

---

## **Schriftliche Abiturprüfung Leistungskursfach Mathematik**

### **- E R S T T E R M I N -**

#### **Material für den Prüfungsteilnehmer**

---

#### **Allgemeine Arbeitshinweise**

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten**.

**Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.**

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B und C** sowie dem **Wahlteil D**.

Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.

Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Wahlaufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	35 BE,
im Teil B	25 BE,
im Teil C	15 BE,
im Teil D	15 BE.

#### **Erlaubte Hilfsmittel:**

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte
- Beiliegende "Materialien für Aufgaben zur Stochastik"

# Prüfungsinhalt

## Pflichtaufgaben

### Teil A: Analysis

Für jedes  $a$  ( $a \in \mathbb{R}; a > 0$ ) ist eine Funktion  $f_a$  durch  $f_a(x) = 1 - \ln(4x^2 + a)$  ( $x \in D_{f_a}$ ) gegeben.

- a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion  $f_a$  an.

Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion  $f_a$  achsensymmetrisch zur Ordinatenachse verläuft.

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen der Funktion  $f_a$  mit der Ordinatenachse an.

Geben Sie jeweils alle Werte  $a$  an, für die dieser Schnittpunkt oberhalb, unterhalb bzw. auf der Abszissenachse liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

- b) Weisen Sie nach, dass für die zweite Ableitungsfunktion der Funktion  $f_a$  gilt:

$$f_a''(x) = -8 \cdot \frac{a - 4x^2}{(4x^2 + a)^2} \quad (x \in D_{f_a''}).$$

Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunkts des Graphen der Funktion  $f_a$  und untersuchen Sie dessen Art.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

- c) Berechnen Sie den Wert  $a$ , für den die Funktion  $f_a$  an der Stelle  $x_0 = \frac{1}{4}\sqrt{e}$  eine Nullstelle hat.

Begründen Sie, dass die Funktion  $f_a$  für  $a > e$  keine Nullstelle besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- d) Der Graph der Funktion  $f_a$  besitzt genau zwei Wendepunkte  $P_a$  und  $Q_a$ . Die Tangenten an den Graphen der Funktion  $f_a$  in diesen beiden Punkten schneiden sich im Punkt  $T_a$ .

Berechnen Sie den Wert  $a$ , für den der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten  $P_a$ ,  $Q_a$  und  $T_a$  den Wert  $\frac{3}{4}$  besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 10

**Fortsetzung auf Seite 3**

### Fortsetzung Teil A: Analysis

- e) Für jedes  $b$  ( $b \in \mathbb{R}; b \neq 0$ ) ist eine Funktion  $g_b$  durch  $g_b(x) = x^2 + 3x + b$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) gegeben. Die Graphen der Funktionen  $f_4$  und  $g_{-4}$  begrenzen eine Fläche vollständig.  
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Inhalt dieser Fläche.  
Es gibt genau einen Wert  $b$ , für den sich die Graphen der Funktionen  $f_4$  und  $g_b$  in genau einem Punkt berühren.  
Berechnen Sie diesen Wert  $b$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 6

## Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind eine Gerade  $g$  durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}), \text{ für jedes } k \in \mathbb{R} \text{ eine Ebene } \varepsilon_k \text{ durch}$$

$\varepsilon_k: 4k \cdot x + (4k - 1) \cdot y - 5z = -26$  sowie die Punkte  $A(6; -15; 16)$  und  $C(18; -6; 1)$  gegeben.

Die Ebene  $\eta$  enthält die Gerade  $g$  sowie den Punkt  $A$ .

a) Begründen Sie, dass die Ebene  $\eta$  durch  $g$  und  $A$  eindeutig bestimmt ist.

Zeigen Sie, dass der Punkt  $C$  ebenfalls in  $\eta$  liegt.

Die Schnittpunkte  $S_x, S_y, S_z$  der Ebene  $\eta$  mit den Koordinatenachsen und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Körpers.  
Ermitteln Sie das Volumen dieses Körpers.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

b) Untersuchen Sie, ob es einen Wert  $k$  gibt, so dass die Gerade  $g$  die Ebene  $\varepsilon_k$  senkrecht schneidet.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Auf der Geraden  $g$  existieren genau zwei Punkte  $B$  und  $D$  derart, dass die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  Eckpunkte eines Quadrats mit der Diagonalen  $\overline{AC}$  sind.

Berechnen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Quadrats.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

d) Das Quadrat aus Aufgabenteil c) ist die Grundfläche eines Würfels. Es existieren gerade Kreiskegel, deren Grundfläche in der Ebene  $\eta$  liegen und die diesen Würfel vollständig enthalten. Unter diesen Kreiskegeln existiert genau ein Kegel mit kleinstmöglichem Volumen.

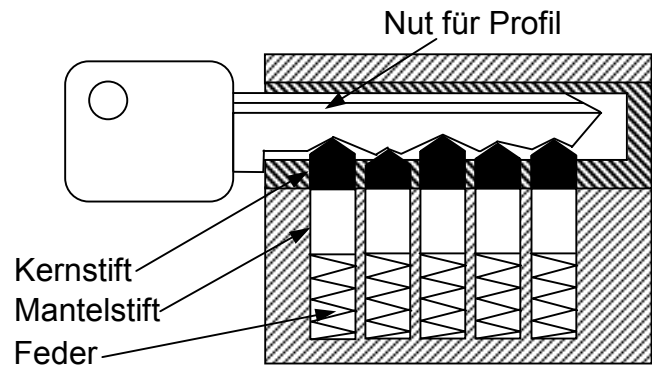
Ermitteln Sie den Radius des Grundkreises und die Höhe dieses Kegels.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

## Teil C: Stochastik

Ein Zylinderschloss lässt sich durch einen Schlüssel mit fünf Kerben schließen. Beim Einführen eines passenden Schlüssels in das Schloss werden die fünf Kernstifte so nach unten gedrückt, dass sich der Schlüssel drehen lässt (siehe Skizze).

Der kürzeste Kernstift kann 4,80 mm, der längste 8,20 mm lang sein. Die Längen dieser Kernstifte, welche die Tiefen der Kerben im Schlüssel bestimmen, gibt es in Abstufungen von 0,20 mm.



- a) Ermitteln Sie die Anzahl aller möglichen verschiedenen Schlösser, die aufgrund der Kernstiftlängen hergestellt werden können.

Schlüssel brechen häufiger ab, wenn der linke Kernstift zu lang ist. Deshalb wird festgelegt, dass die maximale Länge dieses Kernstifts 6,00 mm beträgt. Geben Sie die Anzahl der möglichen verschiedenen Schlösser an, die sich nach dieser Festlegung ergeben.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- b) Eine Art von Kernstiften soll eine Länge von 5,00 mm haben. Bei der Produktion dieser Stifte tritt eine Standardabweichung von 0,05 mm auf. Die Länge der Kernstifte wird als normalverteilt angenommen. Weicht die Länge eines dieser Stifte um mehr als 2 % vom Erwartungswert ab, kann er nicht mehr genutzt werden.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kernstift dieser Art nicht mehr genutzt werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- c) Erfahrungsgemäß müssen 5 % aller Schlösser innerhalb eines Jahres ausgewechselt werden. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 80 Schlössern genau fünf innerhalb eines Jahres ausgewechselt werden müssen.

Ein Hausmeister betreut in seinem Wohnkomplex 50 Wohnungen mit je einem Wohnungstürschloss.

Ermitteln Sie die Anzahl der erforderlichen Reserveschlösser, die dieser Hausmeister für den Zeitraum eines Jahres mindestens kaufen muss, damit diese Schlösser mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,8 reichen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

**Fortsetzung auf Seite 6**

### **Fortsetzung Teil C: Stochastik**

Bei der Herstellung von Schlüsseln wird zuerst das Profil angefertigt, anschließend werden die Kerben gefräst.

Ein Schlüssel schließt genau dann nicht, wenn er ein falsches Profil aufweist oder die Schließkerben falsch gefräst wurden.

In der Regel hat jeweils einer von 50 Schlüsseln nach der ersten Fertigungsphase ein falsches Profil. Erfahrungsgemäß stimmt die Fräsung der Schließkerben bei 98 % der Schlüssel mit richtigem Profil und bei 96 % der Schlüssel mit falschem Profil.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schlüssel nicht schließt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schlüssel ein falsches Profil besitzt, wenn die Fräsung der Schließkerben keinen Fehler aufweist.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

## Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

### Wahlaufgabe 1

Ein Fahrradteam bereitet sich auf eine Bergetappe vor. Das Streckenprofil lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem annähernd durch den Graphen einer Funktion  $f$  mit  $f(x) = 0,3 \cdot \sin(x + 1) + \ln(0,3 \cdot x + 1)$ ,  $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 20\}$  beschreiben. Eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer.

Der Start erfolgt im Punkt  $S(2; f(2))$ , das Ziel befindet sich auf dem letzten Gipfel der Strecke.

- a) Auf jedem Gipfel (einschließlich des Zieles) gibt es eine Bergwertung.

Geben Sie die Anzahl der Bergwertungen und einen Näherungswert für die Höhendifferenz vom tiefsten zum höchsten Punkt der Etappe in ganzen Metern an.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für den maximalen Anstiegswinkel bei dieser Etappe in Grad.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- b) Im Ziel soll lotrecht ein Kameramast aufgebaut werden, von dem aus der mittlere Gipfel eingesehen werden kann.

Beschreiben Sie ein mögliches Vorgehen, mit dem die Mindesthöhe des Mastes ermittelt werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

- c) Im Winter trainierte das Team in der Halle Einzelzeitfahren über eine bestimmte Strecke. Die dabei erreichten Zeiten sind annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu$  und der Standardabweichung  $\sigma = 20$  s. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Zeiten unter 12min25s erreicht werden, beträgt 0,3085.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erreichten Zeiten zwischen 12min30s und 12min50s liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- d) In Vorbereitung des Rennens absolvieren die Fahrer Trainingsabschnitte auf einem Ergometer. Beim Programmieren des Ergometers treten Probleme auf, da keine Softwareversion zur Verfügung steht, die das Streckenprofil hinreichend genau simuliert.

Eine vorhandene Softwareversion nutzt zur Simulation die Funktion  $w$  mit  $w(x) = 0,3 \cdot \sin(x + 1)$ ,  $D_w = \{x \mid x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 20\}$ .

Ein Merkmal für die Güte der Simulation ist die Genauigkeit der Übereinstimmung des Anstiegs.

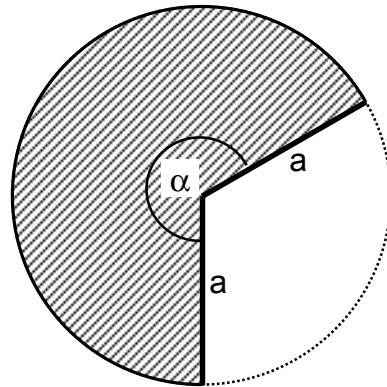
Zeigen Sie rechnerisch, dass mit zunehmender Streckenlänge der Anstieg der Funktion  $f$  durch den Anstieg der Funktion  $w$  immer besser angenähert wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

## Wahlaufgabe 2

Aus einer dünnen Kreisscheibe aus Papier mit dem Radius  $a = 3,0$  cm wird ein Sektor mit dem Zentriwinkel  $\alpha$  ausgeschnitten. Dieser Sektor (siehe schraffierter Teil der Abbildung) wird zu einem unten offenen Kreiskegel zusammengefügt.

Dieser Kegel wird durch eine entsprechende Kreisfläche geschlossen.



Skizze (nicht maßstäblich)

- a) Ermitteln Sie für  $\alpha = 300^\circ$  Näherungswerte für den Oberflächeninhalt und das Volumen dieses geschlossenen Kreiskegels.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- b) Es existiert genau ein Winkel  $\alpha$ , für den das Volumen des entstehenden Kreiskegels maximal ist.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Größe des Winkels  $\alpha$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Für ein Spiel werden 30 solcher Kreiskegel hergestellt. Diese 30 Kegel befinden sich in einer Urne und unterscheiden sich in der Farbe sowie dem aufgedruckten Muster. Die Farbe ist entweder gelb, rot oder blau. Auf die Kegel sind entweder Streifen oder Punkte gedruckt. Genau 12 Kegel besitzen Streifen, darunter sind genau 3 blaue und genau ein roter.

Der Spieler setzt 3 Euro ein und zieht zufällig aus dieser Urne einen Kegel.

Besitzt dieser Kegel Punkte, dann ist das Spiel beendet und der Einsatz ist verloren. Besitzt der gezogene Kegel Streifen, dann wird er beiseite gelegt und abschließend genau ein weiterer Kegel zufällig aus der Urne gezogen.

Besitzt der zweite Kegel ebenfalls Streifen und hat dieselbe Farbe wie der erste, dann werden  $z$  Euro ausgezahlt. Trägt der zweite Kegel Streifen, besitzt aber eine andere

Farbe als der erste, so werden  $\frac{z}{2}$  Euro ausgezahlt. Bei einem zweiten Kegel mit

Punkten wird nichts ausgezahlt.

- c) Ermitteln Sie, ab welchem ganzzahligen Wert von  $z$  der Spieler langfristig mit einem Gewinn rechnen kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

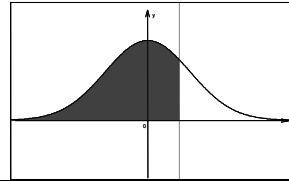


## Materialien für Aufgaben zur Stochastik

### Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000