Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2008, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 23.08.08.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jede reelle Zahl a ($a > 0$) ist eine Funktion f_a mit $f_a(x)=4 \cdot x \cdot (1-a \cdot \sqrt{x})$ ($x \in \mathbf{D}_{fa}$) definiert.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $\mathbf{D}_{fa}$ an.
Zeigen Sie, dass für jedes a der Koordinatenursprung auf dem Graphen der Funktion f_a liegt.
Außerdem existiert für jedes a ein weiterer gemeinsamer Punkt Z_a des Graphen der Funktion f_a mit der Abszissenachse.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes Z_a an und zeigen Sie, dass der Anstieg der Tangenten im Punkt Z_a stets unabhängig von a ist.
Berechnen Sie für jedes a die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion f_a

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

und untersuchen Sie die Art des Extremums.
Begründen Sie, dass kein a existiert, für das der Graph der Funktion f_a einen Wendepunkt besitzt.
Geben Sie den Wertebereich von f_a an. Erreichbare BE-Anzahl: 12

b) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$, $0 < u < a^{-2}$) sind die Punkte $P_a(u \mid f_a(u))$, $Q(u \mid 0)$ und der Koordinatenursprung Eckpunkte eines Dreiecks.
Es gibt genau einen Wert u, für den der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird.
Berechnen Sie diesen Wert u.
Ermitteln Sie den Wert a, für den sich ein maximaler Flächeninhalt von ½ ergibt.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Für jedes a begrenzen der Graph der Funktion f_a und die Abszissenachse eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Wert a, für den der Inhalt dieser Fläche $\frac{81}{40}$ beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Für jedes x ($x \in \mathbb{R}$, $x > 0$) ist die Funktion $f_{1/2}$ Stammfunktion einer Funktion $g_{1/2}$.
Berechnen Sie alle Werte von t ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$), für die gilt: $\int_t^x g_{\frac{1}{2}}(z)\,dz < f_{\frac{1}{2}}(x)$.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A $(4 \mid 0 \mid -1)$, B $(0 \mid 4 \mid -1)$ und C$(4 \mid 4 \mid 3)$ sowie für jedes t ($t \in \mathbb{R}$) ein Punkt $S_t(3+t \mid 3+t \mid -t)$ gegeben.

Es gibt Punkte St' für die das Dreieck ABC Grundfläche einer Pyramide $ABCS_t$ ist.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der die Punkte S_t liegen. Erreichbare BE-Anzahl: 1

b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Ermitteln Sie alle Werte t, für die A, B, C und S_t Eckpunkte einer Pyramide sind.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass diese Pyramide $ABCS_t$ gerade ist.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS_t$. Erreichbare BE-Anzahl: 6

d) Es existiert genau ein Wert t, für den die Punkte $P(5 \mid 6 \mid -10/3)$, A, B und S_t in einer Ebene liegen.
Ermitteln Sie diesen Wert t. Erreichbare BE-Anzahl: 2

e) Es gibt Pyramiden $ABCS_t$ mit einem rechtwinkligen Dreieck als Seitenfläche.
Begründen Sie, dass für diese Pyramiden alle Seitenflächen rechtwinklige Dreiecke sind.
Berechnen Sie alle Werte t, für die Pyramiden mit rechtwinkligen Seitenflächen entstehen.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Stefan und Tina nutzen ein Computerprogramm, das zufällig jeweils eine der Zahlen -1; 0 oder +1 erzeugt. Erfahrungsgemäß tritt die Zahl -1 zu 20%, die Zahl 0 zu 30% und die Zahl +1 zu 50% auf.

a) Ein Zufallsexperiment besteht darin, dass drei Zahlen erzeugt werden.
Betrachtet wird die Summe dieser drei Zahlen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Die Summe dieser Zahlen beträgt -2.
Ereignis B: Bei vier Durchführungen dieses Zufallsexperimentes kommt genau zwei Mal die Summe - 2 vor.
Ereignis C: Bei zwei Durchführungen dieses Zufallsexperimentes kommt mindestens ein Mal die Summe 0 vor. Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) In einem Spiel rufen Tina und Stefan abwechselnd mit ihrem Computerprogramm eine Zahl ab, insgesamt aber höchstens 5 Zahlen. Stefan beginnt das Spiel.
Gewonnen hat derjenige, der zuerst die Zahl -1 erhält.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der Stefan gewinnt.
Der Sieger bekommt vom Verlierer das Quadrat der Anzahl der abgerufenen Zahlen in Euro. Hat nach dem 5. Abruf niemand gewonnen, zahlt Stefan an Tina einen Betrag x.
Ermitteln Sie den Betrag x so, dass das Spiel fair ist. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Tina und Stefan testen ein entsprechendes Computerprogramm eines Mitschülers.
40% der ermittelten Zufallszahlen waren +1, davon hat Tina 55 % ermittelt. Von den anderen Zufallszahlen hat Tina 50 % ermittelt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die von Tina ermittelten Zufallszahlen nicht +1 sind.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Es gibt verschiedene Arten von Sonnenuhren. Bei den vertikalen Sonnenuhren befindet sich das Ziffernblatt auf einer vertikalen Projektionsebene, z. B. einer Häuserwand. An dieser ist ein zu dieser Ebene geneigter Schattenstab befestigt.

Die Projektionsebene einer vertikalen Sonnenuhr sei die x-z-Koordinatenebene eines kartesischen Koordinatensystems (1 Einheit entspricht 1 m), dessen x-Achse in Ost-West-Richtung verläuft.
Der Schattenstab ist im Koordinatenursprung befestigt und endet im Punkt P(0,00; -0,20; -0,25).

a) Die Neigung des Schattenstabes gegenüber der x-y-Ebene entspricht näherungsweise der geographischen Breite des Aufstellungsortes der Sonnenuhr.
Berechnen Sie die geographische Breite des Aufstellungsortes der Sonnenuhr.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Durch die Länge des Schattens lässt sich mit Sonnenuhren auch das Datum anzeigen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt fallen die Sonnenstrahlen in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ ein.
Bestimmen Sie die Länge des Schattens auf der Projektionsebene. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Zwischen einer Sonnenuhr und einer mechanischen Uhr gibt es Zeitabweichungen Δt_1 durch die Ellipsenbewegung der Erde um die Sonne und Zeitabweichungen Δt_2 durch die Neigung der Erdachse. Die gesamte Zeitabweichung Δt (in Minuten) kann an einem bestimmten Ort näherungsweise durch folgende Zeitgleichung modelliert werden:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 8 \cdot \sin\left(\frac{360\,°}{365{,}25} \cdot (T - 185)\right) + 10 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot 360\,°}{365{,}25} \cdot (T - 80)\right) \quad (T \in \mathbb{R},\ 0 < T \leq 365)$$

Die Variable T kennzeichnet die Tage eines Nichtschaltjahres (für den 1. Januar gilt $0 < T \leq 1$, für den 2. Januar gilt $1 < T \leq 2$ usw.).
Geben Sie einen Tag des Jahres an, an dem zu einem bestimmten Zeitpunkt die Zeitabweichung Δt_2 keinen Einfluss auf Δt hat.
Bestimmen Sie ein Datum eines Jahres, an dem die Sonnenuhr und die mechanische Uhr gleich gehen.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die maximale Zeitabweichung Δt. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Die Schönfelder Papierfabrik im Erzgebirge stellt verschiedene Arten von Recycling-Papieren her. Bei der Herstellung wird das Papier am Ende der Papiermaschine auf einen Tambour (Trommel) mit einem Durchmesser von 40,0 cm aufgewickelt (siehe Abbildung).

Der Tambour rotiert um eine Achse, die in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 m) durch die Gleichung

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}11,00\\3,00\\3,00\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2,00\\5,00\\0,00\end{pmatrix}\quad (t\in\mathbb{R},\ 0\le t\le 0{,}68)$$

beschrieben werden kann.

Das Papier wird mit einer Breite von 330 cm mittig auf dem Tambour aufgerollt.

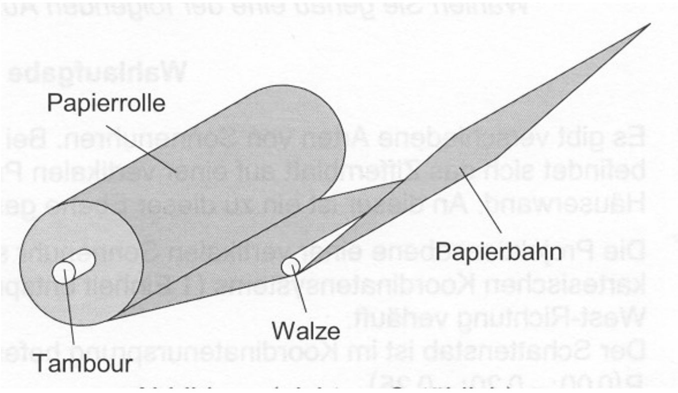


Abbildung 1: (nicht maßstäblich)

a) Der Tambour ist so lang wie seine Drehachse.
Ermitteln Sie, wie weit der Tambour auf jeder der beiden Seiten der Papierrolle übersteht.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Zu Beginn der Aufwicklung auf den leeren Tambour verläuft die Papierbahn zwischen Tambour und der dazu parallelen Walze in der Ebene E mit der Gleichung $5x+2y-14z=22$.
Der Durchmesser der Walze wird für den folgenden Sachverhalt vernachlässigt.
Auf der Walze existiert ein Punkt P(15,00; 12,00; 5,50).
Zeigen Sie, dass der Punkt P in der Ebene E liegt und dass die Ebene E den Tambour berührt.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Bei der Herstellung einer bestimmten Papiersorte beträgt die Papierdicke 0,10 mm.
Ein Quadratmeter dieses Papiers hat eine Masse von 60,0 g.
Berechnen Sie die Masse des aufgewickelten Papiers, wenn der Durchmesser der auf dem Tambour aufgewickelten Rolle 140 cm beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

Lösungsvorschläge

Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $D_{fa} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$
Nachweis für Koordinatenursprung: $f_a(0)=0$
Koordinaten des Punktes: $f_a(x_0) = 0 \Rightarrow Z_a(a^{-2}|0)$
1. Ableitung: $f'_a(x) = 4 - 6a \cdot \sqrt{x}$
Begründung der Unabhängigkeit (2 BE): $f'_a(a^{-2}) = -2$
mögliche Extremstelle: $f'_a(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = 4/(9a^2)$
Untersuchung der Art des Extremums (2 BE): $f''_a(x) = -3a/\sqrt{x}$ und $f''_a(x_E) = -4.5\, a^2 < 0 \Rightarrow$
Koordinaten des lokalen Maximumpunktes: $P_{MAX}\left(\frac{4}{9a^2}\middle|\frac{16}{27a^2}\right)$
Wendestellen: $f''_a(x_W) = 0 \Rightarrow$ hat keine Lösung, somit auch keine Wendestellen
Wertebereich: $W_{f_a}=\left\{y \middle| y\in\mathbb{R},\, y\leq\frac{16}{27a^2}\right\}$

b) Zielfunktion: $A_a(u) = \frac{1}{2} \cdot f_a(u) \cdot u$
1. Ableitung: $A'_a(x) = x \cdot (4 - 5 \cdot a \cdot \sqrt{x})$
Wert u: $u_{max}(a)=\frac{16}{25a^2}$
Ansatz für Wert a: $A_a(u_{max}) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \ldots$
Wert a: $a=\sqrt[4]{\frac{1024}{3125}}$

c) GTR[2]: `Y1 := 4·X·(1 - A·√X)`
$\int_0^{x_0} f_a(x)\,dx=\frac{81}{40} \underset{GTR}{\Rightarrow}$ `solve(fnInt(Y1,X,0,A^-2)-81/40,A)` $\rightarrow a = .66667$
oder
eine Gleichung einer Stammfunktion
Ansatz für Flächeninhalt
Flächeninhalt: $A(a)=\frac{2}{5a^4}$
Ansatz für Wert a
Wert a: $a=\frac{2}{3}$

d) Ansatz: $\int_t^x g_{\frac{1}{2}}(z)\,dz<f_{\frac{1}{2}}(x) \;\Rightarrow\; f_{\frac{1}{2}}(x)-f_{\frac{1}{2}}(t)<f_{\frac{1}{2}}(x) \;\Rightarrow\; 0<f_{\frac{1}{2}}(t)$
Ungleichung in Abhängigkeit von t: $0 < 2 \cdot t \cdot (2 - \sqrt{t})$
Werte t: $0 < t < 4$

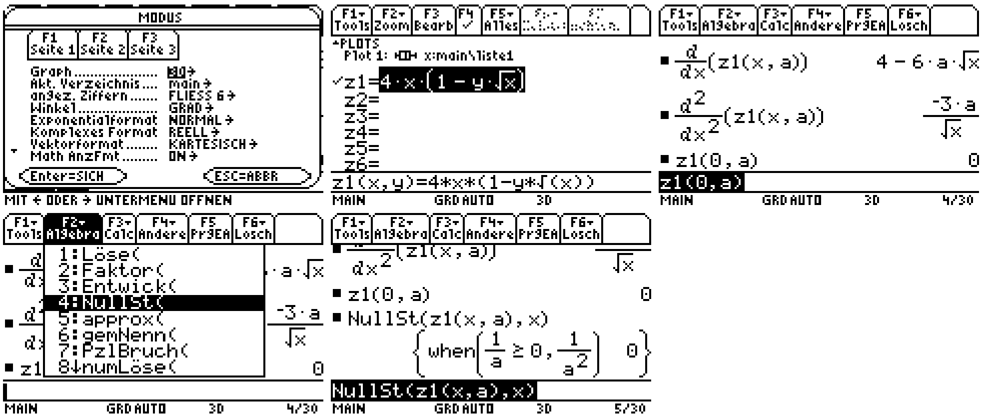
---

2 Anmerkung: müsste meiner Meinung nach alle 5 BE ergeben

CAS

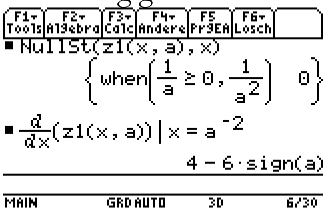
Ab dem nächsten Jahr ist es möglich Taschenrechner mit Computer-Algebra-System (CAS) einzusetzen. Die hier gestellten Aufgaben sind nicht dafür vorgesehen. Trotzdem möchte ich in den mit CAS überschriebenen Abschnitten die wesentliche Schritte mit dem TI-89 demonstrieren.
Nach wie vor bleibt das Erkennen der Ansätze das Wichtigste[3]. Das CAS kann lediglich Rechnungen vereinfachen.

- (Teilaufgabe a)
  Umstellen auf 3D (Mode); eintragen der Funktion; Ableitungen; Nachweis $f_a(0) = 0$; weitere Nullstellen



  und Interpretation des Ergebnisses: wegen der Voraussetzung a > 0 ist natürlich auch 1/a > 0 demzufolge ist $x = a^{-2}$ eine weitere Nullstelle;

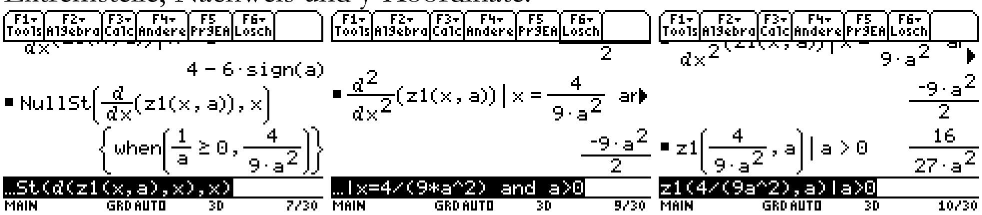
- Unabhängigkeit des Anstieges an der gefundenen Stelle:



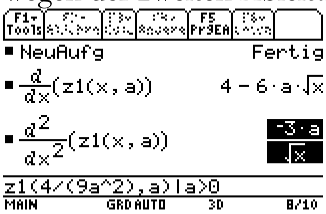
  beachten Sie die Schreibweise |x = ...
  sie wird gelesen als „**mit** x gleich a hoch -2"

  sign(a) ist die Vorzeichen-Funktion (Signum); sie ergibt 1, 0 oder -1, je nach Vorzeichen; in unserem Fall immer 1; also 4 – 6 = -2; der Anstieg ist immer -2 und hängt nicht von a ab.

- Extremstelle, Nachweis und y-Koordinate:



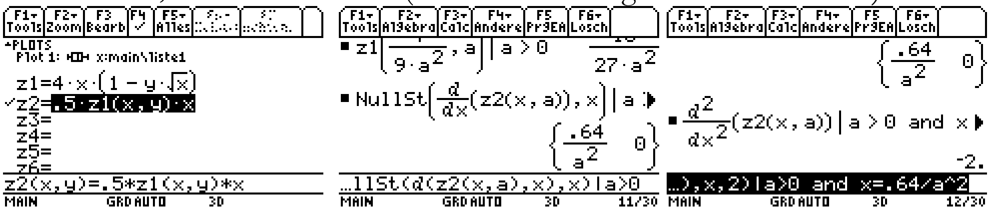
  wegen der zweiten Ableitung kann es keine Wendepunkte geben:



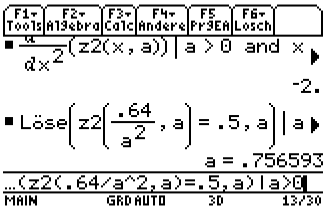
- (Teilaufgabe b)

3 Die Ansätze sind jeweils oben genannt und werden nicht nochmals aufgeführt.

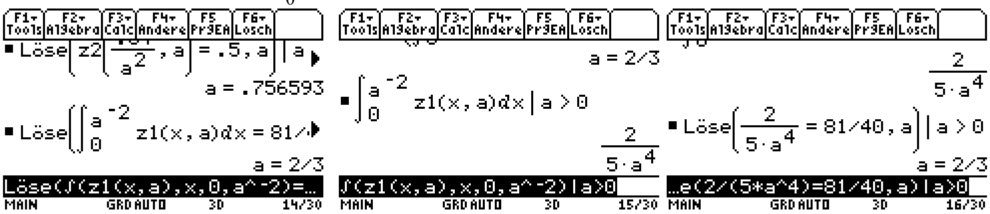
- Zielfunktion; Maximum suchen (die zweite Lösung u = 0 ist irrelevant)



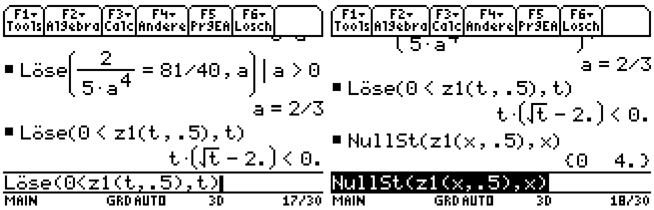
maximaler Flächeninhalt ½



- (Teilaufgabe c) Löse $\int_0^{a^2} f_a(x)\,dx = \frac{81}{40}$ oder mit Zwischenergebnissen



- Ungleichung lösen $0 < f_{\frac{1}{2}}(t)$; scheinbar ist doch etwas Handarbeit erforderlich



Teil B

a) Gleichung der Geraden: $S_t(3+t \mid 3+t \mid -t) \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \vec{x}$

b) Nachweis (2 BE): d(AB) = d(AC) = d(BC) = 4√2

c) Ansatz für Werte t: E_{ABC}: x + y - z = 5 (mit GTR: prgmGeometri)
$S_t \in E_{ABC}$: (3 + t) + (3 + t) - (-t) = 5

Werte t: t ∈ ℝ und $t \neq -\frac{1}{3}$

Nachweis für gerade Pyramide (2 BE):
1.) der Normalenvektor von E_{ABC} ist identisch mit dem Richtungsvektor von S_t
2.) der Schwerpunkt von ΔABC ist S = (8/3| 8/3 | 1/3) = $S_{-\frac{1}{3}}$

Ansatz für Volumen: $V(t) = \frac{1}{3} A_G h = \frac{1}{3} 8\cdot\sqrt{3}\cdot\overline{S_t S_{-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3} 8\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{|3\cdot t+1|}{\sqrt{3}}$

Volumen der Pyramiden: $V(t) = \left|8t + \frac{8}{3}\right|$

d) Ansatz für Wert t:
GTR – prgmGeometri | Abstand Gerade-Ebene (führt zum Schnittpunkt und zum Parameter t)
Wert t: t = 5

e) Begründung: Da die Grundfläche eine gleichseitiges Dreieck ist, sind die Seitenfläche kongruent.
Ansatz für Werte t
Variante I:
Ich betrachte die Seitenfläche ABS_t. Nach dem Satz des Thales umschließt das rechtwinklige Dreieck ein Kreis der Form: $\left(\overrightarrow{OM_{\overline{AB}}}-\vec{x}\right)^2=\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$.[4]

Vereinfacht ergibt sich $\left(\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}-\vec{x}\right)^2=8$.

Diese Kugel wird von S_t durchstoßen (siehe Teilaufgabe a)): $\left(\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\right)^2=8$.

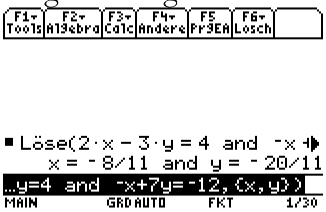
Variante II: ist einfacher
$\vec{AS}_t\cdot\vec{BS}_t=0 \quad \Rightarrow 0 = (t-1)\cdot(3t+5)$
Quadratische Gleichung: $3\cdot t^2 + 2\cdot t - 5 = 0$
Werte t: $t_1 = 1$, $t_2 = -5/3$

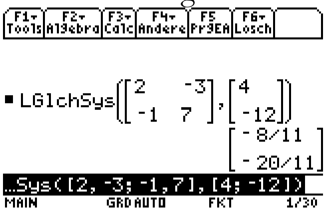
CAS

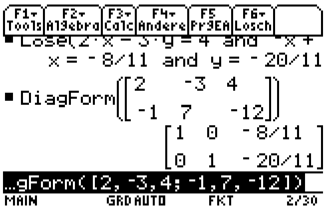
Für die Geometrie ist der TI-89 nicht ganz so gut gerüstet. Vektoren können jedoch verarbeitet werden und Gleichungen gelöst.

Kurzer Exkurs zum Lösen von linearen Gleichungssystemen: gegeben seien die Gleichungen $2x - 3y = 4$ und $-x + 7y = -12$.

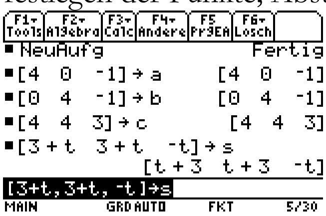
Es gibt 3 mögliche Varianten eine Lösung zu finden. Befehle mit

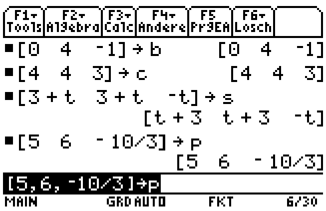


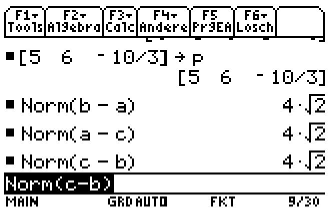




- Teilaufgabe a) lässt sich leicht ohne CAS lösen
- Teilaufgabe b)
  festlegen der Punkte; Abstände berechnen

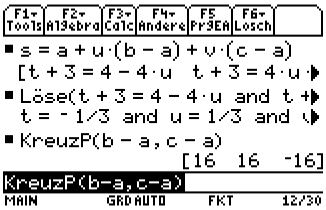


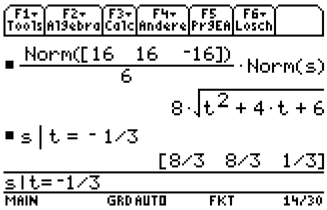


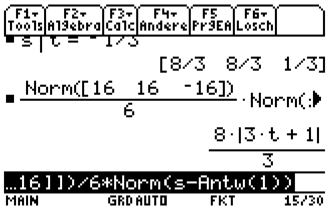


- Teilaufgabe c) Schnittpunkt von S_t und E_{ABC}; Kreuzprodunkt der Ebene zeigt dass die Ebenennormale von E_{ABC} parallel ist zum Richtungsvektor von S_t; Volumen

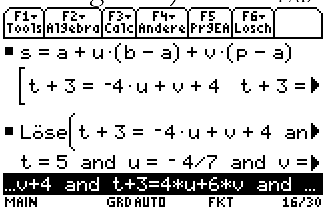
4 Der Mittelpunkt des Kreises $M_{\overline{AB}}$ ist der Mittelpunkt der Strecke AB. Der Radius ist $\frac{\overline{AB}}{2}$.
Der Thales-Kreis ist vielmehr eine Thales-Kugel.



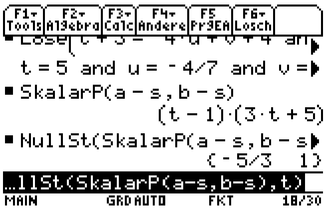




- Teilaufgabe d) bilde E_{PAB} und schneide mit S_t



- Teilaufgabe e) das Skalarprodukt $\vec{AS_t} \cdot \vec{BS_t} = 0$



Teil C

a) Wahrscheinlichkeit von Ereignis A: P(A) = 0,0360 = P(X = -2)
   Wahrscheinlichkeit von Ereignis B: P(B) = 0,0072 = $b_{4,036}(2)$
   Ansatz für Wahrscheinlichkeit von Ereignis C: P(C) = $(1 - P(X = 0))^2$
   Wahrscheinlichkeit von Ereignis C: P(C) = 0,3712

Wahrscheinlichkeits-
verteilung zu a)

x_i	$P(X=x_i)$
-3	0,008
-2	0,036
-1	0,114
0	0,207
1	0,285
2	0,225
3	0,125

b) Wahrscheinlichkeit, dass Stefan gewinnt: p = 0,4099
   Y sei diejenige Zufallsgröße, die beschreibt wer gewinnt.
   P(Y = Stefan) = .2 + .8 ·.8 ·.2 + .8 ·.8 ·.8 ·.8 ·.2
   P(Y Tina) = .8 ·.2 + .8 ·.8 ·.8 ·.2 = 0.2624
   P(Y = niemand) = 1 – 0.4099 – 0.2624 = $.8^5$ = 0.32768
   vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung (2 BE)
   Z sei diejenige Zufallsgröße, die beschreibt wieviel Tina gewinnt.
   E(Z) = .2 ·1€ + .8 ·.2 ·4€ - $.8^2$ ·.2 ·9€ + $.8^3$ ·.2 ·16€ - $.8^4$ ·.2 ·25€ + $.8^5$ · z€ = 0
   ⇒ z = 3.4229
   Ergebnis: x = 3,42€

c) Ansatz für bedingte Wahrscheinlichkeit
   X – Zufallsgröße für ermittelte Zufallszahl: P(X=1) = .4
   Y – Zufallsgröße für von Person ermittelte Zahlen
   $P_{X=1}(Y = \text{Tina}) = .55$; $P_{X\neq 1}(Y = \text{Tina}) = .5$
   bedingte Wahrscheinlichkeit: p ≈ 0,5769 = $P_{Y=\text{Tina}}(X\neq 1)$

Teil D1

a) Ansatz für geographische Breite: z. B. $\tan\alpha = \frac{z_p}{y_p}$
   Ergebnis für geographische Breite: 51,3°

b) Ansatz für Länge des Schattens (2 BE)

$$\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-.2\\-.25\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-5\end{pmatrix}\quad\Rightarrow s = .05 \text{ und } z = .5$$

Länge des Schattens: 0,50 m

c) Angabe des Tages: 80. Tag (21. März)
Ansatz: Abbildung 2 und Konsultation der Wertetabelle ergibt Nullstellen am 106., 162., 241. und 357. Tag
Angabe eines Datums: 17.04., 12.06., 30.08. oder 24.12.
Ansatz: GTR `fMax(Y1,X,280,320)` → 17.0071
maximale Zeitabweichung: 17,0 min

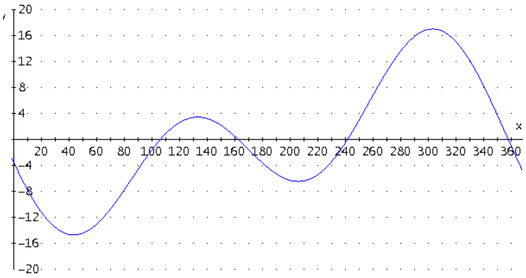
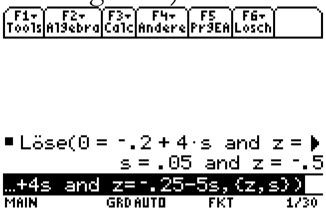


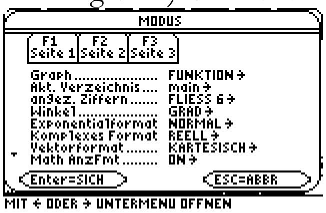
Abbildung 2: Δt-T-Diagramm

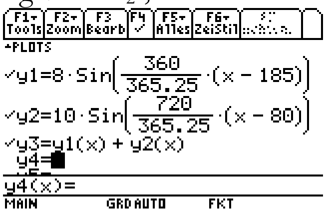
CAS

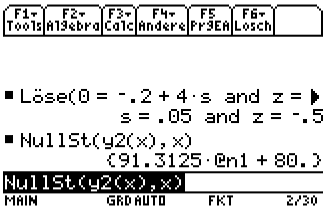
- Teilaufgabe b) lösen des lGS



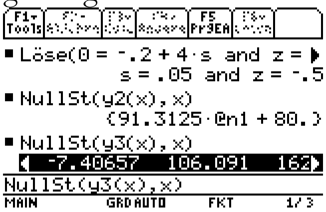
- Teilaufgabe c) Untersuchung von Δt_2[5];

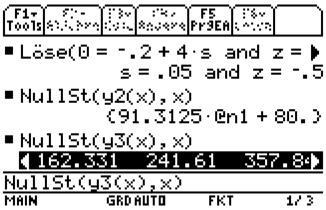


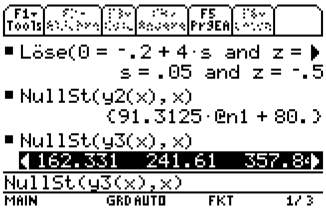




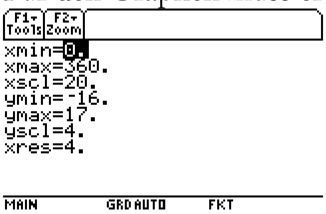
gleich gehende Uhren: Sie erhalten eine Liste mit Nullstellen.

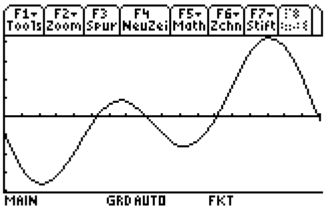




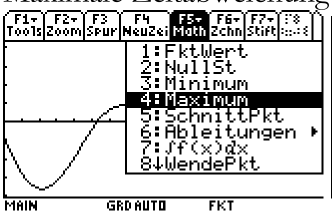


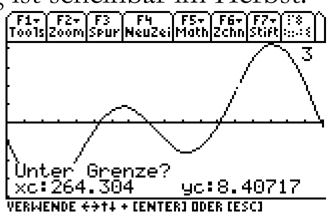
Für den Graphen muss erst das Window vorbereitet werden.

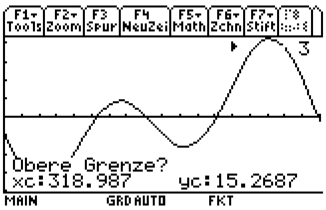




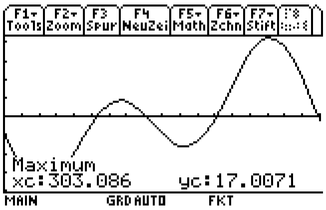
Maximale Zeitabweichung ist scheinbar im Herbst:

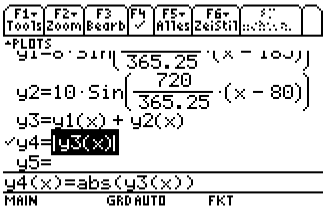


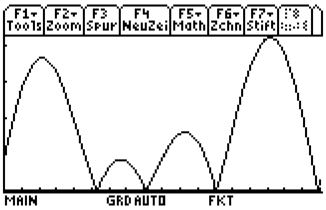




5 Dazu braucht man eigentlich keinen Taschenrechner. Der Sinus wird Null, für Vielfache von π. In unserem Fall also 0.







Teil D2

a) Ansatz: Länge der Achse: $.68\cdot\left|\begin{pmatrix}-2{,}00\\5{,}00\\0{,}00\end{pmatrix}\right|$ ≈ 3.6619 und halber Überstand: (3.6619 – 3.3)/2

Ergebnis: ≈ 18 cm

b) Nachweis für Punkt P: P ∈ E ⇔ 5 ·15+2 ·12-14 ·5.5=22 wahre Aussage
Nachweis des Abstandes zwischen der Geraden g und der Ebene E (2 BE):
z. B. mit GTR: prgmGeometri – Abstand Gerade-Ebene
oder

Ebenennormale von E: $\vec{n}_E=\begin{pmatrix}5\\2\\-14\end{pmatrix}$ ist senkrecht zum Richtungsvektor Tambour $\vec{r}=\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}$,

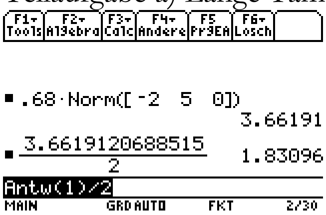
wegen $\vec{n}_E\cdot\vec{r}=0$ und ein beliebiger Punkt des Tambour Q(11 | 3 | 3) hat zur Ebene den Abstand

$$d\,(P;E)=\frac{\vec{PQ}\cdot\vec{n}_E}{|\vec{n}_E|}=-.2$$

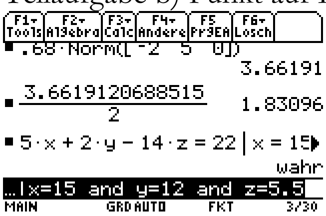
c) Lösungsweg (4 BE)
z. B. Anzahl der Umdrehungen
Ansatz für Länge der Papierbahn
Länge der Papierbahn
Ansatz für Masse
Masse: m ≈ 2,8 t
oder
vorausgesetzt es ist keine Luft zwischen den Papierlagen (aber das ist auch oben vorausgesetzt):
1 m² ≙ 60 g ≙ 0,0001 m³ ⇒ 1 m³ ≙ 600 kg
$V_{\text{Hohlzylinder}}$ = 3.3 ·π ·(.7²-.2²) ≈ 4.667 m³ ⇒ m ≈ 2.8 t

CAS

- Teilaufgabe a) Länge Tambour:



- Teilaufgabe b) Punkt auf Ebene[6]?



6 Da hat man ja im Kopf schneller gerechnet, als alles richtig eingegeben.

Abstand Gerade-Ebene: hessesche Normalenform