dieses Quaders.
Stellen Sie diesen Quader in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen der Raumdiagonalen $\overline{DF}$ und der Flächendiagonalen $\overline{DB}$. Erreichbare BE-Anzahl: 6

Die Quaderkante $\overline{BF}$ und der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ liegen in der Ebene E.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form.
Begründen Sie, dass die Ebene E parallel zur z-Koordinatenachse liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Die Ebene E zerschneidet den Quader ABCDEFGH in zwei Teilkörper.
Begründen Sie, dass das Verhältnis der Volumen der beiden entstehenden Teilkörper 1:3 beträgt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfläche. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

Felix hat ein Buchstabenlegespiel erhalten. In einem Säckchen befinden sich 16 gleichartige Spielsteine. Auf jedem ist genau ein Buchstabe aufgedruckt, auf sieben Steinen der Buchstabe A, auf vier der Buchstabe L, auf drei der Buchstabe T und auf zwei der Buchstabe R.
Felix probiert verschiedene Spielvarianten aus.

a) Bei der ersten Spielvariante zieht Felix ohne Zurücklegen drei Steine. Er legt diese, die aufgedruckten Buchstaben lesbar, von links beginnend auf den Tisch.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass die gezogenen Buchstaben das Wort "RAT" bzw. das Wort "AAL" ergeben. Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Bei der zweiten Spielvariante zieht Felix mit einem Griff drei Steine.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse an:
Ereignis A: Auf genau einem der gezogenen Steine steht der Buchstabe A.

Ereignis B: Auf mindestens zwei der gezogenen Steine steht ein Konsonant.
Ereignis C: Auf höchstens zwei der gezogenen Steine steht der Buchstabe R.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Nun zieht Felix einen Spielstein, schaut sich den aufgedruckten Buchstaben an und legt ihn wieder in das Säckchen. Diesen Vorgang wiederholt er beliebig oft.
Ermitteln Sie, wie viele Steine Felix mindestens ziehen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einen Stein mit dem Buchstaben A zu erhalten.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Bei einer weiteren Spielvariante gibt Felix noch zusätzlich 4 Spielsteine mit dem aufgedruckten Buchstaben E in das Säckchen.
Er zieht einen Stein, notiert sich den Buchstaben und legt den Stein danach wieder in das Säckchen zurück. Dies führt er insgesamt fünfmal durch.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis D: Es wurde höchstens zweimal der Buchstabe L notiert.
Ereignis E: Aus den notierten Buchstaben kann man das Wort "TALER" bilden.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=x+3+\frac{3}{x-1}$ $(x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f an.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Die beiden Teile des Graphen der Funktion f können durch Drehung ineinander überführt werden.
Beschreiben Sie eine Möglichkeit, die Koordinaten des Drehzentrums Z zu ermitteln.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes Z an. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Eine Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen der Funktion f in den Punkten A und B mit $\overline{AB}=\sqrt{13}$.
Eine weitere Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen der Funktion f in den Punkten C und D.
A, B, C und D sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Parallelogramms. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1 | -3), B(6 | -3), C(5 | 1) und D(2 | 1) gegeben.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes sind.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes. Erreichbare BE-Anzahl: 3

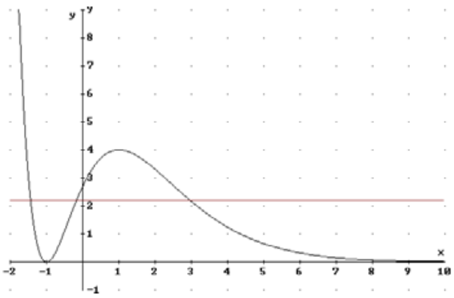
b) Außer dem Punkt D gibt es genau einen weiteren Punkt P, für den das Viereck ABCP ein gleichschenkliges Trapez, aber kein Parallelogramm ist.
Geben Sie Bedingungen an, die gemeinsam die Lage des Punktes P eindeutig festlegen.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Dem Trapez ABCD sei ein Quadrat so einbeschrieben, dass zwei Eckpunkte des Quadrats auf der Seite AB des Trapezes und die anderen Eckpunkte des Quadrats auf den Schenkeln des Trapezes liegen.
Ermitteln Sie die Seitenlänge des Quadrats. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Lösungsvorschläge

Teil A

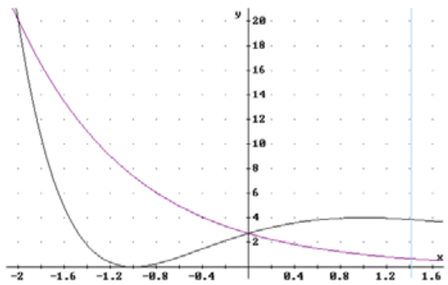
a) Nullstelle: $x_0 = -1$
Koordinaten der Extrempunkte: $P_1(-1 \mid 0)$; $P_2(1 \mid 4)$
Art der Extrema
Wendestellen
Koordinaten der Wendepunkte: $P_{W1}(-0{,}41 \mid 1{,}41)$; $P_{W2}(2{,}41 \mid 2{,}83)$
1. Ableitung der Funktion f: $f'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{1-x}$
Ansatz für Nachweis: $2 \cdot f(x) + F(x) + f'(x) = -2 \cdot e^{1-x}$
Nachweis
$f(x) = c \Rightarrow$ wie aus Skizze hervorgeht, können zwischen 1 und 3 Schnittpunkte auftreten;
1 Schnittpunkt $\Leftrightarrow$ $c > 4$ bzw. $c = 0$ (x-Achse ist Asymptote)
2 Schnittpunkt $\Leftrightarrow$ $c = 4$
3 Schnittpunkt $\Leftrightarrow$ $0 < c < 4$



Aussage zu einem Fall der Lagebeziehung
Aussage zu allen Fällen der Lagebeziehung 10 BE

b) Gleichung der Tangente: $t(x) = \frac{3}{e} x - \frac{15}{e}$
Ansatz für Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \; x_0 \cdot t(0)$ mit $t(x_0) = 0$
Flächeninhalt: $A = \frac{75}{2} e^{-1} \approx 13{,}80$ 3 BE

c) Ansatz für Nachweis: $f(x) = g(x)$
Nachweis: $f(x) - g(x) = 0 = x \cdot (x + 2) \cdot e^{1-x}$
hat genau 2 Lösungen; entweder wird der erste oder zweite Faktor null; der dritte wird es nie
Koordinaten der Schnittpunkte: $S_1(-2 \mid e^3)$; $S_2(0 \mid e)$
Zielfunktion: $d(u) = f(u) - g(u)$
GTR: `solve(f(X)-g(X),X,3)` $\rightarrow \sqrt{2}$
$d(\sqrt{2}) \approx 3.1909$



Maximale Streckenlänge: $\overline{N_u M_{uMax}} \approx 3{,}19$ 5 BE

d) Ansatz für Nachweis der Stammfunktion: $F'(x) = f(x)$
Nachweis
Inhalt der Fläche für a = 3,5; $A \approx 11{,}03$

Ansatz für Fläche: $\int_0^a f(x)\,dx = 5e$

Umwandlung zur Nullstellenberechnung mit GTR: $\int_0^a f(x)\,dx - 5e = 0$

GTR:
`solve(fnInt(f(X),X,0,A)-5e^1,A,15)` $\rightarrow$ 40.17 (nach sehr langer Rechenzeit – und das sollte einen Verdacht wecken)
`solve(fnInt(f(X),X,0,A)-5e^1,A,30)` $\rightarrow$ 35,45 (mit TI82)

Flächeninhalt in Abhängigkeit von a: $\int_0^a f(x)\,dx = 5e - e^{1-a}(a^2 + 4a + 5) = 5e$

Ansatz zur Untersuchung: $0 = e^{1-a} \underbrace{(a^2 + 4a + 5)}_{\neq 0}$

hat nur für $a \to \infty$ einen Sinn[2] $\lim_{a\to\infty} e^{1-a}\left(a^2+4a+5\right)=0$

Schlussfolgerung: im Bereich der reellen Zahlen existiert kein Wert für a 7 BE

25 BE

Teil B

a) zB.: $\vec{AB}=\vec{DC}$ und $|\vec{AB}|=|\vec{AD}|$ und $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=0$
oder Diagonalen sind gleich lang, senkrecht und halbieren einander[3]
oder **alle** Seiten sind gleich lang und ein Winkel ist 90°
Ansatz für Seitennachweis
Seitennachweis
Winkelnachweis 3 BE

b) Stellt sich die Frage, zu welchem Eckpunkt gehört F? Aus der Beschriftung folgt B; aufgrund der besonderen Lage der Grundfläche des Quaders ist auch auf B zu schließen; würde der Quader schräg liegen, könnte der GTR helfen: zB.: `pgmGeometri <Abstände> <Punkt-Ebene>` und Eingabe von F, E_{ABC} → Lotfußpunkt L (2 | 2 | -3) = B
Koordinaten der fehlenden Punkte: E(5 | -2 | 2), G(-6 | -4 | 2), H(-3 | -8 |2)
Ansatz für Volumen
Volumen: V=250
zeichnerische Darstellung
Ansatz für Winkel
Größe des Winkels: $\alpha \approx 24{,}1°$ 6 BE

c) Koordinaten für $M_{\overline{CD}}$: = (-4,5 | -6 | -3) = M_1
GTR: `prgmGeometrie <Ebene> <Dreipunkt>` und Eingabe von M_1, B, F
Gleichung der Ebene ε: 16x – 13y = -6
Begründung: $z \in \mathbb{R}$ 3 BE

d) Begründung
die Ebene schneidet ein gerades Prisma aus dem Quader; sei a die Kantenlänge des Quaders so gilt $V_{Quader} = a^3$ und $V_{Prisma} = (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a^2)\cdot a = \frac{1}{4}a^3$; der Restkörper hat dann das Volumen $V_{Rest} = \frac{3}{4}a^3 \Rightarrow 1:3$
Ansatz für Flächeninhalt: $A = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + a^2}\cdot a$
Flächeninhalt: $A=\frac{25}{2}\sqrt{17}$ 3 BE

15 BE

Teil C

a) Wahrscheinlichkeit für „RAT“: p = 0,0125
Wahrscheinlichkeit für „AAL“: p = 0,05 2 BE

b) Wahrscheinlichkeit P(A): P(A) = 0,45
Wahrscheinlichkeit P(B): P(B) = 0,6
Wahrscheinlichkeit P(C): P(C) = 1 3 BE

c) Ansatz: n – Anzahl der Züge bis zum ersten Auftreten von A; $1 - (1 - P(A))^n > 95\%$
Anzahl der Ziehungen: mindestens 6 2 BE

d) Wahrscheinlichkeit P(D): P(D) ≈ 0,9421
Ansatz für Wahrscheinlichkeit P(E)
Wahrscheinlichkeit P(E): P(E) ≈ 0,0252 3 BE

10 BE

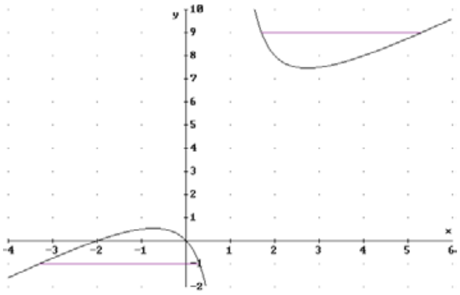
2 Und da sieht man mal wieder, dass der GTR nicht immer mathematisch sinnvolle Lösungen anzeigt.
3 Es sind immer drei Eigenschaften nachzuweisen.

Teil D1

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $\mathbf{D}_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq -1\}$
Nullstellen: $x_{01} = -2$; $x_{02} = 0$ 2 BE

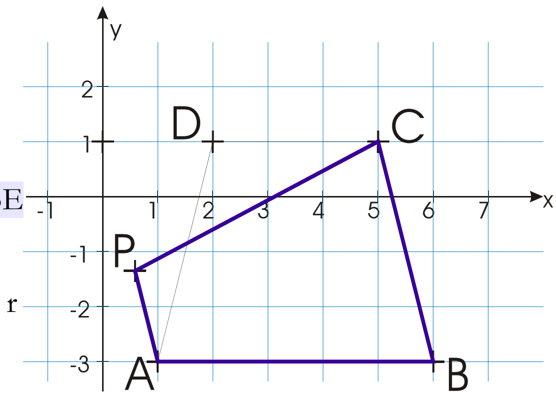
b) vollständige Beschreibung (2 BE): als Zentrum dient der Schnittpunkt der beiden Asymptoten
$x = 1$ und $y = x + 3 \Rightarrow y = 1 + 3 = 4$
Koordinaten des Drehzentrums: Z(1 | 4) 3 BE

c) Wie in der Skizze ersichtlich, ist die Breite des Prallelogramms fest: $\sqrt{13}$; die Höhe h muss man erst ermitteln; der Flächeninhalt ist dann $A = h \cdot \sqrt{13}$.
Um den x-Wert von A zu bestimmen, entnimmt man der Aufgabe: $f(x_A) = f(x_A + \sqrt{13})$.
Löst man diese Gleichung erhält man zwei Möglichkeiten:



$x_{A_1} = -\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{3}{2}$ und $x_{A_2} = -\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{7}{2}$; dabei gehört x_{A1} zu Punkt C. Die Höhen berechnet man mit $f(x_C) = -1$ und $f(x_A) = 9$; h = 10.
Ansatz
Differenz der Schnittstellen
Quadratische Gleichung
Abstand der parallelen Geraden
Flächeninhalt: $A = 10 \cdot \sqrt{13}$ 5 BE
10 BE

Teil D2



a) Nachweis für Trapez: $\vec{AB} = \frac{5}{3}\vec{CD}$ => die Seiten sind parallel[4] also ist es ein Trapez
Nachweis der Gleichschenkligkeit: $|\vec{BC}| = |\vec{AD}|$
Flächeninhalt: A = 16 wegen $A = \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 3 BE

b) Angabe der Bedingungen:
I: $\vec{OP} = \vec{OA} + r\,\vec{BC}$; wegen $\overline{AP} \| \overline{BC}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und[5] $r < 1$
II: $\overline{CP} = \overline{AB}$
I in II -> III: $|\vec{CA} + r\,\vec{BC}| = |\vec{AB}|$
III': $\left|\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right| = 5 \Rightarrow (-4 - r)^2 + (-4 + 4r)^2 = 25 \Rightarrow r = \frac{7}{17}$ oder r = 1 (entfällt)
Gleichung der Geraden der parallelen Trapezseite
Ansatz für die Koordinaten des Punktes P
Koordinaten des Punktes P: $P\left(\frac{10}{17} \middle| -\frac{23}{17}\right)$ 4 BE

4 aber nicht gleich lang
5 für r = 1 ergibt sich wieder das Parallelogramm

c) z. B.: Anwendung des Strahlensatzes

a – Kantenlänge des Quadrates

I: $\frac{\overline{BF}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{FC}}{\overline{SM}}\Rightarrow\frac{1}{2{,}5}=\frac{4}{\overline{SM}}\Rightarrow\overline{SM}=10$

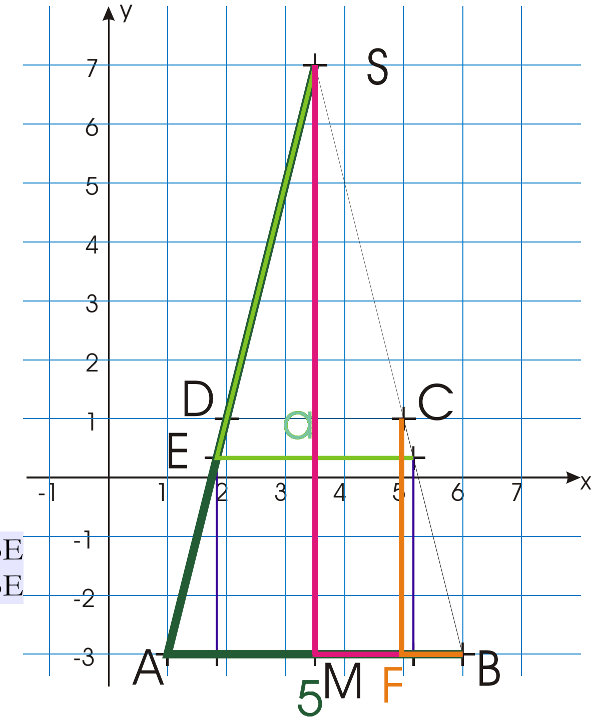
II: $\frac{\overline{SE}}{\overline{SA}}=\frac{a}{5}$

III: $\frac{a}{\overline{SM}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{SA}}$

IV: $\overline{AE}=\overline{SA}-\overline{SE}$

I und IV in III → III': $\frac{a}{10}=\frac{\overline{SA}-\overline{SE}}{\overline{SA}}=1-\frac{\overline{SE}}{\overline{SA}}$

II in III': $\frac{a}{10}=1-\frac{a}{5}\Rightarrow a=\frac{10}{3}$



Ansatz für Seitenlänge des Quadrats (2 BE)

Seitenlänge des Quadrats: 10/3 3 BE

10 BE