Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2004, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 31.05.04.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 35 BE,
im Teil B 25 BE,
im Teil C 15 BE,
im Teil D 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
90 BE	90-86	85-82	81-77	76-73	72-68	67-64	63-59	58-55	54-50	49-46	45-41	40-37	36-31	30-25	24-19	18-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jede reelle Zahl t (t > 0) ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$y = f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot (x - 2t) \cdot \sqrt{x} \quad (x \in \boldsymbol{D}_{f_t}) \quad .$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f_t an.

Weisen Sie nach, dass für die zweite Ableitung der Funktion f_t gilt: $f_t''(x) = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{3x + 2t}{4x\sqrt{x}} \right)$.

---

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

Die Funktion f_t besitzt genau einen lokalen Extrempunkt P_t.

Zeigen Sie, dass für diesen Punkt P_t gilt: $P_t\left(\frac{2}{3}t\,;-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}t}\right)$.

Untersuchen Sie die Art dieses Extremums.

Begründen Sie, dass die Funktion f_t keinen Wendepunkt besitzt. Erreichbare BE-Anzahl: 12

b) Der lokale Extrempunkt jeder Funktion f_t liegt auf dem Graphen ein und derselben Funktion.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Funktion.
Es gibt genau einen Wert t, für den der Abstand des lokalen Extrempunktes der Funktion f_t vom Koordinatenursprung $\frac{1}{12}\cdot\sqrt{73}$ beträgt.
Ermitteln Sie diesen Wert t. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Der Graph jeder Funktion f_t begrenzt mit der Abszissenachse eine Fläche vollständig.
Durch Rotation dieser Fläche um die Abszissenachse entsteht jeweils ein Körper.
Ermitteln Sie das Volumen dieses Körpers für t = 2.
Berechnen Sie den Wert t, für den das Volumen dieses Körpers 108π beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

d) Die Tangente an den Graphen der Funktion f_t im Punkt $R_t\ (2t;\ f_t\ (2t))$ und die Koordinatenachsen bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie den Wert t, für den der Flächeninhalt des Dreiecks 1 beträgt.
Berechnen Sie den Wert t, für den das Dreieck gleichschenklig ist. Erreichbare BE-Anzahl: 7

e) Der Graph der Funktion f_2 und die Abszissenachse begrenzen eine Fläche vollständig.
Für jedes b ($b \in \mathbb{R}$; $0< b < 4$) teilt die Gerade mit der Gleichung x = b diese Fläche in zwei Teilflächen.
Es gibt Werte b, für die der Inhalt einer Teilfläche doppelt so groß ist wie der Inhalt der anderen Teilfläche.
Ermitteln Sie einen Näherungswert (eine Stelle nach dem Komma) für einen solchen Wert b.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade g durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$) für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) eine Gerade h_a durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\a\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\a\\-6\end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$) sowie für jedes k ($k \in \mathbb{R}$) eine Ebene E_k durch $(6k - 3)\cdot x + 2\cdot y + (2k - 1)\cdot z = 6$ gegeben.

a) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, die die Gerade g senkrecht schneidet.
Es existiert genau ein Wert k, für den die Gerade g in der Ebene E_k liegt.
Ermitteln Sie diesen Wert k.
Zeigen Sie, dass für jeden anderen Wert k die Ebene E_k parallel zur Geraden g liegt.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen den Geraden g und h_a in Abhängigkeit vom Parameter a. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Ermitteln Sie alle Werte a, für die der Schnittwinkel zwischen der Geraden h_a und der x-y-Ebene 60° beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Die Geraden g und h_{-4} verlaufen windschief zueinander.
Es existiert genau eine Gerade, die durch den Punkt A(2; 3; 16) verläuft und die Geraden g und h_{-4} senkrecht schneidet.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden. Erreichbare BE-Anzahl: 3

e) Die Ebene E_k schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten S_{xk}, S_{Yk} und S_{zk}.
Diese drei Punkte und der Koordinatenursprung sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.
Ermitteln Sie alle Werte k ($k > \frac{1}{2}$), für die das Volumen dieser Pyramide 3/2 beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil C: Stochastik

Für die Behandlung einer speziellen Krankheit werden Tabletten verwendet, die die Form gerader Kreiszylinder besitzen. Bei jeder Tablette ist auf genau einer der beiden Kreisflächen ein Firmenlogo eingeprägt. Zur Vermeidung von Einnahmefehlern bei der gängigen "Dreiwochentherapie" erstellt der Produzent jeweils Packungen mit 21 Tabletten.
Bei der Herstellung werden die Tabletten in einen Plaststreifen eingelegt, der Vertiefungen in zwei Reihen enthält. In der ersten Reihe befinden sich 10 solcher Vertiefungen, in der zweiten 11.
Die Bestückung der Vertiefungen mit stets 21 Tabletten erfolgt zufällig. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Tablette das Firmenlogo sichtbar ist, beträgt 0,5.

a) Geben Sie die Anzahl aller verschiedenen Bestückungen an, bei denen das Firmenlogo genau zehnmal sichtbar ist.
Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Bestückungen möglich sind, bei denen das Firmenlogo in jeder der beiden Reihen mindestens viermal, insgesamt jedoch genau zehnmal sichtbar ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Berechnen Sie für eine Tablettenpackung die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Firmenlogo genau zehnmal sichtbar ist und dafür, dass das Firmenlogo höchstens viermal sichtbar ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

In einer Klinik werden ausschließlich Patienten mit dieser Erkrankung behandelt. Dabei werden nur diese Tabletten eingesetzt. In 90% aller Fälle ist die Behandlung mit diesem Medikament erfolgreich. Die Patientenkartei ist alphabetisch angelegt, unter dem Aspekt "Heilung" oder "Nichtheilung" folglich zufällig.

c) Ermitteln Sie die Anzahl der Karteikarten, die der Patientenkartei mindestens entnommen werden müssen, damit sich unter den entnommenen Karten mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine von einem Patienten befindet, bei dem das Medikament keine Heilung bewirkte.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Die Zufallsgröße Z gibt die Masse des wirksamen Bestandteils jeder Tablette in Milligramm an. Der Produzent gibt an, dass Z normalverteilt ist mit einem Erwartungswert von 100 mg und einer Standardabweichung von 2 mg.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse des wirksamen Bestandteils je Tablette mindestens 95 mg und höchstens 103 mg beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Neuere Studien haben ergeben, dass Nebenwirkungen enorm ansteigen, wenn die Masse des wirksamen Bestandteils je Tablette 101 mg überschreitet. Der Hersteller entschließt sich daher, die Technologie zu ändern. In Abhängigkeit von einem wählbaren Parameter a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) kann man erreichen, dass die wirksame Masse normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 100a Milligramm und der Standardabweichung 2a Milligramm.

e) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse des wirksamen Bestandteils 101 mg übersteigt, soll höchstens ein Tausendstel betragen.
Ermitteln Sie, wie groß der Parameter a dabei höchstens sein darf. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Betrachtet wird das Wachstum von Maispflanzen, die nach der ersten Woche (vom Aufgehen der Saat gerechnet) eine Höhe von 5,0 cm haben und nach ca. 25 Wochen geerntet werden.

a) Die durchschnittliche Pflanzenhöhe w (in cm) kann durch die Zahlenfolge (w_n) mit der Zuordnungsvorschrift $w_{n+1} = w_n \cdot (1{,}44 - 0{,}002 \cdot w_n)$; $w_1 = 5{,}0$ beschrieben werden.
Dabei sei n die Anzahl der Wachstumswochen.
Geben Sie Näherungswerte für die Folgeglieder w_2, w_3 und w_4 an.
Die allgemeine Zuordnungsvorschrift für derartige Wachstumsprozesse hat die Formel
$w_{n+1} - w_n + q \cdot w_n \cdot (G - w_n)$, w_1 $(G, q \in \mathbb{R}, q > 0)$.
(G und q sind die Maßzahlen wachstumsbestimmender Parameter.)
Zeigen Sie, dass sich die Zuordnungsvorschrift der Zahlenfolge (w_n) in dieser Form schreiben lässt.
Geben Sie die Werte G und q für den speziellen Wachstumsprozess an. Erreichbare BE-Anzahl: 4

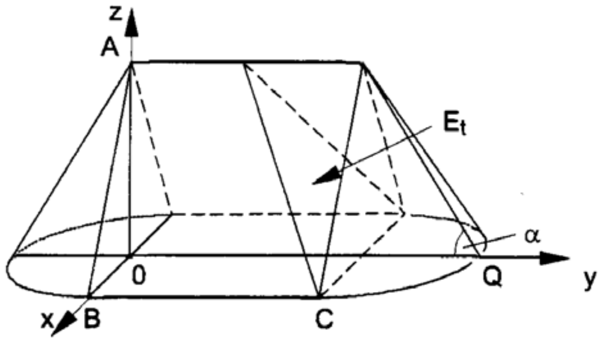
Für jeden Wert der Parameter a bzw. b soll dieser Wachstumsprozess nun durch die stetige Wachstumsfunktion h mit $w = h(t) = \dfrac{220}{1+b\cdot e^{-at}}$ $(t \in \mathbb{R}, 1 \leq t \leq 25)$ beschrieben werden, wobei h(t) der Pflanzenhöhe der Maispflanze zur Zeit t (in Wochen) entspricht.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion h folgender Gleichung genügt: $\dfrac{d}{dt}h(t) = \dfrac{a}{220}\cdot h(t)\cdot(220 - h(t))$.
(Dabei ist $\dfrac{d}{dt}h(t)$ die erste Ableitung der Funktion h(t) nach t. Sie beschreibt die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze.) Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Für einen Wachstumsprozess gelte h(5) = 20,4 und h(10) = 92,9.
Berechnen Sie Näherungswerte für die Parameter a und b (drei Stellen nach dem Komma).
Berechnen Sie für diesen Prozess die Wachstumshöhe nach 25 Wochen. Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Für einen Wachstumsprozess werden die Parameter a=0,4 und b=70 angenommen.
Eine Woche vor dem Zeitpunkt, bei dem die Pflanze die größte Wachstumsgeschwindigkeit hat, soll sie gedüngt werden.
Ermitteln Sie, nach wie vielen Wochen etwa die Düngung erfolgen muss. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra



Eine Halde hat die geometrische Form eines dreiseitigen geraden Prismas mit zwei angesetzten geraden halben Kreiskegeln. Ihre Lage in einem kartesischen Koordinatensystem wird durch die Punkte A(0;0;12), B(18;0;0) und C(18;40;0) beschrieben (siehe nicht maßstäbliche Skizze).
1 Einheit entspricht 1 Meter.

a) Ermitteln Sie die Größe des Böschungswinkels α.
Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der gesamten Halde. (Die Fläche in der x-y-Koordinatenebene gehört nicht zur Haldenoberfläche.) Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Ein Bagger trägt die Halde schichtweise vom Punkt Q aus ab.
Dabei liegt nach dem Abtragen einer vollständigen Schicht der neu entstandene Teil der Oberfläche in einer Ebene E_t mit der Gleichung 2y + 3z = 116 - 2t $(t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq 40)$.

Berechnen Sie das Volumen des abgebaggerten Materials, wenn der Punkt C in einer dieser Ebenen E_t liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 6

c) Vom Punkt P(48;20;0) aus war ein Teil der Oberfläche der ursprünglichen Halde einsehbar. Ermitteln Sie den Inhalt dieses Teils der Oberfläche. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Lösungsvorschläge

Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $D_{f_t} = \mathbb{R}_0^+$
eine Nullstelle von f_t: $x_{01} = 0$
zweite Nullstelle von f_t: $x_{02} = 2t$

Ansatz für 1. Ableitung: zum Beispiel[2] $f_t(x) = \frac{1}{t} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$

erste Ableitung: $f_t'(x) = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{3x - 2t}{2\sqrt{x}} \right)$ bzw. $f_t'(x) = \frac{3}{2t} x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$

Ansatz für Nachweis der zweiten Ableitung

Nachweis der zweiten Ableitung: $f_t''(x) = \frac{3}{4t} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$

Nachweis der Extremstelle von f_t
Nachweis der Ordinate des Extrempunktes

Untersuchung und Art des Extremums: $f_t''(x) = \underbrace{\frac{3}{4t} x^{-\frac{1}{2}}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}}_{>0}$ $\Rightarrow$ Minimum

Begründung für Wendepunkt (2 BE): $x_W = -\frac{2t}{3} \notin D_{f_t} \quad (t > 0; x \in \mathbb{R}_0^+)$

b) Ansatz für Gleichung (2 BE): $x_e = \frac{2}{3} t$ und $y_e = f_{\frac{3}{2} x_e}(x_e)$

Gleichung: $y = -\frac{4}{3}\sqrt{x} \quad x \in D_{f_t}$

Ansatz für Abstand: $d^2(t) = x_e(t)^2 + y_e(t)^2$ oder $d^2(x) = x^2 + \frac{16}{9} x$ aus Ortskurve ⇒ $x = \frac{1}{4}$

Wert t: $t = 3/8$

c) Ansatz für Volumen des Körpers für t = 2: $V = \pi \int_0^4 f_2^2(x)\,dx$ *<Gleichung 1>*

Volumen des Körpers für t = 2: $V = \frac{16}{3}\pi \approx 16{,}8$

mit GTR *<Gleichung 1>*: `Y1=X^1.5/T-2√X` und `2→T:fnInt(Y1²,X,0,2T)` → 5.3333

Ansatz für Volumen des Körpers für beliebiges t: $V = \pi \int_0^{2t} f_t^2(x)\,dx$

`solve(fnInt(Y1²,X,0,2T)-108,T,6)` → 9
oder

Stammfunktion: $\int_0^{2t} f_t^2(x)\,dx = \frac{4}{3} t^2$

Ansatz für Wert t: $V = \frac{4}{3}\pi t^2 = 108\pi$

Wert t: $t = 9$

---

2 Andere Ansätze bestehen darin, dass die Regel zur Ableitung richtig erkannt wurde.

d) Anstieg der Tangente: $m = f_t'(2t) = \sqrt{\frac{2}{t}}$

Ansatz für Tangentengleichung: 0 = m ·2t + n

Ordinate des Schnittpunktes der Tangente mit der Ordinatenachse: $n = -2\sqrt{2t}$

Ansatz für Wert t für Flächeninhalt von 1: 1 = ½ ·2t ·|n|

Wert t: t = ½

Ansatz für Wert t für Gleichschenkligkeit: 2t = |n|

Wert t: t = 2

e) Ansatz: $2 \cdot \int_0^b f_2(x)\,dx = \int_b^4 f_2(x)\,dx$ oder $\int_0^b f_2(x)\,dx = 2 \cdot \int_b^4 f_2(x)\,dx$

GTR `Y1` mit `T`→2 aus c): Rechner braucht lange

`solve(`**`2`**`fnInt(Y1,X,0,B)-fnInt(Y1,X,B,4),B,1)` → 1.1902 oder

`solve(fnInt(Y1,X,0,B)-`**`2`**`fnInt(Y1,X,B,4),B,`**`3`**`)` → 2.1475

Umformungen (3 BE): $\int f_2(x)\,dx = \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$ usw.

Wert b: b ≈ 1,2 oder b ≈ 2,1

Teil B

a) Stützvektor der schneidenden Gerade

Richtungsvektor der schneidenden Gerade

z. B.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wegen $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ senkrecht

Ansatz für Wert k: Ortsvektor von g in E_k: (6k – 3) ·2 + 2 ·3 + (2k -1) ·(-1) = 6

Wert k: k = ½

Ansatz für Nachweis der Parallelität: $g \| E_k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6k-3 \\ 2 \\ 2k-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ ⇒ für alle k erfüllt

Nachweis der Parallelität

$g \subset E_{½}$

b) Ansatz für Untersuchung der Lagebeziehung

Lagebeziehung für a = 0: parallel zu g

Ansatz zur Untersuchung der Lagebeziehung für a ≠ 0

Untersuchung der Lagebeziehung für a ≠ 0

Lagebeziehung für a ≠ 0: windschief zu g

zum Beispiel:

$g \underset{?}{\|} h_a$: $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ⇒ für a = 0 parallele Geraden

$g \underset{?}{\cap} h_a$: $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ aus x- und z-Komponente folgt: keine Lösung für a ∈ ℝ

Schlussfolgerung: die Geraden g und h_0 sind echt parallel; die Geraden g und $h_{a \neq 0}$ sind windschief.

c) Normalenvektor der x-y-Ebene: $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Ansatz für Werte a: $\sin 60°=\dfrac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\a\\-6\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{4+a^2+36}}$

Umformungen: $\sqrt{3a^2+120}=12$

Werte a: a = $\pm\sqrt{8}$

d) Ansatz für Richtungsvektor der Geraden

Variante I:

Vektorprodukt der Richtungsvektoren der Geraden g und h_{-4}: $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\0\\-4\end{pmatrix}=-4\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

Variante II:

Gleichungssystem für Ebenen gebildet aus einer Geraden und Punkt A: $i=E_{gA}\cap E_{h_{-4}A}$

Variante III:

Ein Lotfußpunkt von A auf eine der Geraden L_1(-3.1 | 3 | 14.3) bzw. L_2(-2.5 | 3 | 14.5) führen zum gesuchten Richtungsvektor

Richtungsvektor der Geraden

Gleichung der Geraden: z. B. $i:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\16\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\quad(u\in\mathbb{R})$

e) Ansatz zur Ermittlung einer Koordinate eines Schnittpunktes: y = z = 0 ⇒ x

x-Koordinate des Punktes S_{xk}: $x=\dfrac{2}{2k-1}$

y-Koordinate des Punktes S_{yk}: y = 3

z-Koordinate des Punktes S_{zk}: $z=\dfrac{6}{2k-1}$

Ansatz für Volumen der Pyramide: $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot z=\dfrac{3}{2}$ ⇒ xyz = 9

Volumen der Pyramide: $V=\dfrac{3}{2\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2}$

Wert k: k= 3/2

Teil C

a) Anzahl für genau zehnmal sichtbares Firmenlogo: 352716

Ansatz für weitere Anzahl: $C_{11}^4\cdot C_{10}^6+C_{11}^5\cdot C_{10}^5+C_{11}^6\cdot C_{10}^4$

weitere Anzahl: 282744

b) Charakterisierung der Zufallsgröße: $b_{21,½}$

erste Wahrscheinlichkeit: P(X=10) ≈ 0,1682

ab TI-83 2nd [DISTR] + 0: `binompdf(21,.5,10)` → 0.1682

zweite Wahrscheinlichkeit: P(X≤4) ≈ 0,0036

ab TI-83 2nd [DISTR] + A: `binomcdf(21,.5,4)` → 0.0036

c) Charakterisierung der Zufallsgröße: p = 0,1
ab TI-83 2nd [DISTR] + E: entweder Solver `mit eqn: geometcdf(.1,N)-.95` oder
`solve(geometcdf(.1,N)-.95,N,20)` → 29 und Kontrolle
`geometcdf(.1,{28,29})` → {.9477 .9529}
Ansatz für Anzahl: $1-(1-p)^n \geq 0{,}95 \Rightarrow n \geq 28.43$
Anzahl: 29

d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit p: $Z \sim \Phi_{\mu=100;\sigma=2}$ und $p = P(95 \leq Z \leq 103)$
ab TI-83 2nd [DISTR] + 2: `normalcdf(95,103,100,2)` → .9270
Wahrscheinlichkeit p: $p \approx 0{,}927$

e) Ansatz für Wert a: $Z' \sim \Phi_{\mu=100a;\sigma=2a}$ und
$P(Z'>101) \geq 0{,}001$ <*Gleichung 2*> ⇔ $P(Z'<101) < 0{,}999$ <*Gleichung 3*>
Variante I: nach Gleichung 3 solver oder
`solve(normalcdf(-1E99,101,100A,2A)-.999,A,.99)` → .9512
Variante II: nach Gleichung 2 solver oder
`solve(normalcdf(101,1E99,100A,2A)-.001,A,.99)` → .9512
Variante III: $\Phi_{\mu=100a;\sigma=2a}(Z'<101) > 0{,}999$
Tabelle für Standardnormalverteilung oder ab TI-83 2nd [DISTR] + 3: `invNorm(.999)` → 3.09

$$\frac{101-\mu}{\sigma} > 3.09$$

Umformungen (2 BE)
Wert a: $a \leq 0{,}95$

Teil D1

a) Näherungswerte für w_2, w_3, und w_4: $w_2 = 7.15$, $w_3 = 10.19$, und $w_4 = 14.47$
Nachweis der Äquivalenz
Wert für G: G = 220
Wert für q: q = 0,002

b) Ableitung: $h'(t) = \dfrac{220\,a\,b\,\mathrm{e}^{-at}}{(1+b\,\mathrm{e}^{-at})^2}$ <*Gleichung 4*>

Ansatz für Nachweis: $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{a}{220} \cdot \dfrac{220\,\mathrm{e}^{-at}}{1+b\,\mathrm{e}^{-at}} \cdot \left(220 - \dfrac{220\,\mathrm{e}^{-at}}{1+b\,\mathrm{e}^{-at}}\right)$ <*Gleichung 5*>

Nachweis: $h'(t) = \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$

c) Gleichungssystem
Ansatz zur Ermittlung der Werte a und b
I: $h(5) = 20{,}4 \Rightarrow b \cdot e^{-5a} = 9.7843$
II: $h(10) = 20{,}4 \Rightarrow b \cdot e^{-10a} = 1.3681$
weiter mit $\dfrac{I:}{II:} \Rightarrow \mathrm{e}^{5a} = \dfrac{9{,}7843}{1{,}3681} = 7{,}1516$ usw.
Näherungswert a: $a \approx 0{,}393$
Näherungswert b: $b \approx 69{,}973$
Wachstumshöhe: $h(25) \approx 219{,}2$ cm

d) Lösungsidee: $h''(t_e) = 0$
`solve(nDerive(h'(t),t,t),t,9)` → 10.6 oder [MATH] + 7: `fMax(h'(t),t,6,12)` → 10.6
Ansatz für Zeit
Ergebnis: nach ca. 9,6 Wochen

Teil D2

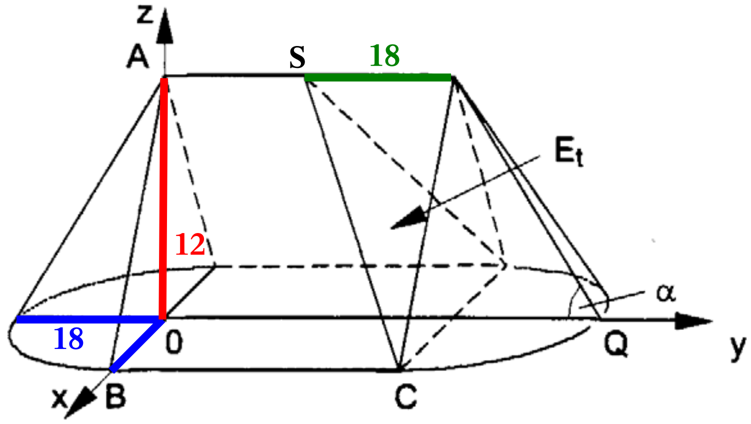


Abbildung 1

a) Ansatz für Böschungswinkel α:

$$\alpha = \arctan\frac{12}{18} = 0{,}588$$

Böschungswinkel α: α ≈ 33,7°
Ansatz für Volumen:
$V = V_{Kegel} + V_{Prisma}$
Volumen: V ≈ 12700 m³
Ansatz für Oberflächeninhalt:
$AO = A_{Kegelmantel} + A_{Seitenflächen\ Prisma}$
Oberflächeninhalt: A_O ≈ 2950 m²

b) Ansatz für Wert t: $C \in E_t$
Wert t: t = 18
Ansatz für Höhe der Pyramide: $S \in E_{18} \Rightarrow S\ (0 \mid 22 \mid 12)$
Höhe der Pyramide
Ansatz für Volumen: $V_{ab} = ½\ V_{Kegel} + V_{Pyramide}$
Volumen: V ≈ 3330 m³

c) Ansatz für Zentriwinkel α des Kreisbogens: Tangente z. B. mit Satz des Thales; Suche nach Schnittpunkten für die Kreise
k_1: $x^2 + y^2 = 18^2$
k_2: $(x-24)^2 + (y-10)^2 = 24^2 + 10^2$
führt mit GTR zu (12,2456 | -13,1918)
und α = arctan(13,1918/12,2456)
Größe des Zentriwinkels: α ≈ 47°
sichtbarer Teil der Haldenoberfläche:
A ≈ 1190 m²

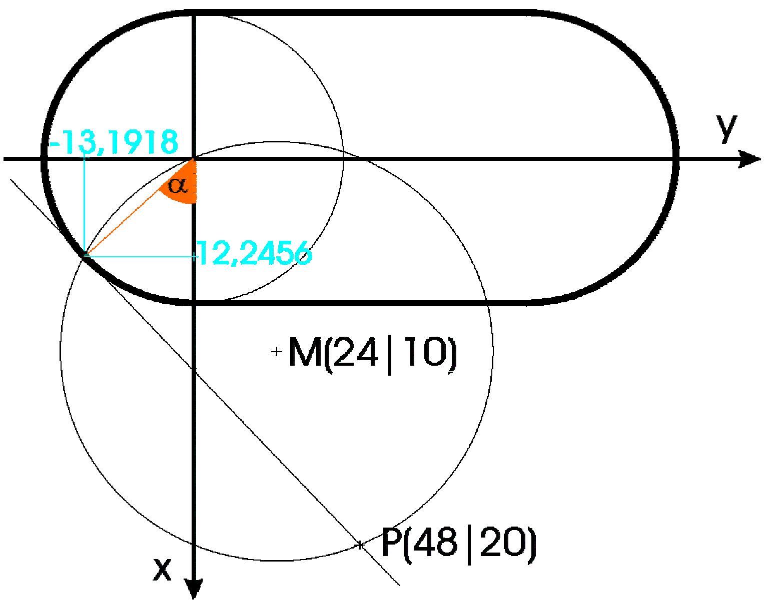


Abbildung 2: Grundriss der Halde mit P, Thaleskreis und Tangente