Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2005/06**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Grundkursfach Mathematik

- E R S T T E R M I N -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Wahlaufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = \dfrac{3x}{2x^2 + 1} \quad (x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an.

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f und geben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen an.

Geben Sie Näherungswerte für die Koordinaten der beiden lokalen Extrempunkte sowie deren Art und Näherungswerte für die Koordinaten der drei Wendepunkte des Graphen der Funktion f an.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $S\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ und der Graph von f begrenzen eine Fläche vollständig.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Für jedes u $(u \in R; u > 0)$ sind die Punkte $A(0;0)$, $B(3;0)$ und $C_u(u; f(u))$ Eckpunkte eines Dreiecks. Die x-Koordinate des lokalen Maximumpunktes des Graphen der Funktion f ist x_{MAX}.

Begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC_u für $u = x_{MAX}$ maximal wird.

Berechnen Sie alle Werte u, für die das Dreieck ABC_u den Flächeninhalt 1 besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = \frac{3}{4} \cdot \ln\left(2x^2 + 1\right) \quad (x \in R)$ eine Stammfunktion von f ist.

Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade $x = 2$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Weisen Sie nach, dass die Gerade $x = 1$ den Inhalt dieser Fläche halbiert.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Für jedes a $(a \in R; a \neq 0)$ ist eine Funktion g_a durch $g_a(x) = a \cdot f(x) \quad (x \in R)$ gegeben.

Ermitteln Sie den Wert a, für den die Tangente an den Graphen der Funktion g_a an der Stelle $x = 1$ parallel zur Geraden $y = x + 2$ verläuft.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(5;-1;0)$, $B(5;6;0)$, $C(4;5;3)$, $D(4;0;3)$ und $P(-5;7;0)$ gegeben. Die Punkte A, B, C und D liegen in ein und derselben Ebene.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein gleichschenkliges Trapez ist.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.

Auf der Seite $\overline{AB}$ des Trapezes ABCD existiert genau ein Punkt F so, dass das Viereck AFCD ein Parallelogramm ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes F.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Auf der Geraden durch die Punkte A und D existiert genau ein Punkt Q so, dass das Dreieck ABQ gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$ ist.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q.

Geben Sie einen Näherungswert für die Größe des Basiswinkels α des Dreiecks ABQ an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Jemand soll die Koordinaten eines auf der Geraden g durch die Punkte B und P liegenden Punktes R ermitteln, der vom Punkt B den Abstand $2\sqrt{101}$ hat.

Er schlägt folgende Lösungsschritte vor:

(1) Ermitteln des Vektors $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) Ermitteln des zum Vektor $\overrightarrow{BP}$ gehörenden Einheitsvektors $\overrightarrow{BP_0} = \frac{1}{\sqrt{101}} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) Verlängern des Vektors $\overrightarrow{BP_0}$ um den Faktor $2\sqrt{101}$.

(4) Der so erhaltene Vektor $\begin{pmatrix} -20 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des gesuchten Punktes R.

Treffen Sie für jeden der Lösungsschritte eine begründete Aussage über seine Richtigkeit und korrigieren Sie gegebenenfalls falsche Schritte.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Das Fahrradfachgeschäft „Flotte Speiche“ führt in seinem Angebot ausschließlich die Radtypen Citybike, Mountainbike, Trekkingbike und Rennrad. Aus Erfahrung weiß der Besitzer, dass sich unter den Kaufinteressenten 40 % über ein Citybike, 35 % über ein Mountainbike, 2 % über ein Rennrad und die restlichen über ein Trekkingbike informieren. Dabei informiert sich jeder Interessent nur über genau einen Fahrradtyp.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Von zwei aufeinanderfolgenden Interessenten informiert sich der erste über ein Mountainbike und der zweite über ein Citybike.

B: Von 20 Interessenten informieren sich mindestens 8 über ein Citybike.

C: Von aufeinanderfolgenden Interessenten informiert sich erstmals der siebente über ein Trekkingbike.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Berechnen Sie, wie viele Kaufinteressenten sich mindestens informieren müssen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich wenigstens eine Person über ein Rennrad informiert, mehr als 90 % beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Jeder zweite Interessent kauft – unabhängig vom Fahrradtyp – dann auch bei dem Fahrradfachhändler den Fahrradtyp, über den er sich informiert hat. Dabei gelten bei diesem Händler folgende durchschnittliche Preise:

Citybike	300,00 €
Mountainbike	350,00 €
Trekkingbike	400,00 €
Rennrad	1000,00 €

Ermitteln Sie, welche Einnahme je Interessent der Händler erwarten kann.

Durch Erhöhung des durchschnittlichen Preises für ein Citybike möchte der Händler die Einnahme je Interessent um 4 % steigern.
Bestimmen Sie den erhöhten durchschnittlichen Preis für ein Citybike.

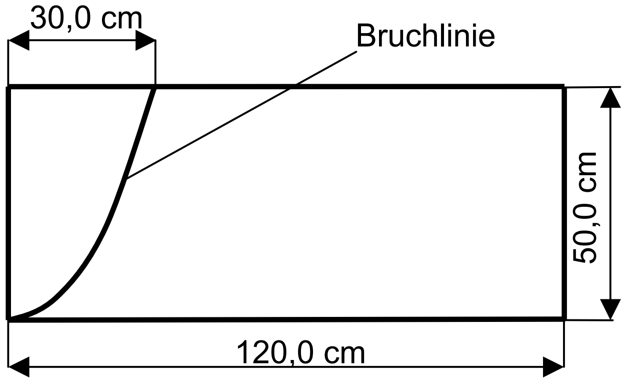
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Von einem rechteckigen Spiegel ist ein Stück abgebrochen. Die Bruchlinie kann in einem gedachten kartesischen Koordinatensystem näherungsweise durch eine quadratische Parabel, die in einem Eckpunkt des Rechtecks ihren Scheitelpunkt hat, beschrieben werden (Maße siehe Skizze).



Skizze (nicht maßstäblich)

a) Ermitteln Sie einen Näherungswert für den prozentualen Anteil des Flächeninhalts des kleineren Bruchstücks vom Flächeninhalt des ursprünglichen Spiegels.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Aus dem kleineren der beiden Bruchstücke soll ein rechteckiger Spiegel mit möglichst großem Flächeninhalt hergestellt werden.
Ermitteln Sie Näherungswerte für die Abmessungen dieses Spiegels.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Aus dem großen Bruchstück soll ein trapezförmiger Spiegel mit möglichst großem Flächeninhalt hergestellt werden.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für diesen größtmöglichen Flächeninhalt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Wahlaufgabe 2

Die Deutsche Lebensrettungsgesellschaft führt eine Übung durch. Dazu soll ein Rettungsschwimmer vom Fuß eines Beobachtungsturms am Strand geradlinig zum Ufer rennen und anschließend wiederum geradlinig zu einer Boje, die einen Verunglückten simulieren soll, schwimmen.
In einem gedachten kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 Meter) steht der Fußpunkt des Beobachtungsturms im Koordinatenursprung. Die Boje befindet sich im Punkt $B(60;295)$.

Die im interessierenden Abschnitt annähernd geradlinig verlaufende Uferlinie kann durch die Gerade g durch die Punkte $P_1(0;64)$ und $P_2(195;220)$ beschrieben werden.
Die als konstant angenommenen Geschwindigkeiten des Rettungsschwimmers betragen am Strand $6{,}4\,\frac{m}{s}$ und im Wasser $1{,}6\,\frac{m}{s}$.

a) Im Vorfeld der Übung diskutieren die Rettungsschwimmer unterschiedliche Rettungsstrategien.

Strategie I: Wahl des kürzesten Weges zwischen Beobachtungsturm und Boje

Strategie II: Lauf zu dem Punkt der Uferlinie, der zur Boje die kürzeste Entfernung besitzt und anschließendes Schwimmen zur Boje

Ermitteln Sie für beide Strategien Näherungswerte für die benötigte Zeit.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Ziel des Einsatzes ist es, in kürzester Zeit zur Boje zu gelangen.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für diese Zeit sowie Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes der Uferlinie, in dem der Rettungsschwimmer ins Wasser müsste.

Erreichbare BE-Anzahl: 4