# Klausur unter abiturähnlichen Bedingungen
# Grundkursfach Mathematik

# - Ersttermin -

---

## Material für die Teilnehmerin

---

## Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt 240 Minuten.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

**Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabedaten berechnet.**

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

### Erlaubte Hilfsmittel:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

# Teil A: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und F durch

$$y = \mathrm{f}(x) = e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (3\mathrm{x} + 4) \quad (\mathrm{x} \in \mathbf{D_f}) \text{ und}$$

$$\mathrm{F}(x) = (-12\mathrm{x} - 64)e^{-\frac{1}{4}x} \quad (\mathrm{x} \in \mathbf{D_F}).$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f, die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen sowie eine Gleichung der waagerechten Asymptote an. Begründen Sie, warum die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt.

Der Graph der Funktion f besitzt genau einen lokalen Extrempunkt mit den Koordinaten $\mathrm{E}\left(\frac{8}{3}\,\middle|\,\frac{12}{\sqrt[3]{e^2}}\right)$.
Zeigen Sie mithilfe der ersten Ableitungsfunktion von f, dass dies gilt. Geben Sie die Art des Extremums an.

Der Graph der Funktion f besitzt genau einen Wendepunkt. Geben Sie die Koordinaten des Wendepunktes von f an.

Weisen Sie nach, dass für alle $\mathrm{x} \in \mathbf{D_F}$ die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist. 13 BE

b) Die Gerade g verläuft durch den lokalen Extrempunkt des Graphen von der Funktion f und den Koordinatenursprung.
Der Graph der Funktion f und die Gerade g schließen eine Fläche vollständig ein.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche mit einer Genauigkeit von drei Dezimalen. 4 BE

Fortsetzung auf nächster Seite beachten

c) Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$; $5 < t < 10$) sind die Punkte $P_t(t \mid f(t))$; $Q_t(t \mid 0)$ und der Koordinatenursprung Eckpunkte eines Dreiecks. Es gibt genau ein solches Dreieck mit maximalem Flächeninhalt.
Ermitteln Sie den Wert für t , für den der Flächeninhalt vom Dreieck $OP_tQ_t$ maximal wird und geben Sie den Wert des maximalen Flächeninhaltes an. 5 BE

d) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion $h_a$ durch

$h_a(x) = e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (a + 3x)$ $\left(x \in D_{h_a}\right)$ gegeben.

Es existieren Werte von a, für die der Graph der Funktion $h_a$ und die Koordinatenachsen eine Fläche vollständig begrenzen.
Geben Sie alle Werte für a an, die diese Bedingung erfüllen.
Begründen Sie. 3 BE

# Teil B: Geometrie / Algebra

Ein Flugzeug fliegt auf geradlinigem Kurs vom Punkt A(-50 | 31 | 4) in Richtung des Punktes B(-14 | 7 | 1).
Die Beschreibung des geometrischen Sachverhaltes erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem; eine Einheit entspricht einem Kilometer. Die x-y-Ebene charakterisiert die Horizontalebene.

a) Ermitteln Sie einen Vektor, der die Flugrichtung beschreibt und berechnen Sie die Länge der Flugstrecke zwischen den Punkten A und B.

3 BE

b) Der Flug muss aus Sicherheitsgründen oberhalb einer Ebene E mit der Gleichung $x - y + 20z + 11 = 0$ stattfinden.
Zeigen Sie, dass das Flugzeug (echt) parallel zu dieser Ebene fliegt.

3 BE

c) Vom Punkt B aus erfolgt ein geradliniger Landeanflug in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die den Landeanflug charakterisiert und berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, der die Kursänderung im Punkt B für den Landeanflug angibt. 3 BE

d) Die Landebahn des Flughafens werde als Strecke betrachtet, deren Punkte wie folgt beschrieben sind:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ -\frac{15}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1.$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes L, in dem das Flugzeug aufsetzt.
Zeigen Sie, dass das Flugzeug im ersten Viertel der Landebahn aufsetzt.
Wie lang ist die nach der Landung noch zur Verfügung stehende Ausrollstrecke auf der Landebahn? 6 BE

# Teil C: Stochastik

1. Die Wahrscheinlichkeit der Geburt eines Jungen liegt bei 0,514.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Ehepaar mit 3 Kindern eine Tochter?
   b) Ein Paar möchte 4 Kinder haben. Das erste ist ein Junge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Kind ein Mädchen wird?
   2 BE
2. In einer Fabrik müssen die gefertigten Bauteile eine bestimmte Länge haben. Sind sie zu lang, können sie nachgearbeitet werden. Sind sie zu kurz, dann sind sie Ausschuss. Erfahrungsgemäß sind 90% der Teile o.k. und 2% sind Ausschuss. Aus der Produktion werden nacheinander 2 Teile entnommen, geprüft und zurückgelegt.
   a) Geben Sie ein geeignetes Urnenmodell mit möglichst wenigen Kugeln an, mit dem der Vorgang simuliert werden kann! 1 BE
   b) Geben Sie alle Ergebnisse und deren Wahrscheinlichkeiten tabellarisch an! 2 BE
   c) Wie viele Bauteile muss man prüfen, um mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit ein Ausschussteil zu finden? 2 BE
3. Eine Urne enthält 2 rote, 1 weiße und 1 schwarze Kugel. Es werden mit einem Griff 2 Kugeln entnommen und deren Farbe registriert.
   a) Geben Sie ein sicheres Ereignis an! 1 BE
   b) Geben Sie die Ereignisse in Mengenschreibweise an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
   A: beide Kugeln sind rot
   B: $\overline{A}$
   C: eine Kugel ist schwarz oder weiß 2 BE

# Teil D: Wahlaufgaben

*Wählen Sie eine der Wahlaufgaben 1 oder 2 zur Bearbeitung aus.*

## Wahlaufgabe 1

Wird die Höhe einer Sonnenblume während ihres Wachstums gemessen, so erhält man ungefähr nebenstehenden Verlauf.

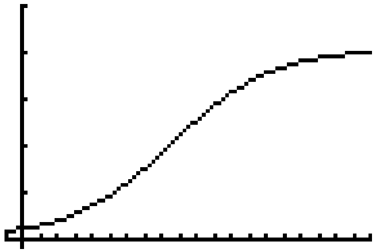

*Abbildung 1: Zeit-Höhe-Diagramm*

Folgende Messdaten wurden während der Wachstumsphase beobachtet:

- Anfangshöhe zur Zeit $t = 0$ Tage: 0,10 m
- Höhe nach $t = 100$ Tagen: 1,27 m
- Höhe nach $t = 200$ Tagen: 2,00 m
- Die Sonnenblume war nach 200 Tagen ausgewachsen

a) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die die genannten Bedingungen erfüllt! 5 BE

Die Biologen gelangten mit Hilfe mathematischer Modellierung zu folgender Funktion: $h_r(t) = \frac{2 \cdot e^{r \cdot t}}{e^{r \cdot t} + 19}$, mit

t: Zeit in Tagen und $r > 0$: konstanter Parameter

b) Wie groß ist die Sonnenblume zu Beginn der Messung nach dieser Funktion?

1 BE

c) Zeigen Sie mittels 1. Ableitung, dass die Funktion streng monoton steigend ist! 2 BE

d) Finden Sie einen Wert für den Parameter r im Intervall ($0{,}010 < r < 0{,}090$), der die Messdaten gut wiedergibt! 1 BE

e) Bestimmen Sie für Ihren Wert r aus Teilaufgabe d) den Zeitpunkt des stärksten Wachstums der Sonnenblume! 1 BE

# Wahlaufgabe 2

Beim Ernten von Zuckerrüben entsteht eine Miete. Näherungsweise soll davon ausgegangen werden, dass diese aus einem dreiseitigen geraden Prismas mit zwei angesetzten geraden halben Kreiskegeln besteht (Abbildung 3).

*Abbildung 2: Miete*

Die Breite $\kappa$, die Länge $\lambda$ und der Schüttwinkel $\alpha$ sind gegeben:
$\kappa = 8$ m, $\lambda = 30$ m und $\alpha = 34°$.

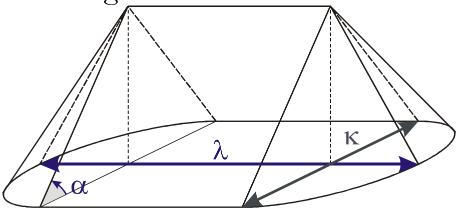


*Abbildung 3: Miete*
*Skizze nicht maßstäblich*
*1 Einheit entspricht 1 Meter*

a) Berechnen Sie das Volumen der Miete. 4 BE

Diese Miete wird durch einen Laster mit Anhänger abtransportiert. Die Ladeflächen werden mindestens 1.5 m hoch beladen[1]. Die dabei entstehende Aufschüttung darf aus Sicherheitsgründen 15° nicht übersteigen. Die Breite ist jeweils 2,3 m, die Länge vom Laster ist 3,5 m und die vom Anhänger 5,2 m.

b) Wie oft wird der Laster fahren müssen? 4 BE

Der Miete werden zufällig 10 Zuckerrüben entnommen und auf Beschädigungen durch die Erntemaschine untersucht (Abbildung 4).

*Abbildung 4: 10 Rüben*

c) Angenommen die Maschine beschädigt im Durchschnitt jede vierte Frucht.
Wie viele beschädigte Rüben sollte man dann erwarten? 2 BE

1 Das heißt die Füllhöhe beträgt 1.5 m. Dazu kommt dann noch die Aufschüttung.

# Lösungen

## Teil A

a) $D_f = \mathbb{R}$ 1 BE

$S_x(-4/3 \mid 0)$; $S_y(0 \mid 4)$ 2 BE

$y = 0$ 1 BE

$0 = f(x) \Rightarrow 0 = 3x + 4$ wegen $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$ 2 BE

$f'(x) = \left(-\frac{3}{4}x + 2\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ und $f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = 8/3$ 1 BE

(es gibt nur eine Lösung) 1 BE

E ist lokales, ja sogar globales Maximum 1 BE

Variante I: W(6.67 | 4.53) abgelesen am GTR

Variante II:

`Y1=`f(x); `solve(nDerive(nDerive(Y1,X,X),X,X),X,5)` → 6.66667

Variante III: $f''(x) = \left(\frac{3}{16}x - \frac{5}{4}\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$; $f''(x_W) = 0 \Rightarrow x_W = 20/3$

$W\left(\frac{20}{3} \,\middle|\, \frac{24}{\sqrt[3]{e^5}}\right)$ 1 BE

$F'(x) = f(x)$ 2 BE

b) $g(x) = \frac{9}{2 \cdot \sqrt[3]{3^2}} x$ 1 BE

noch nicht bekannte Schnittstelle der Graphen: $x_S = -2.3367$ 1 BE

$A = \left| \int_{x_S}^{\frac{8}{3}} f(x) - g(x)\, dx \right| \approx 13.299$ 2 BE

c) $A(t) = \frac{1}{2} t (3t + 4) e^{-\frac{1}{4}t}$

Variante I: `fMax(`A(`T),T,8/3)` → 7.389

Variante II: $A'(t) = 0$ mit $A'(t) = \left(-\frac{3}{8}t^2 + \frac{5}{2}t + 2\right) e^{-\frac{1}{4}t} \Rightarrow t = \frac{2}{3}\left(\sqrt{37} + 5\right)$

$A(7.389) \approx 15.243$

d) $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$

z. B.: nur für a = 0 schneidet der Graph von $h_a$ im Koordinatenurspung; deshalb schließen die Koordinatenachsen und der Graph keine Fläche ein; ansonsten gibt es Schnittpunkt des Graphen mit den Achsen ungleich Null und also einen Flächeninhalt

# Teil B

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 36 \\ -24 \\ -3 \end{pmatrix}$ 1 BE

$|\vec{AB}| \approx 43.37$ km 2 BE

b) Umwandlung der Ebenengleichung in Parameterform und zeigen, dass $\vec{AB}$ von den Richtungsvektoren linear abhängig ist

E: x - y + 20z + 11 = 0

z.B. Wähle P, Q, R der Ebene P(-11 | 0 | 0); Q(0 | 1 | 0); R(-11 | 20 | 1)

Parameterform: $\vec{x} = \vec{OP} + r \cdot \vec{PQ} + s \cdot PR$ 1 BE

Lösung des Gleichungssystems:

Schlussfolgerung: ist komplanar zu den Richtungsvektoren der Ebene E, also verläuft der Flug parallel zur Ebene E 1 BE

noch zu zeigen: Punkt A liegt nicht in der Ebene E:

Punktprobe mit A und Schlussfolgerung: Flug echt parallel zu E 1 BE

Lösungsvariante: Abstand der Punkte A und B zur Ebene berechnen (GTR) und Schlussfolgerung

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$ (w ∈ ℝ) 1 BE

$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{a}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{867}{\sqrt{1881} \cdot \sqrt{406}} \approx 7.2°$ 2 BE

d) Ansatz:

$\begin{pmatrix} 15/4 \\ -15/8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$ 1 BE

Lösung: w = 1; t = 0,125 1 BE

⇒ L(4; -2; 0) 1 BE

Da die Lösung für den Parameter t = 0,125 = ⅛ < ¼ beträgt, liegt der Punkt L im ersten Viertel der Landebahn.

Ausrollstrecke: Vom Punkt L bis zum Ende der Strecke mit t = 1

⇒ Endpunkt der Landebahn E(5,75 | -2,875 | 0) 1 BE

Ergebnis: $|\vec{LE}|$ = 1.96 km 1 BE

# Teil C

1.
   a) $1 - 0{,}514^3$
   b) 0,486

2.
   a) Urne mit 45 roten, 4 weißen, 1 schwarzen Kugel, aus der 2 mal mit Zurücklegen gezogen wird
   b) Tabelle
   c) $0{,}98^n < 0{,}01 \rightarrow n > 227$

3.
   a) z.B.: es wird eine rote oder weiße oder schwarze Kugel gezogen
   b) P({rr}) = ½ · 1/3 = 0,1667
      P({rw,rs,wr,ws,sr,sw}) = 1 – 1/6 = 0,8333
      P({rw,rs,wr,ws,sr,sw}) = P( $\overline{A}$ ) = 5/6

| $e_i$ | $P(e_i)$ |
|---|---|
| rr | $0{,}9^2$ |
| rw | 0,9*0,08 |
| rs | 0,9*0,02 |
| wr | 0,08*0,9 |
| ww | $0{,}08^2$ |
| ws | 0,08*0,02 |
| sr | 0,02*0,9 |
| sw | 0,02*0,08 |
| sr | $0{,}02^2$ |

# Wahlaufgabe W1

a) Ansatz: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ , $x$: Zeit in Tagen, $f(x)$: Höhe
Bedingungen: $f(0) = 0{,}1$ ; $f(100) = 1{,}27$ ; $f(200) = 2$ ; $f'(200) = 0$,
da auch die Wachstumsgeschwindigkeit stetig und am Ende Null ist.
Diese Bedingungen führen zu einem Linearen Gleichungssystem mit der entsprechenden erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}1 \\ 10^6 & 10^4 & 10^2 & 1 & 1{,}27 \\ 8 \cdot 10^6 & 4 \cdot 10^4 & 2 \cdot 10^2 & 1 & 2 \\ 1{,}2 \cdot 10^5 & 4 \cdot 10^2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2{,}55 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5{,}45 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8{,}8 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Die Wachstumsfunktion lautet

$$f(x) = -2{,}55 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 + 5{,}45 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 8{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot x + 0{,}1$$

b) $H_r(0) = 0{,}1$

c) $h_r'(t) = \dfrac{38 \cdot r \cdot e^{r \cdot t}}{\left(e^{r \cdot t} + 19\right)^2}$ ist für alle t und $r > 0$ positiv und somit ist $h_r(t)$ streng monoton steigend

d) Lösung durch Probieren am Graphen der Funktion: $0{,}030 < r < 0{,}040$
Lösung mit solve-Befehl, so dass (100 ; 1,27) zum Graphen gehört:
`solve(h(100)-1.27,R,0.090)` → $R = 0{,}03498$

e) `fMax(h0.03498´(t),t,0,200)` → Zeitpunkt: $t = 84{,}17$ *Tage*
→ Wachstumsgeschwindigkeit: $h'(t) = 0{,}0175$ m/Tag

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } r = 0{,}030 : t = 98{,}15 \text{ Tage} \\ \text{für } r = 0{,}040 : t = 73{,}61 \text{ Tage} \end{array}\right\} 73 \text{ Tage} < t < 98 \text{ Tage}$$

# Wahlaufgabe W2

a) Höhe: $h = 4 \tan(34°) \approx 2{,}7$ m
Länge Prisma: $l = 22$ m

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 2{,}7 \approx 45{,}21 ,$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2{,}7 \cdot 22 \approx 237{,}6 \ \rightarrow V \approx 282{,}8 \text{ m}^3$$

b) Länge: $l = 8{,}7$ m, Breite: $b = 2{,}3$ m, Höhe: $h = 1{,}5$ m
Schütthöhe: $h_{Schütt} = \frac{1}{2} b \cdot \tan 15° \approx 0{,}31$ m

Variante I: fünfseitiges Prisma[2]
Grundfläche: $A = A_{Rechteck} + A_{Dreieck} = 2{,}3\ (1{,}5 + 1{,}15\ h) \approx 3{,}8\ m^2$
Volumen: $V \approx 33{,}1\ m^3$

Variante II: analog a) – Ladung als Kasten mit Miete oben drauf[3]
Volumen: $V = V_{Kasten} + V_{Schütt}$ mit und

$V_{Schütt} = 2\ V_{Kegel} + V_{Prisma} = \frac{2}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^2 h + (l - 2 \cdot b) \cdot h \approx 5{,}0\ m^3$ und

$V \approx 32{,}3\ m^3$

Damit liegt die genaue Anzahl der Fahrten bei: 8,5 (V. I) und 8,7 (V. II), also muss der Transporter mindestens 9 mal fahren[4].

c) Da 25% Ausschuss sind, müssten von den 10 Rüben im Durchschnitt 2,5 Fehler aufweisen. Also sollte man wohl 2 oder 3 kaputte vorfinden.

2 Diese Variante ermittelt das Volumen zu groß.
3 Diese Variante berechnet das abtransportierte Volumen eher zu klein.
4 Wer nur mit dem Kasten rechnet landet bei: 10 mal fahren, aber das ist falsch.