Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Aufgaben.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de).
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 03.04.05.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material zur Vorbereitung der Abiturprüfungen 2005

Allgemeine Arbeitshinweise

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 35 BE,
im Teil B 25 BE,
im Teil C 15 BE,
im Teil D 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
90 BE	90-86	85-82	81-77	76-73	72-68	67-64	63-59	58-55	54-50	49-46	45-41	40-37	36-31	30-25	24-19	18-0

Prüfungsinhalt

Teil A: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist eine Funktion f_a durch $y = f_a(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$ $\left(x \in \mathbf{D}_{f_a}\right)$ gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_a an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion f_a genau zwei Nullstellen besitzt.
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_a auf Symmetrie.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_a keine Wendepunkte besitzt. Erreichbare BE-Anzahl: 8

b) Der Graph der Funktion f_a besitzt genau zwei lokale Extrempunkte. Diese Extrempunkte sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.
Ermitteln Sie den Wert a, für den dieses Rechteck einen Flächeninhalt von 12 besitzt.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

c) Die Abszissenachse, die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $P_a(\sqrt{a} \mid f_a(\sqrt{a}))$ sowie die Tangente und die Normale an den Graphen von f_a im lokalen Minimumpunkt begrenzen eine Vierecksfläche vollständig.
Nennen Sie die Art der entstehenden Vierecksfläche. Begründen Sie.
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten den Wert a, für den der Inhalt dieser Fläche e^{-2} beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 7

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

d) Der Graph der Funktion f_a und die Abszissenachse begrenzen für $\frac{1}{2}\sqrt{a} \le x \le \sqrt{a}$ eine Fläche vollständig.

Berechnen Sie den Wert a. für den der Inhalt dieser Fläche $3+\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ beträgt.

Hinweis: $\int \ln x\,dx = x \cdot (\ln x - 1) + c$ ($c \in \mathbb{R}$) Erreichbare BE-Anzahl: 8

e) Ein im vierten Quadranten liegender Kreis k mit dem Mittelpunkt M berührt die Ordinatenachse im Punkt P(0 | -1) und außerdem den Graphen der Funktion f_1 im Punkt $B(x_B \mid f_1(x_B))$. Die Tangente t an den Graphen der Funktion f_1 im Punkt B schneidet die Ordinatenachse im Punkt N (siehe Abbildung 1).
Begründen Sie, dass das Viereck PMBN ein Drachenviereck ist.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Radius des Kreises k.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

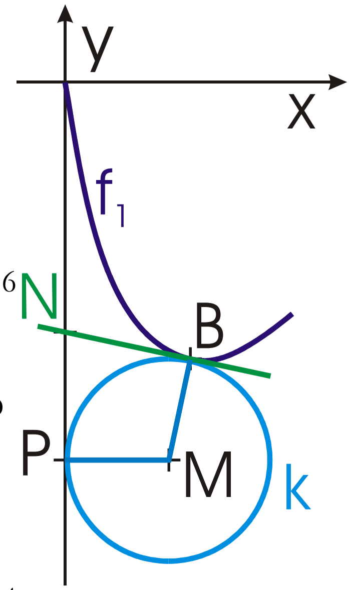

Abbildung 1: nicht maßstäblich

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind die Punkte A(4 | 0 | 4); B(4 | 4 | 0) und für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) ein Punkt $C_a(0 \mid a \mid 4)$ gegeben.

a) Es existiert genau ein Wert a, so dass die Punkte O, A, Bund C_a nicht Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide sind.
Ermitteln Sie diesen Wert a. Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Es gibt eine Pyramide $OABC_a$ mit der Grundfläche OAB. bei der der Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche übereinstimmt.
Ermitteln Sie das Volumen dieser Pyramide. Erreichbare BE-Anzahl: 7

c) Durch den Mittelpunkt der Kante $\overline{OB}$ der Pyramide $OABC_4$ verläuft eine Ebene, die parallel zu den Kanten $\overline{OC_4}$ und $\overline{AB}$ liegt.
Zeigen Sie, dass die Schnittfigur zwischen dieser Ebene und der Pyramide $OABC_4$ ein Quadrat ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

d) Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B, die Gerade g_a durch die Punkte B und C_a.
Untersuchen Sie, ob ein Rechteck mit folgenden Eigenschaften existiert:
(1) Die Diagonalen liegen auf den Geraden h und g_a.
(2) Der Punkt P(1 | - 2 | 3) ist ein Eckpunkt des Rechtecks.
Berechnen Sie gegebenenfalls den Flächeninhalt des Rechtecks. Erreichbare BE-Anzahl: 7

Wahlaufgabe 1

Ein Kreis k heißt Schmiegekreis an den Graphen einer Funktion f im Punkt P genau dann, wenn gilt:

1. P liegt auf k und dem Graphen von f.
2. Die Werte der ersten Ableitung von kund f im Punkt P sind gleich.
3. Die Werte der zweiten Ableitung von kund f im Punkt P sind gleich.

a) Weisen Sie nach, dass der Schmiegekreis an den Graphen der Funktion f mit $y=f(x)=x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) im Punkt P(0 | 0) durch die Gleichung $k: x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ beschrieben werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Wenn für einen Punkt $P(x_p \mid f(x_p))$ ein Schmiegekreis an den Graphen der Funktion f existiert, dann gilt für den Radius dieses Kreises: $r=\frac{\sqrt{\left(1+\left(f'(x_p)\right)^2\right)^3}}{\left|f''(x_p)\right|}$.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung des Schmiegekreises an den Graphen der Funktion g mit $y=g(x)=\frac{1}{2}x^2+4x-1$ ($x \in \mathbb{R}$) im Punkt $P(-3 \mid g(-3))$. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist eine Funktion g_a durch $y=g_a(x)=\frac{1}{2}x^2+ax-1$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.
Für jeden Punkt $P_a(x \mid g_a(x))$ existiert genau ein Schmiegekreis an den Graphen der Funktion g_a.
Begründen Sie, dass der Schmiegekreis im Scheitelpunkt des Graphen der Funktion g_a den minimalen Radius aller dieser Kreise besitzt.
Bestimmen Sie eine Gleichung des Schmiegekreises k_a im Scheitelpunkt des Graphen der Funktion g_a. Erreichbare BE-Anzahl: 6

Wahlaufgabe 2:

Ein 8,00 m langes Förderband transportiert Schutt mit einer Geschwindigkeit v_0 (in m/s). Es ist gegenüber der Horizontalen unter einem Winkel α ($0° < \alpha < 60°$) geneigt. Befindet sich der Schutt am Ende des Förderbandes (Abwurfpunkt), bewegt er sich nach dem Abwurf annähernd auf einer parabelförmigen Bahn.
In einem kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit = 1 Meter) mit dem Ursprung im Abwurfpunkt kann diese Bahn in der Ebene x = 0 durch die Gleichung

$$z=f_{\alpha;v_0}(y)=\tan\alpha\cdot y-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot y^2 \quad \text{(y in m; } g \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2\text{)}$$

beschrieben werden.

a) Ermitteln Sie, unter welchem Winkel zur Horizontalen der Schutt auf einen bereitgestellten LKW trifft, wenn der Auftreffpunkt 1,50 m höher als der Anfangspunkt des Förderbandes liegen soll und das Förderband auf $\alpha = 20°$ und $v_0 = 2{,}20$ m/s eingestellt ist. Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Der zu beladende LKW soll möglichst weit vom Förderband entfernt stehen.
Die „Flugweite“ des Schuttes ist maximal, wenn der Schutt unter einem Winkel von 45° auftrifft.
Der Auftreffpunkt soll 40 cm tiefer als der Abwurfpunkt des Förderbandes liegen. Das Förderband ist auf eine Geschwindigkeit von $v_0 = 3{,}00$ m/s eingestellt.
Ermitteln Sie für diesen Fall die Größe des Winkels α, so dass die Flugweite des Schuttes maximal wird. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Der Anfangspunkt (A) des Förderbandes befindet sich in der Ebene E mit der Gleichung z = -4.
Für den Winkel $\alpha = 30°$ und einer bestimmten Förderbandgeschwindigkeit v_0 beträgt die Wurfweite bis zum Auftreffen des Schuttes in der Ebene E 1,75 m.
Das Förderband soll nun aus seiner Lage in der y-z-Koordinatenebene um einen horizontalen Winkel von $\gamma = 20°$ nach bei den Seiten um den Punkt A gedreht werden.
Dabei landet der Schutt in der Ebene E auf dem Kreisbogen $\breve{GH}$.
Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(-2 \mid 0 \mid -4)$ im zum Kreisbogen $\breve{GH}$ gehörigen Kreissektor AGH liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Lösungsvorschläge

Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $\mathbf{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Existenznachweis für Nullstellen: $f_a(x_0) = 0 \Rightarrow x_{0½} = \pm\sqrt{a}$
Einzigkeitsnachweis für Nullstellen: wegen a > 0 gibt es genau zwei Nullstellen
Ansatz für Symmetrie: $f_a(-x) = -f_a(x)$
Nachweis der Symmetrie: punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
1. Ableitung: $f_a'(x)=\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)+2$
2. Ableitung: $f_a''(x)=\frac{2}{x}$
Nachweis für Wendepunkte: hat keine Nullstellen und $0 \notin \mathbf{D}_f$ (Symmetrie) 8 BE

b) Ansatz für Extremstellen: $f_a'(x_E) = 0$
Extremstellen: $x_E = \pm e^{-1}\sqrt{a}$
lokale Extrema: $y_E = \mp 2e^{-1}\sqrt{a}$
Ansatz für Wert a: $A(a) = |4 \cdot x_E \cdot y_E| = 8e^{-2}a = 12$
Umformungen
Wert a: $a = 3/2\ e^2$ 6 BE

c) Art der Vierecksfläche: Trapez
Begründung für Art der Vierecksfläche: Tangente im lok. Minima ist parallel zu Abszisse
Gleichung der Tangente im lokalen Minimumpunkt: t_{Min}: $y = -2e^{-1}\sqrt{a}$
Gleichung der Tangente im Punkt $P_a(\sqrt{a} \mid f_a(\sqrt{a}))$: t_{Pa}: $y = 2x - 2\sqrt{a}$
Abszisse des Schnittpunktes der Tangenten: $x_S = (1-e^{-1})\sqrt{a}$
Ansatz für Wert a: $A_{Trapez} = A_{Rechteck} + A_{Dreieck} = e^{-2}$
Wert a: $a=\frac{1}{2e-3}$ 7 BE

d) Ansatz für Fläche: $\left|\int_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\sqrt{a}} f_a(x)\,dx\right|=3+\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
GTR[2]: `solve(abs(fnInt(Y1,X,.5√A,√A))-(3+ln(.25)),A,1)` → a = 8
etwas einfacher, wenn das Vorzeichen des Integrals beachtet wird:
`solve(fnInt(Y1,X,.5√A,√A)+3+ln(.25),A,1)`

aus „Schönheitsgründen“:
Integration durch Substitution $\int f_a(x)\,dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)-1\right)$
Ermittlung einer Stammfunktion (3 BE)
Ansatz für Wert a: siehe Ansatz für Fläche
Umformungen (2 BE)
Wert a: a = 8 8 BE

e) Begründung für Drachenviereck (2 BE):
$\sphericalangle MPN = \sphericalangle NBM = 90° \Rightarrow$ Sehnenviereck mit $\overline{MN}$ als Durchmesser
$\overline{PM} = \overline{MB} = r$ (nach Voraussetzung)

Variante I: grafisches Vorgehen – geht am schnellsten

2 Die beiden Zeilen sollten zum Erreichen der 8 BE ausreichen. FM

ges.: r - Kreisradius
den Nebenbedingungen ergibt sich die Kreisgleichung k: $(x - r)^2 + (y + 1)^2 = r^2$
soll der Kreis eingezeichnet werden, ist es notwendig k in zwei Funktionen zu zerlegen:
$y = -1 \pm \sqrt{(r^2 - (x - r^2))} = -1 \pm \sqrt{(2rx - x^2)}$
davon interessiert nur der obere Teil: $Y1 = f_1(x)$; $Y2 = -1+\sqrt{(2RX-X^2)}$
durch Zuweisen von Werten im Display z. B.: .275→R und Anzeigen der Graphen, kann ein Näherungswert ermittelt werden
Variante II: viel Spaß beim Rechnen
$M(r \mid 1)$; $B(x_B \mid f_1(x_B))$; t – Tangente in B an f_1; n – Normale in B
k: $(x - r)^2 + (y + 1)^2 = r^2$
t: $y = t(x) = 2(\ln x_B + 1) \cdot x - 2x_B$
n: $y = n(x) = -\frac{1}{2\cdot(\ln x_B+1)}x + \frac{x_B}{2\cdot(\ln x_B+1)} + 2\cdot x_B \cdot \ln x_B$
Schnittpunkt der Normalen mit y = -1: $x_M = r = 4 \cdot x_B \cdot \ln^2 x_B + (4 \cdot x_B + 2) \cdot \ln x_B + x_B + 2$
$\overline{PM} = r$ und $\overline{BM} = r$
$\Rightarrow (x_B - r)^2 + (y_B + 1)^2 = r^2$
$\Rightarrow -4x_B^2 \cdot \ln^2 x_B - 8x_B^2 \cdot \ln x_B - x_B^2 - 4 \cdot x_B + 1 = 0 \rightarrow x_B = 0.33088 \rightarrow r = 0.27405$
Anstieg der Tangente t an den Graphen von f_1 im Punkt B
Ordinate des Punktes N
Ansatz für Radius des Kreises k
Näherungswert für Radius des Kreises: $r \approx 0{,}27$ 6 BE

Teil B

a) Ansatz für Ebene OAB
Ebenengleichung: $-x + y + z = 0$ (prgmGeometri)
Ansatz für Wert a
Wert a: $a = -4$ 4 BE

b) Gleichung der Höhengeraden
Ansatz für Durchstoßpunkt
Durchstoßpunkt
Koordinaten des Schwerpunktes: $S\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)$
der Punkt C_a kann als Gerade interpretiert werden: $g_{C_a}: \begin{pmatrix}0\\a\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $S \in g_{C_a}$ ⇒ a = 4
Koordinaten des Punktes C_4
Ansatz für Volumen: $h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$; $A_G = 8\sqrt{3}$
Volumen: V = 64/3 7 BE

c) Ansatz für Ebenengleichung: $E: \vec{x} = \overrightarrow{OM_{\overline{OB}}} + r\,\overrightarrow{OC_4} + t\,\overrightarrow{AB} \quad (r, t \in \mathbb{R})$
Ebenengleichung
Ansatz für Koordinaten des Schnittpunktes mit einer Pyramidenkante:
$P_1 = E \cap g_{OA}$; $P_2 = E \cap g_{C4A}$; $P_1 = E \cap g_{C4B}$;
Koordinaten aller Schnittpunkte: $P_1(2 \mid 0 \mid 2)$; $P_2(2 \mid 2 \mid 4)$; $P_3(2 \mid 4 \mid 2)$
$P_{1,2,3}$ liegen in der Ebene x=2 $y,z \in \mathbb{R}$ ⇒ Punkt P_1 und P_2 bzw. P_3 und M_{OB} liegen Achsenparallel; die Diagonalen schneiden sich orthogonal, sind gleich lang und halbieren einander[3]: ⇒ Quadrat
Nachweis für Quadrat (3 BE) 7 BE

3 wie an den Koordinaten der Punkte leicht abzulesen ist

d) Untersuchung der Existenz eines Rechtecks (3 BE)
(1) wegen $B \in h$ und $B \in g_a$ liegen h und g_a in einer Ebene und können somit Diagonalen sein
(2) B ist deshalb Diagonalenmittelpunkt und gleichzeitig Mittelpunkt des Thaleskreises;
$P \in g_a \Rightarrow a = -4$
Diagonalenschnittwinkel: $\alpha = 150°$
Abstand des Diagonalenschnittpunktes von P: $\frac{1}{2}e = d(P;B) = \sqrt{54}$
Ansatz für Flächeninhalt: $A = 2(\frac{1}{2}\sqrt{54} \cdot \sqrt{54} \sin 150° + \frac{1}{2}\sqrt{54} \cdot \sqrt{54} \sin 30°)$
Flächeninhalt: $A = 54$
oder Berechnen der Eckpunkte:
$R_1(1 \mid -2 \mid 3)$; $R_2(7 \mid 10 \mid -3)$; $Q_1(4 \mid 4 - \sqrt{27} \mid \sqrt{27})$; $Q_1(4 \mid 4 + \sqrt{27} \mid -\sqrt{27})$ 7 BE

Wahlaufgabe 1

a) Nachweis Eigenschaft 1: $P \in k$ und $P \in f$
Nachweis Eigenschaft 2: $f'(0) =$ [4] $k'(0) = 0$
Nachweis Eigenschaft 3 (2 BE): $f''(0) = 2$; [5] $k''(x) = \mp\frac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{4-x^2}}$; $k''(0) = 2$ 4 BE

b) Radius r des Schmiegekreises: $r = \sqrt{8}$
GTR: Tangente und Normale für k(x): t: $y = x - 5{,}5$ n: $y = -x - 11{,}5$
$k_{\left(-3\left|-\frac{17}{2}\right.\right);\sqrt{8}} \cap n:\ x = -3 \pm 2$
Ansatz zur Ermittlung des Mittelpunktes
Umformungen
Mittelpunkt M des Schmiegekreises: $M(-5 \mid -13/2)$
Gleichung des Schmiegekreises: $(x + 5)^2 + (y + 6{,}5)^2 = 8$ 5 BE

c) im Scheitelpunkt ist die Krümmung am stärksten: $S\left(-a \left| \frac{-a^2}{2} - 1\right.\right)$

$g'_a(x) = x + a$; $g'_a(x) = 1 \Rightarrow r = 1$ und $M\left(-a \left| -\frac{a^2}{2}\right.\right)$

Abszisse des Scheitelpunktes
Radius des Schmiegekreises
Begründung, dass Radius im Scheitelpunkt minimal ist. (2 BE)
Ordinate des Scheitelpunktes
Gleichung des Schmiegekreises: k_a: $(x + a)^2 + (y + \frac{1}{2}a^2)^2 = 1$ 6 BE

Wahlaufgabe 2

a) Berechnung der z-Koordinate des Auftreffpunktes (3 BE)
$z_a \approx -1{,}2362$;
y-Koordinate des Auftreffpunktes: $y \approx 1{,}2084$
Ansatz für Größe des Auftreffwinkels: $m = f'(y) \approx -2{,}4098 = \tan\beta$
Größe des Auftreffwinkels: $\beta = 67{,}50$ 6 BE

b) erste Gleichung des Gleichungssystems: $f'_{\alpha,3}(y_b) = -1$
erste Ableitung
zweite Gleichung des Gleichungssystems: $z_b = -0{,}4 = f_{\alpha,3}(y_b)$
Umformungen
Wert für α: $\alpha \approx 14{,}7°$ 5 BE

---

4 Besondere Lage des Kreises: Mittelpunkt auf y-Achse
5 Allgemeine Kreisgleichung als Funktion: $y = k(x) = y_M \pm \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$

c) Erfassung des Sektors (2 BE)
$8 \cdot \cos 30° \approx 6{,}9282$

$\arctan\left(\frac{2}{6{,}9282}\right) \approx 16{,}1°$ $\Rightarrow$ P liegt im Inneren, denn

$\overline{AP} \approx 7{,}2111 < 8{,}6782$ und $16{,}1° < 20°$

Untersuchung auf Abstand
Untersuchung auf Winkel und Schlussfolgerung: P liegt im Sektor AGH. 4 BE