Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2008, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 18.05.08.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichungen $f(x)=\frac{3x-2x^3}{x^2+1}$ (x ∈ $\mathbf{D}_f$) und g(x) = -2x (x ∈ $\mathbb{R}$).

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an.
Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f.
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten die Nullstellen der Funktion f.
Geben Sie Näherungswerte für die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f sowie deren Art an. Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F(x)=\frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)-x^2$ (x ∈ $\mathbf{D}_f$) eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig ein.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Flächeninhalt dieser Fläche.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die reelle Zahl c, für welche die Gerade x = c diese Fläche halbiert. Erreichbare BE-Anzahl: 6

c) Geben Sie den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen f und g an.
Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$, $u > 0$) schneidet die Gerade x =u den Graphen der Funktion f im Punkt P_u und den Graphen der Funktion g im Punkt Q_u.
Es gibt genau einen Wert u, für den die Länge der Strecke $\overline{P_u Q_u}$ maximal wird.
Ermitteln Sie diesen Wert u und geben Sie den maximalen Abstand an. Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion f' mit $f'(x)=\dfrac{-2x^4-9x^2+3}{(x^2+1)^2}$ ($x \in \mathbf{D_{f'}}$) die erste Ableitungsfunktion der Funktion f ist.
Untersuchen Sie rechnerisch, wie viele Tangenten an den Graphen der Funktion f parallel zum Graphen der Funktion g verlaufen.
Geben Sie eine Gleichung einer solchen Tangente an. Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Es gibt ganzrationale Funktionen zweiten Grades, die mit dem Graphen der Funktion f die beiden am weitesten voneinander entfernt liegenden Nullstellen gemeinsam haben und deren Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse sind.
Ermitteln Sie eine Gleichung einer solchen Funktion. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(0 | - 3 | 0), B(3 | 1 | 0), C(1 | 5 | 0) und D(-3 | 3 | 0) sowie die Ebene E mit der Gleichung z = 6 gegeben.

Das Viereck ABCD ist die Grundfläche eines vierseitigen geraden Prismas ABCDEFGH. Die Deckfläche EFGH dieses Prismas liegt in der Ebene E. Die Strecke $\overline{AE}$ ist Kante des Prismas.

a) Stellen Sie die Grundfläche des Prismas in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.
Zeigen Sie mithilfe des Skalarprodukts, dass das Viereck ABCD zwei rechte Innenwinkel besitzt.
Berechnen Sie das Volumen des Prismas. Erreichbare BE-Anzahl: 8

Auf der z-Achse befindet sich im Punkt L(0 | 0 | 10) eine punktförmige Lichtquelle.

b) Durch das einfallende Licht entsteht ein Schatten des Prismas in der x-y-Ebene.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes E_S des Punktes E. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Ein Schüler soll überprüfen, ob ein vom Punkt L in Richtung $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\5\\-4\end{pmatrix}$ ausgehender Lichtstrahl die Körperkante $\overline{EF}$ trifft. Er wählt folgenden Lösungsweg:
(1) Ermittlung der Gleichung der Geraden g durch L in Richtung Vektor a und der Gleichung der Geraden h durch die Punkte E und F.
(2) Untersuchung der Lagebeziehung zwischen den Geraden g und h: Schnittpunkt S(6; 5; 6).
(3) Schlussfolgerung: Der Laserstrahl trifft die Kante.
Untersuchen Sie den Lösungsweg auf Korrektheit und korrigieren Sie gegebenenfalls Fehler.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Eine Brauerei benutzt für ein Gewinnspiel Kronenkorken, die auf der Innenseite mit je genau einem Buchstaben bedruckt sind.

Die Besucher eines Brauereifestes können aus einer Urne derartige Kronenkorken nach verschiedenen Spielregeln ziehen und Preise gewinnen.

Die Urne enthält vor einer Ziehung 100 solcher Kronenkorken, darunter 25 mit dem Buchstaben S, 10 mit dem Buchstaben F, 45 mit dem Buchstaben A und 20 Kronenkorken mit anderen Buchstaben.

a) Aus der Urne werden drei Kronenkorken mit Zurücklegen entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
Ereignis A: Mindestens zwei Kronenkorken tragen den Buchstaben S.
Ereignis B: Es wird keiner der Buchstaben S, F und A gezogen. Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Berechnen Sie, wie viele Kronenkorken beim Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,90 mindestens ein Buchstabe F gezogen wird. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Hauptgewinne werden an die Besucher vergeben, die bei viermaligem Ziehen mit Zurücklegen vier Kronenkorken mit dem Buchstaben H gezogen haben.
Die Wahrscheinlichkeit eines Hauptgewinns beträgt $2{,}0736 \cdot 10^{-4}$.
Bestimmen Sie die Anzahl der Kronenkorken mit dem Buchstaben H, die in der Urne enthalten sind. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Eine Million Flaschen mit den Gewinnspiel-Kronenkorken, darunter 25000 mit dem Buchstaben W, sind in Kästen zu je 20 Flaschen an den Einzelhandel ausgeliefert worden.

d) Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bierkasten mindestens einen Kronenkorken mit dem Buchstaben W enthält. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Eine Gemeinde hat in einem ebenen Geländeabschnitt ein Grundstück Y erworben, um es als Gewerbegebiet zu erschließen.

In die Flurkarte der Gemeinde wird ein x-y-Koordinatensystem so eingetragen, dass die Bundesstraße von B-Dorf nach A-Stadt durch die x-Achse beschrieben wird.

Eine Längeneinheit entspricht 100 m.

Das erworbene Grundstück hat die Form eines Rechtecks mit dem Punkt C(-1; 3) als Eckpunkt.

Die Gerade g verläuft durch Punkt C in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und begrenzt das Grundstück. Die Punkte D(2; -2) und E(-2; -3) liegen auf je einer Seite des Rechtecks.

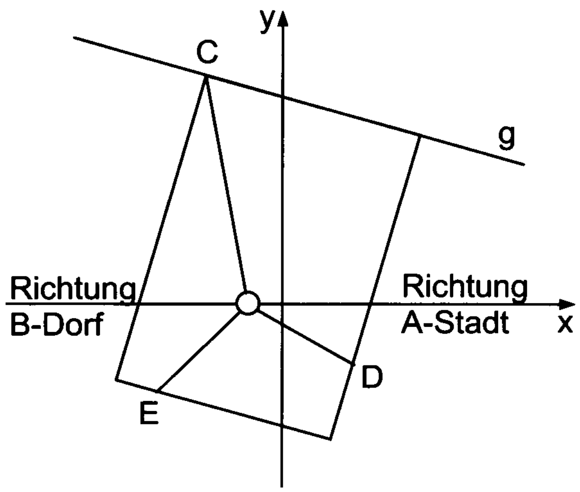

Abbildung 1: (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des erworbenen Grundstücks in Quadratmeter.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Von den Punkten C, D und E sollen Straßen geradlinig zu einem gemeinsamen Punkt auf der Bundesstraße, dem Mittelpunkt eines Kreisverkehrs, führen.
Aus Kostengründen soll die Summe der Längen der drei Straßen minimal werden.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreisverkehrs und die Gesamtlänge der Straßen.
Hinweis: Die Straßen breiten und der Durchmesser des Kreisverkehrs sind in den Berechnungen zu vernachlässigen. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Nach Fertigstellung der Straßen ergaben die Beobachtungen des Fahrzeugaufkommens, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 63,6% drei aufeinander folgende Fahrzeuge den Kreisverkehr an der Ausfahrt in Richtung A-Stadt verlassen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Fahrzeug den Kreisverkehr nicht an dieser Ausfahrt in Richtung A-Stadt verlässt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Der Gemeindeverband "Grünes Tal" plant die Sanierung der Freibadanlage. Im Zuge des notwendig werdenden Umbaus des 50,00 m langen und 25,00 m breiten Beckens soll auch ein Sprungturm mit der Höhe 3,00 m neu entstehen. Der Absprungpunkt liegt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit der Längeneinheit 1 m (siehe Abbildung).

Aus Sicherheitsgründen muss der Beckengrund im Sprungbereich auf 4,00 m Tiefe abgesenkt werden. Im Querschnitt des Beckens wird der ursprüngliche Verlauf des Beckengrundes mittels einer Geraden durch die Punkte A und C beschrieben.

Für die Koordinaten x und y der Punkte der Sprungbahn gilt die Gleichung:

$$y = (\tan\alpha)\cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 \cdot (\cos\alpha)^2}\cdot x^2 \quad .$$

Die Variablen haben folgende Bedeutung:

α: Absprungwinkel;

v_0: Absprunggeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$;

g: Fallbeschleunigung in $\frac{m}{s^2}$.

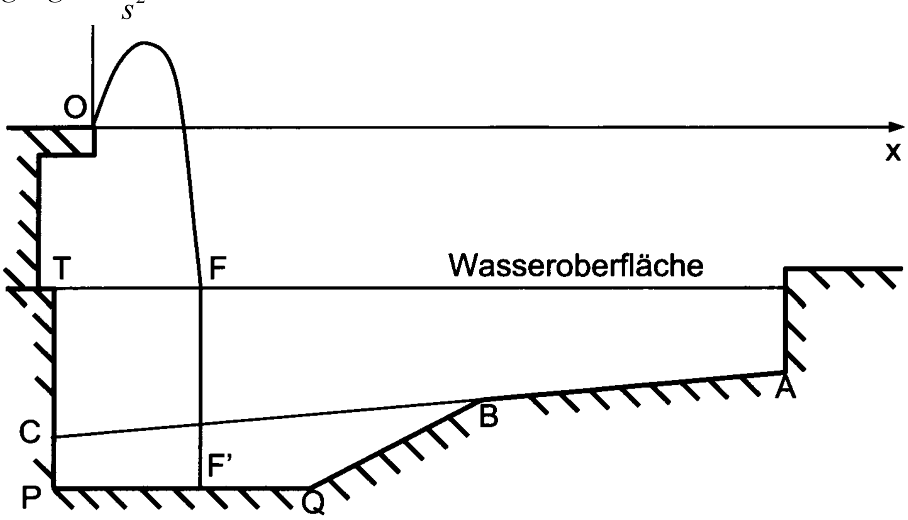

Abbildung 2: (nicht maßstäblich)

Die Punkte haben folgende Koordinaten: O(0 | 0), A(49,00 | -4,20), B(24,00 | -4,80), P(-1,00 | -7,00), T(-1,00 | -3,00), C(-1,00 | y_C), Q(x_Q | -7,00), F(x_F | -3,00), F'(x_F | -7,00)

F ist der Eintauchpunkt des Springers in das Wasser, F' der dazugehörige Lotfußpunkt auf dem Beckengrund.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung für die Punkte der Sprungbahn für $\alpha = 45°$; $v_0 = 5{,}0$ und $g = 9{,}81$ in die Gleichung $y = x - 0{,}3924\, x^2$ übergeht.
Der Punkt Q bezeichnet das Ende des Sprungbereiches.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes Q, so dass $\overline{PF'} = \overline{F'Q}$ gilt.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Das Becken wird so erweitert, dass der Punkt Q die Koordinaten Q(9,64; -7,00) besitzt. Dadurch erhöhen sich die Wasserkosten.

Ermitteln Sie die durch den Umbau des Beckens zusätzlich benötigte Wassermenge in Kubikmeter sowie den prozentualen Mehrbedarf an Wasser gegenüber dem Ausgangszustand.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Lösungsvorschläge

Teil A

a) Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$
Untersuchung auf Symmetrie: es gilt f(-x) = -f(x)
Aussage: Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung
Ansatz für Nullstelle: $f(x_0) = 0 \Rightarrow 3x - 2x^3 = 0 \Rightarrow x \cdot (3-2x^2)=0$
Nullstellen: $x_{01} = 0$; $x_{0_2} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$; $x_{0_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$
Koordinaten und Art der Extrempunkte (2 BE): P_{MIN} (-0,56 | -1,01), P_{MAX} (0,56 | 1,01)

b) Nachweis für Stammfunktion (2 BE): F'(x) = f(x); wegen $F'(x) = \frac{5}{2} \frac{2x}{x^2+1} - 2x = \frac{5x - 2x(x^2+1)}{x^2+1}$

Ansatz für Flächeninhalt: $A = \int_0^{\sqrt{3/2}} f(x)\,dx$ GTR: `fnInt(Y1,X,0,√1.5)` → 0.7907

Flächeninhalt: A ≈ 0,79

Ansatz für Wert c: $\frac{0.7907}{2} = \int_0^c f(x)\,dx \approx 0.3954$

GTR: `solve(fnInt(Y1,X,0,C)-0.3953634148,C,.75)` → 0.5868
Wert c: c ≈ 0,59

c) Koordinaten des Schnittpunktes: S(0 | 0)
Zielfunktion: d(u) = f(u) – g(u)
GTR: `fMax(Y1-Y2,X,0,2)` → 1
Extremstelle: $x_E = 1$
maximaler Abstand: $d(x_E) = 2{,}5$

d) Nachweis (2 BE): Quotientenregel $f'(x) = \frac{(3-6x^2)(x^2+1)-(3x-2x^3)(2x)}{(x^2+1)^2}$

Ansatz für Anzahl der Tangenten: $f'(x_S) = -2 \Rightarrow -2x_S^4 - 9x_S^2 + 3 = -2 \Rightarrow x_{S_{1/2}} = \pm 0.7071$
Anzahl der Tangenten: 2
eine Gleichung einer Tangente: z. B. y = -2x + 2,5 oder y = -2x – 2,5

e) Ansatz für eine Gleichung einer Funktion h (2 BE):
Da die Nullstellen enthalten sein müssen, gilt mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$:
$h(x) = a \cdot (x - \sqrt{1.5}) \cdot (x + \sqrt{1.5}) = a \cdot (x - 1.5)^2$
eine Gleichung einer Funktion h: z. B. $h(x) = x^2 - 1{,}5$ $(x \in \mathbb{R})$

Teil B

a) Darstellung des Trapezes

Nachweis für Trapez (2 BE): es sind zwei Seiten parallel zueinander $\vec{AD} = \frac{3}{2} \cdot \vec{BC}$

Nachweis für rechte Winkel (2 BE): $\vec{BC} \cdot \vec{DC} = 0$ ⇒ ∢BCD = 90° und ∢CDA = 90°

Ansatz für Flächeninhalt der Grundfläche: $A_G = |\vec{CD}| \cdot \frac{|\vec{AD}| + |\vec{BC}|}{2} = 25$

Ansatz für Volumen des Prismas: $V = A_G \cdot 6$
Volumen: V = 150

b) Gleichung einer Geraden: $\vec{x} = \vec{OL} + s \cdot \vec{EL}$

Ansatz für Durchstoßpunkt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{OL} + s \cdot \vec{EL}$ $\Rightarrow$ s = -2.5

Koordinaten des Punktes E_S: E_S (0 | -7,5 | 0)

c) Schritt (1): korrekt
Schritt (2): korrekt
Schritt (3): nur Schlussfolgerung S ∈ h möglich
Korrektur: Überprüfung, ob $S \in \overline{EF}$ gilt: aus $\vec{OS} = \vec{OE} + s \cdot \vec{EF}$ $\Rightarrow$ s = 2, nur falls 0 ≤ s ≤ 1 liegt S auf der Kante.

Teil C

a) Ansatz: $P(A) = b_{3;.25}(2) + b_{3;.25}(3)$
Wahrscheinlichkeit: P(A) ≈ 0,1563
Ansatz: $P(B) = .2^3$
Wahrscheinlichkeit: P(B) ≈ 0,0080

b) Ansatz: $1 - (1 - .1)^n < .9$
Anzahl: 22

c) Ansatz: $p^4 = 2{,}0736 \cdot 10^{-4}$
Ergebnis: 0,12

d) Ansatz: p = .025; Wahrscheinlichkeit, dass kein W unter den Buchstaben ist: $.975^{20} \approx 0.6027$
Ergebnis: 0,3973

Teil D1

a) Zur Lösung ein wenig Geometrie in der x-y-Ebene:
Gerade durch C mit dem Anstieg $m = \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{-1}{3}$ und $n = y_C - mx_C \Rightarrow g_{Nord}$: y = -x/3 + 8/3;
Senkrechte dazu durch C: $m_s = 3$ und $n = y_C - m_s x_C \Rightarrow g_{West}$: y = 3x + 6;
Parallele zu g_{West}: $n = y_D - mx_D \Rightarrow g_{Süd}$: y = 3x + 4 und g_{Ost}: y = -x/3 - 11/3
$P = g_{Nord} \cap g_{Ost}$: (3.2 | 1.6) und $Q = g_{West} \cap g_{Süd}$: (-2.9 | -2.7)
Längen der Rechteckseiten: $\overline{PC} \approx 4.4272$; $\overline{QC} \approx 6.0083$
Flächeninhalt: A ≈ 26.6 in FE² = (100 m)²
Ansatz und Koordinaten eines zweiten Eckpunktes
Länge einer Rechteckseite
Ansatz und Koordinaten eines weiteren Eckpunktes
Länge der zweiten Rechteckseite
Flächeninhalt: A ≈ 266000 m²

b) R(x | 0) ist ein Punkt auf der x-Achse; die Abstände der Punkte ergeben sich zu $\sqrt{(x_C - x)^2 + y_C^2}$
Zielfunktion:
$d(x) = \sqrt{(x_C - x)^2 + y_C^2} + \sqrt{(x_D - x)^2 + y_D^2} + \sqrt{(x_E - x)^2 + y_E^2}$
$d(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 + 4x + 13} + \sqrt{x^2 + 2x + 10}$
GTR: `fMin(d(x),X,-1,0)` → **-0.2485**
d(-0.2485) → 9.5758
Koordinaten des Mittelpunktes: M(-0,25 | 0,00)
Summe der Straßenlängen: l ≈ 958 m

c) Ansatz: $1 - \sqrt[3]{.636}$
Wahrscheinlichkeit: p ≈ 0,14

Teil D2

a) Einsetzen in die Ausgangsgleichung: $y(x) = 1 \cdot x - \dfrac{9.81}{2 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2}} \cdot x^2$

Überprüfen der Näherung
Ansatz zur Berechnung der Koordinaten der Punkte F und F':
$y(x_F) = -3 \Rightarrow x_F = 4.3187$
$x_Q = 2\,x_F + 1 = 9.6374$
Koordinaten der Punkte F und F'
Ansatz zur Berechnung der Abszisse des Punktes Q
Abszisse des Punktes Q: $x_Q \approx 9{,}64$

b) Ansatz für Volumen:
Bestimme Koordinaten von C: Gerade durch AB: $g_{AB}(x) = 0.024 \cdot x - 5.376$; $y_C = g_{AB}(-1) = -5.4$
$A_{\Delta PQC} = \frac{1}{2}(x_Q + 1)(x_P - x_C) \approx 8.512$; $A_{\Delta QBC} = \frac{1}{2}|\vec{CQ}||\vec{CB}|\sin(\sphericalangle QCB) \approx 23.192$; $A_{PQBC} \approx 31.704$;
$V = 25 \cdot A_{PQBC} \approx 792.6$
Volumen: $V \approx 790\ m^3$
Ansatz für prozentualen Mehrbedarf: $A_{Trapez} = \frac{1}{2}((y_C - y_T) + (y_A - y_T)) \cdot 50 = 90$
$p = A_{PQBC}/A_{Trapez} \cdot 100\%$
Mehrbedarf: 35%