Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2006, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 19.03.07.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt 240 **Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil W.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil W ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil W 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \ln(x) \cdot (\ln(x) - 2)$ $(x \in \mathbf{D}_f)$.

a) Geben Sie von der Funktion f den größtmöglichen Definitionsbereich, Näherungswerte für die Koordinaten des lokalen Extrempunkts, die Art des lokalen Extrempunkts sowie den Wertebereich an.
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten die Nullstellen der Funktion f.
Zeigen Sie, dass für die zweite Ableitungsfunktion f'' von f gilt: $f''(x) = \frac{2}{x^2} \cdot (2 - \ln(x)) \quad (x \in \boldsymbol{D}_{f''})$.
Begründen Sie, dass die Funktion f höchstens eine Wendestelle besitzt. Erreichbare BE-Anzahl: 10

b) In jedem Schnittpunkt des Graphen der Funktion f mit der x-Achse existiert genau eine Tangente an den Graphen der Funktion f. Diese Tangenten und die x-Achse begrenzen ein Dreieck vollständig.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Flächeninhalt dieses Dreiecks. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$; $u > e$) begrenzen der Graph der ersten Ableitungsfunktion f' von f, die Gerade $x = u$ und die x-Achse eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Wert u so, dass der Inhalt dieser Fläche 1 beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse und der lokale Extrempunkt des Graphen der Funktion f liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion g.
Für jedes v ($v \in \mathbb{R}$; $e \leq v \leq e^2$) schneidet die Gerade $x = v$ den Graphen der Funktion f im Punkt P_v und den Graphen der Funktion g im Punkt Q_v.
Ermitteln Sie einen Näherungswert von v, für den die Länge der Strecke $\overline{P_v Q_v}$ größtmöglich wird.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$; $a > 0$) ist eine Funktion h_a gegeben durch $h_a(x) = f(x+a)$ ($x \in \mathbf{D}_{\mathbf{ha}}$).
Beschreiben Sie, wie aus den Nullstellen der Funktion f die Nullstellen der Funktion h_a ermittelt werden können. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(8 | 6 | 2), B(2 | 14 | 2), C(- 6 | 8 | 2), D(0 | 0 | 2) und H(1 | 7 | 7) sowie für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) ein Punkt $T_a(3^{-1} \cdot a \mid a+4 \mid -a)$ gegeben.

a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form an, in der die Punkte A, Bund C liegen.
Beschreiben Sie die Lage dieser Ebene im kartesischen Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.
A, B, C, D und H sind Eckpunkte einer Pyramide mit der Grundfläche ABCD.
Stellen Sie die Pyramide in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.
Geben Sie die Koordinaten eines von H verschiedenen Punktes P so an, dass die Pyramiden ABCDP und ABCDH volumengleich sind. Erreichbare BE-Anzahl: 8

b) Geben Sie den Wert a an, für den der Punkt Ta in der Ebene E aus Aufgabenteil a) liegt.
Ermitteln Sie eine Darstellung des Vektors $\overrightarrow{AT_{-2}}$ als Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$.
Begründen Sie, dass der Punkt T_{-2} im Inneren des Vierecks ABCD liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Es gibt genau einen Punkt T_a so, dass die Gerade durch die Punkte H und T_a senkrecht zu der durch die Punkte A, Bund C gebildeten Ebene verläuft.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes T_a. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

In den vergangenen Jahren nahmen immer mehr sächsische Schüler an dem jeweils im März stattfindenden "Känguru-Wettbewerb" teil. In diesem mathematischen Wettbewerb werden 30 Aufgaben mit jeweils 5 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist, gestellt.

Die Teilnehmer einer Arbeitsgemeinschaft (AG) Mathematik trainieren anhand von Aufgabenserien früherer Jahre für den neuen Wettbewerb. Dabei legt der AG-Leiter fest, dass bei jeder Aufgabe genau eine Antwortmöglichkeit angekreuzt werden muss.

a) Geben Sie an, wie viele verschiedene Möglichkeiten der Anordnung der Kreuze auf dem Antwortzettel es gibt. Erreichbare BE-Anzahl: 1

b) Einige AG-Teilnehmer diskutieren ihre Erfolgsaussichten, wenn sie alle Kreuze zufällig setzen würden.
Ermitteln Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Genau zehn Antworten sind richtig.
B: Mehr als 3, aber höchstens 8 Antworten sind richtig.
C: Mehr Antworten sind richtig, als man erwarten kann. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Die Aufgaben sind in drei Gruppen zu je 10 Aufgaben eingeteilt. AG- Teilnehmerin Simone weiß aus Erfahrung, dass sie eine Aufgabe der Aufgabengruppe 1 (Aufgabennummern 1 bis 10) mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, eine Aufgabe der Gruppe 2 (Aufgabennummern 11 bis 20) mit 70 % und eine Aufgabe der Gruppe 3 (Aufgabennummern 21 bis 30) immerhin noch mit 65 % richtig löst.
Das Ankreuzen der Antworten erfolgt in der Reihenfolge der gestellten Aufgaben.
Ermitteln Sie für Simone die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
D: Simone kreuzt bei allen Aufgaben die richtige Lösung an.
E: Simone begeht ihren ersten Fehler in der Aufgabe mit der Nummer 12.
F: Simone kreuzt bei allen Aufgaben der Gruppe 2 die richtige Lösung an.
G: Simone löst alle Aufgaben der Gruppen 1 und 2 richtig und genau zwei Aufgaben der Gruppe 3 falsch. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Die nebenstehende Abbildung (nicht maßstäblich) zeigt den Querschnitt des Mauerwerks eines geraden Tunnels mit der Länge 800 m.

Die Begrenzung dieses Querschnitts kann in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 Meter) durch Graphen zweier quadratischer Funktionen und Strecken beschrieben werden.

Der Querschnitt ist symmetrisch zur y-Achse.

Alle Maßangaben in Meter.

a) Ermitteln Sie tür jede der quadratischen Funktionen eine Gleichung und geben Sie den jeweils zugehörigen Detinitionsbereich an.
Bestimmen Sie einen Näherungswert tür den Inhalt der Querschnittsfläche des Mauerwerks.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Die Decke des Tunnels soll innen isoliert werden.
Ermitteln Sie einen Näherungswert tür den Inhalt der zu isolierenden Fläche in Quadratmetern.
Hinweis: Die Länge eines Kurvenstücks des Graphen einer Funktion bezeichnet man als Bogenlänge L. Die Bogenlänge Lf einer beliebigen Funktion t im Intervall $a \leq x \leq b$ kann mit der Formel $L_f = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ berechnet werden. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Wahlaufgabe 2

Mit Hilfe eines Lasers können Bauteile vermessen werden. Dazu werden charakteristische Punkte dieser Bauteile mit Laserstrahlen auf eine Sensorfläche projiziert. Der Laserkopf wird als Ausgangspunkt des Laserstahls betrachtet.

Die quadratische Sensorfläche einer solchen Einrichtung befindet sich in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 Zentimeter) in der x-z-Ebene. Sie wird vom positiven Teil der x- bzw. z-Achse begrenzt und hat eine Seitenlänge von 50,0 cm.

Von einem ebenflächig begrenzten Bauteil in der Form eines dreiseitigen Prismas mit aufgesetzter dreiseitiger Pyramide sind die Koordinaten seiner Eckpunkte A(7,0 | 6,0 | 0,0), B(12,0 | 8,0 | 0,0), C(4,0 | 9,0 | 0,0), D(7,0 | 6,0 | 10,0), E(12,0 | 8,0 | 7,0) und F(4,0 | 9,0 | 7,0) bekannt.

a) Stellen Sie das Bauteil ABCDEF in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie das Volumen dieses Bauteils. Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Für eine Messung befindet sich der Laserkopf im Punkt Q (2,0 | 12,5 | 8,0).
Geben Sie die Koordinaten des bei Projektion des Punktes D in die Sensorfläche entstehenden

Bildpunktes D_Q an.
Bei einer weiteren Messung entsteht bei Projektion des Punktes D in die Sensorfläche der Bildpunkt D_R (4,0 | 0,0 | 8,0).
Beschreiben Sie, wie die Koordinaten eines möglichen Punktes R für den Ort des Laserkopfes ermittelt werden können. Geben Sie die Koordinaten eines solchen Punktes R an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Der Laserkopf bewegt sich bei einer anderen Messung in einem konstanten Abstand von 10,0 cm zur x-y-Ebene auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Mittelpunkt M(9,0 | 4,0 | 10,0)und einem Radius von 3,5 cm.
Der Punkt D soll durch den Laserstrahl auf der Sensorfläche abgebildet werden.
Ermitteln Sie Näherungswerte für die x- und y-Koordinaten der beiden Punkte des Kreises, die den Kreisbogen begrenzen, auf dem sich der Laserkopf dazu bewegen muss. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Lösungsvorschläge

Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $\mathbf{D}_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$
Koordinaten des Extrempunkts: P (2,72 | -1)
Art des lokalen Extrempunkts: lokales Minimum
Wertebereich: $\mathbf{W}_f = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge y \geq -1\}$
Nullstellen: $x_{N1} = 1$; $x_{N2} = e^2$
Ansatz für erste Ableitungsfunktion
erste Ableitungsfunktion: $f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x - 1)$
Nachweis für zweite Ableitungsfunktion
Begründung: Die Funktion f ist stetig und hat nur eine Nullstelle in f'' $x_W = e^2$

b) Gleichungen der Tangenten (2 BE): $y = -2x + 2$ und $y = 2e^{-2}x - 2$
Ordinate des Schnittpunkts: $x_S = \frac{e^2}{e^2+1} \Rightarrow y_S = \frac{4}{e^2+1} - 2$
Ansatz für Flächeninhalt: $A = \frac{gh}{2} = \frac{(e^2-1)\cdot|y_S|}{2} = \frac{(e^2-1)^2}{e^2+1}$
Flächeninhalt: A ≈ 4,87

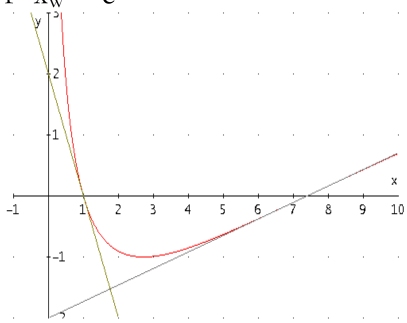

Abbildung 1: Tangenten und Graph f

c) Ansatz für Flächeninhalt: $\int_e^u f'(x)dx = 1$
GTR: `solve(int(nDerive(Y1,X,X),X,e,U)-1,U,4)` ist hier überflüssig
Erkenntnis zur Stammfunktion: wegen $\int f'(x)dx = f(x)$ gilt
Ansatz für Wert u: f(u) – f(e) = 1
Wert u: $u = e^2$

d) eine Gleichung der Funktion g (2 BE): quadratische Funktion: $p(x) = ax^2 + bx + c$, z. B. mit GTR: `QuadReg L₁,L₂` (x-Werte in L_1, y-Werte der drei Punkte in L_2) und Übertragung der Gleichung mit `RegEQ` (Eingabe der Folge `Y2=`; `VARS-Statistics-EQ-RegEQ`)
oder, da die Nullstellen der Parabel bekannt sind $p(x) = a(x-1)(x-e^2)$ und wegen
$P_{Min} \in p$: $-1 = a(e-1)(e-e^2) \Rightarrow p(x) = e^{-1}\cdot(e^2-1)^{-2}\cdot(x-1)(x-e^2)$
Ansatz für Wert v: $d(x) = |f(x) - p(x)|$
Y3 = abs(Y1-Y2) und fMax(Y3,X,e,e²) ⟶ x ≈ 5.1952
Wert v: v ≈ 5,20

e) Beschreibung (2 BE): A bewirkt eine Verschiebung von f entlang der x-Achse.
Dabei wird die Verschiebung um -a ausgeführt (das heißt nach links für a>0).
Nullstellen von $h_a(x)$ liegen also bei $x_0 = x^*_0 - a$, wenn x^*_0 die Nullstellen von f sind

Teil B

a) eine Gleichung der Ebene: z. B. z = 2
Beschreibung der Lage: parallel zur x-y-Koordinatenebene
Nachweis (2 BE): $\vec{AB} = \vec{DC} \wedge |\vec{AB}| = |\vec{AD}| \wedge \vec{AB}\cdot\vec{AD} = 0$ oder
$|\vec{AC}| = |\vec{DB}| \wedge \vec{AC}\cdot\vec{DB} = 0 \wedge M_{\overline{AC}} = M_{\overline{DB}}$
zeichnerische Darstellung: die Pyramide ist gerade
Ansatz für Volumen
Volumen: V = 500/3
Koordinaten eines Punktes P: z. B. P(0 | 0 | 7): jeder Punkt der Form (x | y | 7) oder (x | y | -3)

b) Wert a: a=-2
Ansatz für Linearkombination: $\overrightarrow{AT_{-2}} = r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} \quad (r, s \in \mathbb{R})$
Linearkombination: r = 1/5 und s = 14/15
Begründung: T_{-2} liegt im Inneren wenn 0 < r < 1 und 0 < s < 1 gilt. Das ist hier der Fall.

c) Richtungsvektor der Geraden durch die Punkte H und T_a: $\overrightarrow{HT_a} = \begin{pmatrix} 1-\frac{a}{3} \\ 3-a \\ a+7 \end{pmatrix}$

Ansatz für Koordinaten des Punktes T_a:
wie leicht zu sehen ist, gilt $\overrightarrow{HT_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zur Ebene

d) Koordinaten des Punktes T_a: $T_3(1 \mid 7 \mid -3)$

Teil C

a) Anzahl aller Möglichkeiten: 5^{30}

b) Charakterisierung der Zufallsgröße: Binomialverteilung mit n = 30 und p = .2
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: P(A) ≈ 0,0355
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: P(B) ≈ 0,7486
Erwartungswert: 6
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C: P(C) ≈ 0,3930

c) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D: P(D) ≈ 0,0001
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E: P(E) ≈ 0,0732
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses F: P(F) ≈ 0,0282

d) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses G: P(G) ≈ 0,0017

Teil W1

a) Ansatz für eine Gleichung einer Parabel: $y = ax^2 + 2.20$ mit $1.30 = a\ 1.50^2 + 2.20$
eine Gleichung einer Parabel: z. B. $f(x) = -0{,}3\ x^2 + 2{,}5$
eine Gleichung der anderen Parabel: z. B. $g(x) = -0{,}4\ X^2 + 2{,}2$
beide Definitionsbereiche: z. B. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}$

Ansatz für Inhalt der Querschnittsfläche (2 BE): $A = 2 \cdot \int_0^{1.50} g(x)dx$

Inhalt der Querschnittsfläche: $A = 2{,}70\ m^2$

b) Ansatz für Bogenlänge
Bogenlänge: GTR `Y1=` g(x); `int(`√(1+nDerive(Y1,X,X)²),X,-1.5,1.5)
Inhalt der zu isolierenden Fläche: A ≈ 2900 m²

Teil W2

a) zeichnerische Darstellung

Volumen des Prismas: $A_G = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{21}{2}$;

$V = A_G \cdot 7 + 1/3\ A_G \cdot 3$

Volumen des Körpers: $V = 84\ cm^3$

b) Koordinaten des Bildpunktes D_a:

$D_a(151/13\ \ 0\ |154/13)$

Vollständige Beschreibung: z. B.

- Aussagen über die Geradengleichung durch die Punkte D_R und D
- Aussage zu den Werten des Parameters der Geradengleichung: Parameter größer 1
  Koordinaten eines Punktes R: z. B.
  R (10,0 | 12,0 | 12,0)

c) Gleichung des Kreises in der Ebene z = 10:

$(x - 9)^2 + (y - 4)^2 = 3.5^2$

Gleichung einer Begrenzungsgeraden: z. B.

$y = 6/7\ x$ oder $y = -6/43\ x + 300/43$

Koordinaten eines Schnittpunkts

Koordinaten der Begrenzungspunkte: $x_p \approx 6{,}2$ und $y_P \approx 6{,}1$; $x_Q \approx 8{,}7$ und $y_Q \approx -7{,}5$

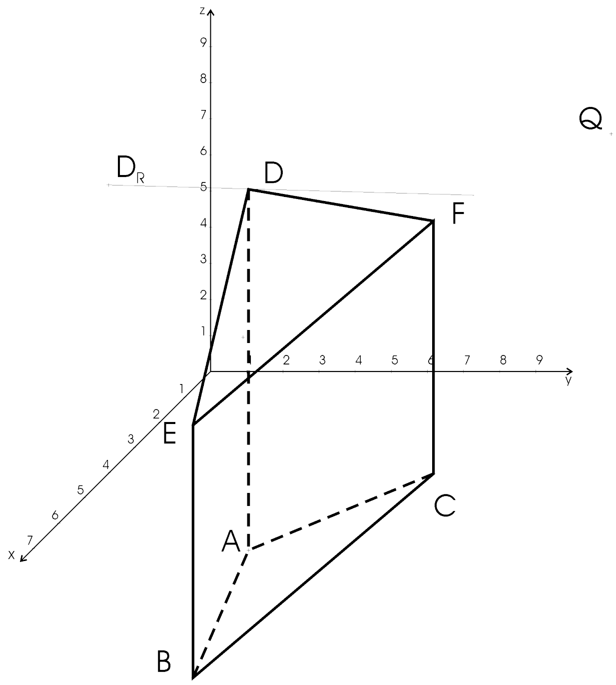

Abbildung 2: