Klausur unter abiturähnlichen Bedingungen Leistungskursfach Mathematik

- Ersttermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt 300 Minuten.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabedaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A 35 BE,
im Teil B 25 BE,
im Teil C 15 BE,
im Teil D 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

A: Analysis

Gegeben ist eine Schar von Funktionen

$$f_a(x)=\frac{\ln(x)-a}{x} \quad \text{mit } \mathbf{a} \in \mathbb{R} \text{ und } \mathbf{a > 0}.$$

a) Geben Sie für die Funktion **f_1 (x)** Nullstellen, Asymptoten (Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$), lokale Extrema und Wendestellen an.
Skizzieren Sie den Graph von **f_1 (x)** in einem geeigneten Koordinatensystem. 6 BE

b) Diskutieren Sie die Funktionsschar **f_a (x)** (Definitionsbereich, Nullstellen, Extrempunkte, Art der Extrema, Wendepunkte ohne Nachweis).
Bestimmen Sie die Funktion **g (x)**, auf deren Graphen alle Hochpunkte der Schar liegen. 10 BE

c) Berechnen Sie die Zahlen **z_1** und **z_2**, so dass für die Nullstelle **x_0**, die Extremstelle **x_E**, und die Wendestelle **x_W** von **f_a (x)** die Gleichungen $\mathbf{x_E = z_1 \cdot x_0}$ und $\mathbf{x_W = z_2 \cdot x_0}$ unabhängig von **a** gelten. 2 BE

d) Zeigen Sie, dass $F_a(x)=\frac{1}{2}(\ln(x)-a)^2$ eine Stammfunktion von **f_a (x)** ist.
Berechnen Sie für **k > 1** den Inhalt **A(k)** der Fläche unter dem Graphen von **f_a** über das Intervall **[x_0; kx_0]** (**x_0** ist die einzige Nullstelle von **f_a (x)**).
Bestimmen Sie speziell **A(z_1)** und **A(z_2)**. 5 BE

e) Bestimmen Sie die Inhalte der Rechtecke, welche jeweils von den Loten aus den Hochpunkten der Schar auf die Koordinatenachsen und den Koordinatenachsen gebildet werden.
In welchem Verhältnis teilt jeweils der Graph von **f_a (x)** das zugehörige Rechteck? 6 BE

Der Ort der Lampe ergibt sich nun aus: $\vec{OL}'=\vec{OH}_L+h_L\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

L'(33,6143 | 3,4289 | 36,6308)

Die Antworten zu b) und c) lassen sich nun ablesen.

$\gamma = 90° + \alpha - \beta \approx 59{,}61°$

h' = 41·cos γ ≈ 35,37 ⇒ Die Lampe ist bei h = 72–h' ≈ 36,63 m.

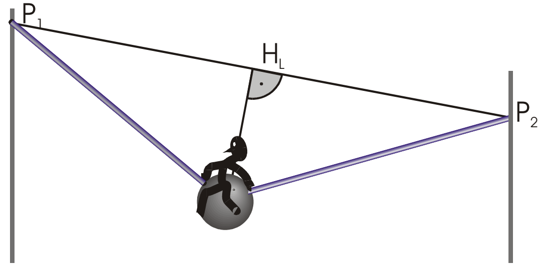
c) s' = 41·sin γ ≈ 20,74

Teilverhältnis in der Horizontalen: $TV = \dfrac{s'}{\sqrt{3074}}$

Die Position der Lampe L' ergibt sich nun aus:

$\overrightarrow{OL'} = \overrightarrow{OP_2} + TV \cdot \overrightarrow{P_2 P_1}$ und L'(33,62 | 3,43) z-Koordinate muss lt. Aufgabenstellung nicht angegeben werden

Variante II (vektoriell):



Im Dreieck[2] P_1LP_2 hat L den Höhenfußpunkt[3] H_L(33.45 | 4.72 | 72.70) und die Höhe h_L = 36.0937

Nachdem das Seil reißt, hängt das Dreieck senkrecht, aber die Linie $\overline{P_1 P_2}$ hat sich nicht geändert. Punkt H_L ist noch an der gleichen Stelle.

Der Vektor $\vec{r}$ soll in Richtung $\overrightarrow{H_L L'}$ zeigen. Um ihn zu ermitteln verwende ich eine „Höhenlinie", die senkrecht zu $\overrightarrow{P_1 P_2}$ ist. Für die Höhenlinie gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = 0$: zum Beispiel $\begin{pmatrix} 55 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} 55 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \times \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 14 \\ -110 \\ -3074 \end{pmatrix}$ ist die Richtung gefunden.

Wegen dem Vektorprodukt und der Höhenlinie „hängt" das Dreieck gemäß der Schwerkraft.

2 bevor das Seil reißt

3 mit GTR: prgmGeometri <Abstände>

f) Unter dem Graph von $\mathbf{f_1}$ **(x)** gibt es ein achsenparalleles Rechteck, bei dem der untere linke Eckpunkt bei ($\mathbf{x_E}$ | 0) und der obere rechte Eckpunkt auf dem Graph von $\mathbf{f_1}$ **(x)** liegen.
Für welchen Wert für **x** mit $\mathbf{x_E} \le \mathbf{x} \le \mathbf{x_W}$ wird der Flächeninhalt dieses Rechteckes maximal?
Geben Sie den Flächeninhalt an.
Formulieren Sie für die Funktionsschar $\mathbf{f_a}$ **(x)** eine Vermutung über die Lage des beschriebenen Rechteckes. 6 BE

B: Lineare Algebra / Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte O (0 | 0 | 0), A(6 | 0 | 0), B(6 | 6 | 6), die Ebene F: x – y = 0 und die Ebenenschar G_k: $k\cdot x + 6y - 6k = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$; $k > 0$ gegeben.

a) Berechnen Sie in Koordinatenform eine Gleichung der Ebene E, die die Punkte A, B und O enthält. 2 BE
Weisen Sie nach, dass das Dreieck OAB bei A rechtwinklig ist. 2 BE
[mögliches Teilergebnis: E: y – z = 0]

b) Durch die Spiegelung der Ebene E an der Ebene F erhält man die Ebene E^*.
Begründen Sie, dass B und O Fixpunkte dieser Spiegelung sind. 2 BE
Ermitteln Sie für E^* eine Gleichung in Koordinatenform. 2 BE
[mögliches Ergebnis: E^*: x – z = 0]

c) Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und E^* sowie den Schnittwinkel φ von E und E^* an. 3 BE

d) Bestimmen Sie - soweit vorhanden - die Koordinaten der Schnittpunkte der Scharebenen G_k mit den Koordinatenachsen. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat jede Scharebene G_k? 4 BE

e) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass alle Scharebenen G_k eine gemeinsame Schnittgerade g haben, und geben Sie eine Gleichung von g an. 3 BE

Für jedes k > 0 begrenzen die Ebenen E, E^*, G_k und die xy-Ebene eine dreiseitige Pyramide P_k.

f) Geben Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte von P_k an 3 BE
und berechnen Sie das Pyramidenvolumen V_k in Abhängigkeit von k. 3 BE
Für welchen Wert k ist das Volumen 18? 1 BE

E (0 | 64,6); F (0 | 67,6); p(x) = -,0011x² + 64,6
Abstand AB: als Abstand der Nullstellen von p ⇒ 153,27 m

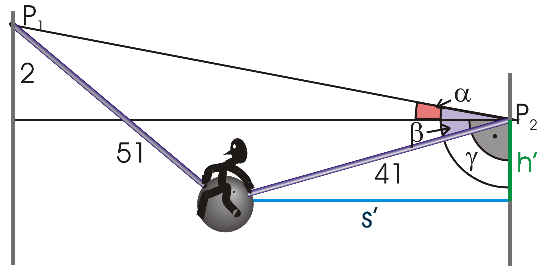
b) $\overline{DC} = \overline{AB} + 2\cdot\dfrac{y_F}{\tan 40°}$ ⇒ 314,40 m
oder g_{BC}: y = tan 40° · x – 64,3 ⇒ mit $y_C = 67{,}6$ $x_C = 157{,}2$

c) hervorgehobene Fläche $A_h = A_{Trapez} - A_{Parabel}$
A_{Trapez} = 15807,25 m²
$$A_{Parabel} = 2\cdot\int_0^{76,64} -0{,}0011\,x^2 + 64{,}6\,dx \;\rightarrow\; 6600{,}72\text{ m}^2$$
A_h = 9206,53 m² und davon 22%:
Die Windangriffsfläche beträgt 2025,44 m² ≈ 2025 m².

Wahlaufgabe Geometrie

a) Die Neigung ergibt sich z. B. aus den rechtwinkligen Dreiecken, die durch P_i, L als Hypotenusen, die Horizontale und die jeweilige Hauswand gebildet werden.
Abstände: $\overline{P_1L} = 51$; $\overline{P_2L} = 41$; $\overline{P_3L} = 29$
Neigungswinkel: $\alpha_i = \arcsin\left(\dfrac{z_{P_i} - 60}{\overline{P_iL}}\right)$ ⇒
$\alpha_1 = 15{,}93° < \alpha_2 = 17{,}02° < \alpha_3 = 22.29°$ ⇒ Seil 3 reißt.

b) Variante I (elementargeometrisches Vorgehen):
L befindet sich auf einer Landkarte zwischen P_1 und P_2.



$\overline{P_1P_2} = \sqrt{3078}$
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3078}}\right) \approx 2{,}07°$$
$$\beta = \arccos\left(\frac{-51^2 + 41^2 + 3078}{2\cdot 41\cdot\sqrt{3078}}\right) \approx 61{,}68°$$

$A_G(k)=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot k=3k$ und die Höhe $h=\frac{6k}{k+6}$ somit ist

$V(k)=\frac{6k^2}{k+6}$ und für V(k) = 18 ⇒ k = 6

Stochastik

1.

a) $4^3 = 64$ Flugrouten für drei „Flüge“ und
4^{12} Möglichkeiten für 4 x 3 „Flüge“

b) p =4!·P(a=-3)·P(a=0.5)·P(a=2)·P(a=3) = 4!·.3·.1·.4·.2 = .0576

2. A – Person ist geeignet und R – Person wird richtig eingeschätzt
gegeben sind: $P_{\overline{A}}(R)=.98$; $P_A(\overline{R})=.05$ und P(A) = .9

$P(R)=P(A)\cdot P_A(R)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(R)=.857$

$P(\overline{R})=1-P(R)=.143$

(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

$P_{\overline{R}}(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(\overline{R})}{P(\overline{R})}=.3147$ (Satz von Bayes)

3.

a) bei 7 von 250 Plätzen sind frei: $\binom{250}{7}$ (ohne Reihenfolge)

$\binom{200}{4}\cdot\binom{50}{3}$

b) Binomialverteilung: n=50, p=.9
$P(k \geq 46) = 1 - B_{n,p}(k<45) = .4312$
GTR: `1 - [DISTR] + <binomcdf(> 50,.9,45)`

Wahlaufgabe Analysis

a) aufgrund der Symmetrie hat die gesuchte Parabel p
die Form: $y = ax^2 + y_E$
zu lösen ist das lineare Gleichungssystem:
I: $37{,}1 = (-50)^2 a + y_E$
II: $54{,}7 = 30^2 a + y_E \Rightarrow a = -{,}0011$ und $y_E = 64{,}6$

C: Stochastik

1. Bei einem Flugsimulator wird ein Flugverlauf durch einen Computer simuliert. Für die Festlegung der Flugroute wird das gedachte Übungsgebiet mit einem x-y-Koordinatensystem unterlegt. Der Beginn des „Fluges“ ist stets auf der y-Achse.
Die möglichen Flugrouten werden durch Graphen der Funktionen

$$f_a(x)=\frac{1}{a}\cdot x^2-a\cdot x+a \quad (a\in\{-3;0.5;2;3\}, x\in\mathbb{R}, x>0)$$

beschrieben.
Der Parameter a wird vor jedem simulierten Flug neu und unabhängig vom vorangegangenen Flug durch den Computer mit folgenden Wahrscheinlichkeiten ermittelt:
P(a=-3) = 0,3 P(a=0.5) = 0,1 P(a=2) = 0,4 P(a=3)= 0,2.

Vier Personen absolvieren nacheinander je genau drei „Flüge“ am Flugsimulator.

a) Wie viele verschiedene Reihenfolgen von Flugrouten sind dabei möglich?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 4 aufeinander folgenden „Flügen“ alle voneinander verschieden, d.h. jeder mögliche Parameter tritt je einmal auf?

Erreichbare BE-Anzahl: 4

2. Da die Ausschreibung eines hochdotierten Managerpostens auf dem Flughafen eine große Anzahl von Bewerbern erbracht hat, müssen diese zur Vorauswahl einige Tests bestehen, von denen wir einen stochastisch begleiten wollen.
Der Gesundheitstest
Man weiß in der Firmenleitung, dass bei diesem Test von den für den Posten ungeeigneten Personen 98% richtig und von den geeigneten 5% falsch eingestuft werden. In der Gruppe der Bewerber um den obigen Posten seien 90% gesundheitlich geeignet.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine willkürlich ausgewählte Person

a) als geeignet eingestuft?

b) geeignet sein, obwohl sie als ungeeignet eingestuft wird?

Erreichbare BE-Anzahl: 5

3. Ein Reiseunternehmen chartert ein Flugzeug, dass 250 Passagiere aufnehmen kann, für Flüge nach Granfolio.

a) An einem Flug nehmen 243 Personen teil. Wie viele Möglichkeiten für freie Plätze gibt es?
Das Flugzeug hat 50 Plätze für Raucher und 200 Plätze für Nichtraucher. 47 Fluggäste belegen einen Platz für Raucher, die restlichen einen Platz für Nichtraucher.
Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt für freie Plätze?

b) Das Reiseunternehmen weiß aus Erfahrung, dass ein gebuchter Platz nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 auch tatsächlich belegt wird.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 zufällig ausgewählten gebuchten Plätzen mindestens 46 belegt werden?

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) B und O sind Fixpunkte, wenn sie auf E und F zugleich liegen:
O ∈ E und O ∈ F ist wahr,
B ∈ E und B ∈ F ist auch wahr
ein dritter Punkt, z. B. A liegt auf E aber nicht auf F, wird an F gespiegelt;
GTR `prgmGeometri <Spiegelung>` → A'(0 | 6 | 0) bzw. Lotfußpunkt L(3 | 3 | 0)
und mit O, B, A' ∈ E^* `prgmGeometri <Ebene>`
→ E^*: z – x = 0

c) $s = g_{OB}:\ \vec{x} = l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (l \in \mathbb{R})$, da O und B Fixpunkte sind

$$\sphericalangle(E, E^*) = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

φ = 60° = π/3

d) Duchstoßpunkte D_x = A – ist unabhängig von k
und $D_y(k) = (0 \mid k \mid 0)$
für k>0 hat G_k keine gemeinsamen Schnittpunkte mit der z-Achse, wegen -6k = 0 ⇒ G_k ist echt parallel zur z-Achse

e) die gemeinsame Schnittgerade g muss Punkt A enthalten und wegen der Parallelität zur z-Achse muss

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (m \in \mathbb{R})$ gelten

f) drei Eckpunkte sind O, A, $D_y(k)$
außerdem ist die Spitze in $S_k = s \cap G_k \Rightarrow l = \frac{6k}{k+6}$

$$S_k\left(\frac{6k}{k+6} \middle| \frac{6k}{k+6} \middle| \frac{6k}{k+6}\right)$$

in Bezug auf die Pyramide ist die Grundfläche

Hochpunkte: $H\left(e^{a+1} \middle| e^{-(a+1)}\right)$ wegen $f_a''(e^{a+1}) = -e^{-3a-3} < 0$

Wendepunkte: $W\left(e^{a+\frac{3}{2}} \middle| \frac{3}{2}\cdot e^{-\left(a+\frac{3}{2}\right)}\right)$

$g(x) = x^{-1}$

c) aus $x_E = z_1 \cdot x_0$ und $x_W = z_2 \cdot x_0$

wird $e^{a+1} = z_1 \cdot e^a$ und $e^{a+\frac{3}{2}} = z_2 \cdot e^a$

$z_1 = e$ und $z_2 = \sqrt{e^3}$

d) $F_a'(x) = f_a(x)$

$A(k) = F_a(kx_0) - F_a(x_0) = \frac{1}{2} (\ln k)^2$

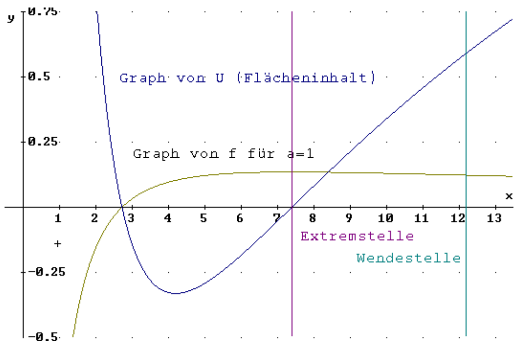
$A(z_1) = \frac{1}{2}$ und $A(z_2) = 9/8$

e) Flächeninhalt der Rechtecke: $R(a) = x_E \cdot f_a(x_E) = 1$

$$\int_{x_0}^{x_E} f_a(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Teilverhältnis: 1:1

f) Flächeninhalt des Rechtecks U:
$U(x) = (x - x_E) \cdot f_1(x)$
$\Rightarrow$ maximal für $x \to \infty$; damit ergibt der rechte Rand $x = x_W$ den maximalen Flächeninhalt $U(x_W) = 0.5902$
Vermutlich ist der rechte Rand immer bei x_W zu finden, denn die Kurve fällt nur langsam im Vergleich zur Breite.



Geometrie

a) $O \in E$, $A \in E$, $B \in E$ und GTR: prgmGeometri <Ebene>

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ergibt eine wahre Aussage

D: Wahlaufgaben

Wählen Sie eine der Aufgaben D1 oder D2 zur Bearbeitung aus.

D1: Analysis

Beim Bau einer Eisenbahnlinie ist über einem Flusstal eine Brücke so zu errichten, dass die Gleise horizontal verlaufen.

P_1 (-50,00 | 37,10)

P_2 (30,00 | 54,70)

$\overline{EF} = 3{,}00$

$\alpha = 40{,}0°$

(Längenangaben in Meter)

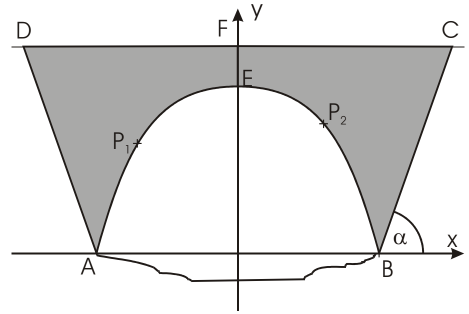


Abbildung 1: Skizze (nicht maßstäblich)

Den in der Skizze durch Hervorhebung vereinfacht dargestellten Umriss der Brücke in Seitenansicht kann man sich aus einem gleichschenkligen Trapez ABCD mit $\overline{AB} \| \overline{CD}$ entstanden denken, wobei die Trapezseite $\overline{AB}$ durch einen Parabelbogen AEB mit Scheitel E ersetzt wurde.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung für den Parabelbogen AEB und berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Berechnen Sie die Länge der Eisenbahngleise zwischen den Punkten C und D.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Die Ermittlung der Belastung durch Wind erfordert die Kenntnis der Windangriffsfläche der Brücke, die auf Grund der Brückenkonstruktion nur 22% des Inhaltes der in der Skizze hervorgehobenen Fläche beträgt.
Ermitteln Sie die Windangriffsfläche der Brücke.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

D2: Geometrie

Wie im Krimi

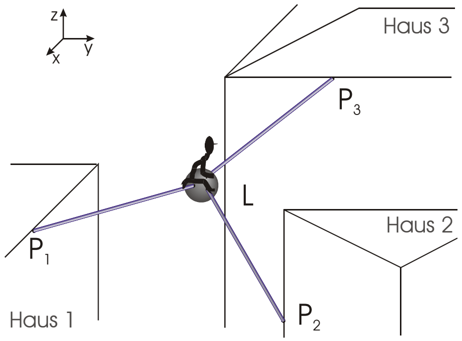


Abbildung 2: Klaus auf der Flucht

Die Story: Voller Panik sieht Klaus seine einzige Chance darin, über die Seile kletternd, auf ein anderes Dach zu flüchten. Gerade ist er auf der Lampe angekommen, als das Seil mit der stärksten Neigung gegenüber der Horizontalen reißt. Zum Glück halten die beiden anderen Seile und es gelingt ihm, nicht zu fallen. Nachdem die Lampe und Klaus sich beruhigt haben, ängstigt ihn die Höhe. Die Feuerwehr muss ihn retten.

Die Szene: An drei Gebäuden ist eine Straßenlampe L in den drei Punkten P_1, P_2 und P_3 befestigt.

$P_1(38 \mid -31 \mid 74)$; $P_2(31 \mid 24 \mid 72)$; $P_3(-24 \mid 12 \mid 71)$; $L(0 \mid 0 \mid 60)$

Der Durchhang der Seile $\overline{LP_i}$ $(i \in \{1,2,3\})$ wird nicht berücksichtigt, das heißt Sie können alle Seile als starre und gerade Stangen ansehen. Die z-Koordinate beschreibt die Höhe der Punkte. Alle Längenangaben sind in Fuß[1], aber das spielt keine Rolle.

Die Fragen:

a) Welches der drei Seile reißt? 4 BE

b) In welcher Höhe befindet sich Klaus, nachdem er und die Lampe zur Ruhe kommen? 7 BE

c) Um die Feuerwehr zu alarmieren: Auf welchen xy-Koordinaten befindet sich Klaus? 4 BE

1 Es ist wohl ein amerikanischer Krimi.

Lösungsvorschläge

Sie sollten folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 17.04.05.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de).

Analysis

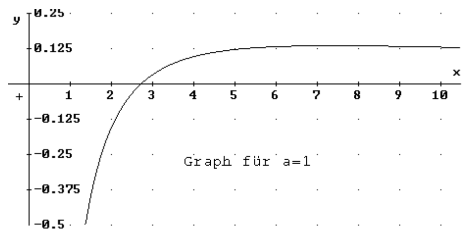
a) Nullstelle: $x_0 = e$

$\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f_1(x) = 0$

Hochpunkt: $H(e^2 \mid e^{-2})$

Wendestelle: $x_W = \sqrt{e^5}$



b) $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}^+$ wegen der Logarithmus-Funktion

Nullstellen: $x_0 = e^a$

$f_a'(x) = \dfrac{a+1-\ln x}{x^2}$ und $f_a''(x) = \dfrac{2(\ln x - a) - 3}{x^3}$