Schriftliche Abiturprüfung
Grundkursfach Mathematik

- E R S T T E R M I N -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Wahlaufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung y = f(x) = $-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 \quad (x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f an.

Geben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen an.

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie.

Der Graph der Funktion f besitzt genau drei lokale Extremstellen.
Berechnen Sie diese Extremstellen ohne Verwendung von Näherungswerten.

Geben Sie den Wertebereich der Funktion f an.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

b) Der Graph der Funktion f schließt im ersten Quadranten mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein.

Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Es gibt genau einen Wert b $(b \in R; 0 < b < \sqrt{6})$, für den diese Fläche von der Geraden mit der Gleichung $x = b$ halbiert wird.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für b.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Es gibt Werte u $(u \in R;\ u > 0)$, für die die Punkte $A\left(0; \frac{9}{2}\right)$, $B_u(-u; f(-u))$ und $C_u(u; f(u))$ Eckpunkte eines Dreiecks sind.

Begründen Sie, dass für $u = \sqrt{3}$ kein solches Dreieck existiert.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für u $(0 < u < \sqrt{3})$, so dass der Flächeninhalt des Dreiecks AB_uC_u maximal wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Der Graph der Funktion f besitzt genau zwei Wendepunkte. Die Tangenten an den Graphen der Funktion f in den Wendepunkten sind s und t.

Ermitteln Sie den Schnittwinkel zwischen den Tangenten s und t.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Fortsetzung Seite 3

Fortsetzung Teil A: Analysis

e) Für jede reelle Zahl a $(a \neq 0)$ ist eine Funktion g_a durch die Gleichung $y = g_a(x) = a \cdot f(x) \quad (x \in R)$ gegeben.

Ermitteln Sie den Wert a so, dass für alle Elemente y des Wertebereichs der Funktion g_a gilt: $y \in R$ und $y \geq -9$.

Die Tangenten an den Graphen der Funktion g_a in den Wendepunkten sind s_a und t_a. Bestimmen Sie alle Werte a, für die sich die Tangenten s_a und t_a rechtwinklig schneiden.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Teil B: Geometrie/Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2;-1;0)$, $B(4;3;0)$, $C(0;5;-3)$ und $D(-2;1;-3)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B, C und D in ein und derselben Ebene liegen.

Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Das Viereck ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S\left(-5;5;\frac{17}{2}\right)$ und dem Volumen V.

Zeigen Sie, dass die Pyramide gerade ist.

Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide.

Beschreiben Sie eine Möglichkeit, um die Koordinaten eines von S verschiedenen Punktes P zu ermitteln, so dass P die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche ABCD ist, deren Volumen ebenfalls V beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Betrachtet wird nun die x-y-Koordinatenebene.
In ihr ist ein Kreis k durch die Gleichung $x^2+8x+y^2-16=0$ gegeben.

c) Begründen Sie, dass der Punkt $A(2;-1)$ außerhalb des Kreises k liegt.

Der Punkt $P\left(1;\sqrt{7}\right)$ liegt auf dem Kreis k.
Zeigen Sie (ohne Verwendung von Näherungswerten), dass die Gleichung

$$y=-\frac{5}{\sqrt{7}}x+\frac{12}{\sqrt{7}}$$

eine Gleichung der Tangente an den Kreis k im Punkt P ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Susi und Tom sind zwei junge Nachwuchssportler aus Sachsen. Beide trainieren fleißig und möchten einmal berühmte Sportler werden.
Sie träumen von einer Teilnahme an einem großen Leichtathletikmeeting.

a) Susis Ziel ist die Teilnahme am 100-Meter-Endlauf.

Geben Sie an, wie viele Möglichkeiten der Vergabe der drei Medaillen es in diesem Endlauf gibt, wenn 8 Läuferinnen daran teilnehmen und jede Medaille genau einmal vergeben wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

b) Erfahrungsgemäß erreichen 30% aller Schützlinge des Trainers von Susi und Tom den Sprung in die Nationalmannschaft. Zurzeit werden von diesem Trainer 50 Jugendliche betreut.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Mindestens 10 Jugendliche dieser Trainingsgruppe schaffen den Sprung in die Nationalmannschaft.
Ereignis B: Mehr als 12, aber höchstens 17 Jugendliche dieser Trainingsgruppe schaffen den Sprung in die Nationalmannschaft.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Im Training geht Tom regelmäßig in einen Kraftraum, in dem es genau drei Sportgeräte A, B und C gibt. Erfahrungsgemäß sind Gerät A zu 95%, Gerät B zu 25% und Gerät C zu 10% unabhängig voneinander frei.
Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl der freien Geräte im Kraftraum zum Zeitpunkt des Betretens des Raumes.

Ermitteln Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße Z.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Für die Werbung von Sponsoren ist der Bekanntheitsgrad der Sportler wichtig. Eine Umfrage im Heimatort der beiden Nachwuchssportler hat ergeben, dass durchschnittlich drei von fünf Befragten Tom und durchschnittlich drei von vier Befragten Susi kennen. 90% der Befragten kennen wenigstens einen der beiden Sportler.

Untersuchen Sie, ob die Bekanntheit der beiden Sportler stochastisch abhängig ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Ein Behälter, der in der Industrie zur Aufbewahrung von Flüssigkeit genutzt wird, hat die Form eines geraden Kreiszylinders, der oben offen ist und unten durch eine nach innen gewölbte Halbkugel begrenzt wird.
Die Wandstärke des Behälters bleibt unberücksichtigt.

a) Bei einem solchen Behälter beträgt der Durchmesser der Halbkugel 60 cm und die Höhe des Kreiszylinders 120 cm.

Ermitteln Sie die Füllhöhe im Behälter, wenn sich darin 200 Liter der Flüssigkeit befinden.

In diesen Behälter bringt man einen 1,0 m langen Stab so, dass dieser am oberen Behälterrand anlehnt. Das eine Ende des Stabes befindet sich auf der nach innen gewölbten Halbkugel, das andere Ende ragt aus dem Behälter heraus.

Bestimmen Sie die maximal mögliche Stablänge außerhalb des Behälters.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

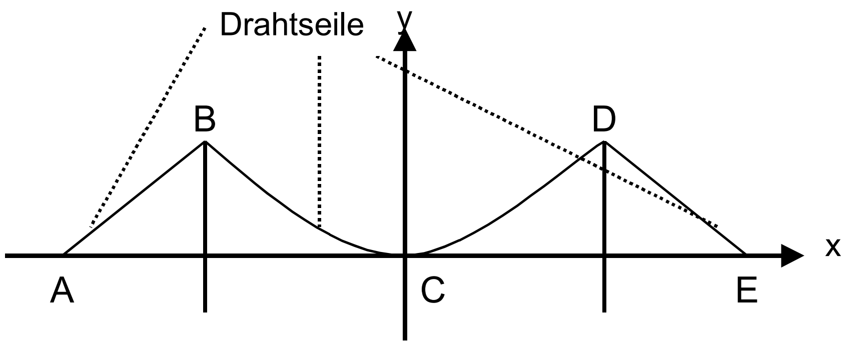
b) Ein weiterer solcher Behälter hat einen Oberflächeninhalt von $75\ \text{dm}^2$, der sich aus dem Flächeninhalt des Zylindermantels und dem Oberflächeninhalt der Halbkugel zusammensetzt.

Ermitteln Sie den Radius des Behälters für den Fall, dass sein Fassungsvermögen maximal ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Wahlaufgabe 2

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Skizze der Golden-Gate-Bridge in San Francisco. Von der Brücke sind folgende Daten bekannt:



Skizze nicht maßstäblich

Die Punkte B und D liegen jeweils 152 m über der geraden Fahrbahn und sind 1280 m voneinander entfernt.
Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$ haben jeweils eine Länge von 370 m.

Der Verlauf der Drahtseile der Brücke kann mit verschiedenen mathematischen Modellen beschrieben werden. Dazu wird ein kartesisches Koordinatensystem mit Punkt C als Koordinatenursprung festgelegt. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter. Die Punkte A und E der Fahrbahn liegen auf der Abszissenachse.

a) In einem ersten Modell wird der Verlauf der Drahtseile näherungsweise mithilfe von Geraden und dem Graphen einer quadratischen Funktion f beschrieben.
Der Graph der Funktion f geht durch die Punkte B und D. Die Fahrbahn tangiert den Graphen der Funktion f im Punkt C.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f.

Berechnen Sie die Gesamtlänge $\overline{AE}$ der Brücke.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Bei Verwendung eines anderen Modells wird der Verlauf der Drahtseile zwischen den Punkten B und D durch den Graphen einer Funktion k_a mit

$k_a(x) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2 \right)$ $(x \in \mathbb{R})$ beschrieben.

Der Wert a (a > 0) ist ein Parameter.

Zeigen Sie, dass für jeden Wert a der Punkt C auf dem Graphen der Funktion k_a liegt.

Es gibt genau einen Wert a, so dass der Punkt D auf dem Graphen der Funktion k_a liegt.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für a.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Fortsetzung Seite 8

Fortsetzung: Wahlaufgabe 2

c) Die Länge eines Kurvenstückes des Graphen einer Funktion bezeichnet man als Bogenlänge L.
Die Maßzahl der Bogenlänge L_f einer beliebigen Funktion f im Intervall $a \leq x \leq b$ kann mit der Formel $L_f = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ berechnet werden.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Maßzahl der Länge des Kurvenstücks $L_{k_{1370}}$ der Funktion k_{1370} aus Teilaufgabe b) zwischen den Punkten B und D.

Erreichbare BE-Anzahl: 3