Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2007/08**

Geltungsbereich:
- allgemeinbildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Leistungskursfach Mathematik

- E R S T T E R M I N -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Wahlaufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte
- Beiliegende “Materialien für Aufgaben zur Stochastik”

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jede reelle Zahl a $(a > 0)$ ist eine Funktion f_a mit $f_a(x) = 4 \cdot x \cdot (1 - a \cdot \sqrt{x})$ $\left(x \in D_{f_a}\right)$ definiert.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D_{f_a} an.

Zeigen Sie, dass für jedes a der Koordinatenursprung auf dem Graphen der Funktion f_a liegt.

Außerdem existiert für jedes a ein weiterer gemeinsamer Punkt Z_a des Graphen der Funktion f_a mit der Abszissenachse.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes Z_a an und zeigen Sie, dass der Anstieg der Tangenten im Punkt Z_a stets unabhängig von a ist.

Berechnen Sie für jedes a die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion f_a und untersuchen Sie die Art des Extremums.

Begründen Sie, dass kein a existiert, für das der Graph der Funktion f_a einen Wendepunkt besitzt.
Geben Sie den Wertebereich von f_a an.

Erreichbare BE-Anzahl: 12

b) Für jedes u $\left(u \in R, 0 < u < \frac{1}{a^2}\right)$ sind die Punkte $P_a(u; f_a(u))$, $Q(u; 0)$ und der Koordinatenursprung Eckpunkte eines Dreiecks.

Es gibt genau einen Wert u, für den der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird.
Berechnen Sie diesen Wert u.

Ermitteln Sie den Wert a, für den sich ein maximaler Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ ergibt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Für jedes a begrenzen der Graph der Funktion f_a und die Abszissenachse eine Fläche vollständig.

Berechnen Sie den Wert a, für den der Inhalt dieser Fläche $\frac{81}{40}$ beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Für jedes x $(x \in R, x > 0)$ ist die Funktion $f_{\frac{1}{2}}$ Stammfunktion einer Funktion $g_{\frac{1}{2}}$.

Berechnen Sie alle Werte von t $(t \in R, t > 0)$, für die gilt: $\int_t^x g_{\frac{1}{2}}(z)\,dz < f_{\frac{1}{2}}(x)$.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4;0;-1)$, $B(0;4;-1)$ und $C(4;4;3)$ sowie für jedes t $(t \in R)$ ein Punkt $S_t(3+t;3+t;-t)$ gegeben.

Es gibt Punkte S_t, für die das Dreieck ABC Grundfläche einer Pyramide $ABCS_t$ ist.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der die Punkte S_t liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Ermitteln Sie alle Werte t, für die A, B, C und S_t Eckpunkte einer Pyramide sind.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass diese Pyramide $ABCS_t$ gerade ist.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS_t$.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

d) Es existiert genau ein Wert t, für den die Punkte $P\left(5;6;-\frac{10}{3}\right)$, A, B und S_t in einer Ebene liegen.

Ermitteln Sie diesen Wert t.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

e) Es gibt Pyramiden $ABCS_t$ mit einem rechtwinkligen Dreieck als Seitenfläche.

Begründen Sie, dass für diese Pyramiden alle Seitenflächen rechtwinklige Dreiecke sind.

Berechnen Sie alle Werte t, für die Pyramiden mit rechtwinkligen Seitenflächen entstehen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Stefan und Tina nutzen ein Computerprogramm, das zufällig jeweils eine der Zahlen -1; 0 oder +1 erzeugt. Erfahrungsgemäß tritt die Zahl -1 zu 20 %, die Zahl 0 zu 30 % und die Zahl +1 zu 50 % auf.

a) Ein Zufallsexperiment besteht darin, dass drei Zahlen erzeugt werden.

Betrachtet wird die Summe dieser drei Zahlen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Ereignis A: Die Summe dieser Zahlen beträgt -2.

Ereignis B: Bei vier Durchführungen dieses Zufallsexperimentes kommt genau zwei Mal die Summe -2 vor.

Ereignis C: Bei zwei Durchführungen dieses Zufallsexperimentes kommt mindestens ein Mal die Summe 0 vor.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) In einem Spiel rufen Tina und Stefan abwechselnd mit ihrem Computerprogramm eine Zahl ab, insgesamt aber höchstens 5 Zahlen. Stefan beginnt das Spiel. Gewonnen hat derjenige, der zuerst die Zahl -1 erhält.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der Stefan gewinnt.

Der Sieger bekommt vom Verlierer das Quadrat der Anzahl der abgerufenen Zahlen in Euro. Hat nach dem 5. Abruf niemand gewonnen, zahlt Stefan an Tina einen Betrag x.

Ermitteln Sie den Betrag x so, dass das Spiel fair ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Tina und Stefan testen ein entsprechendes Computerprogramm eines Mitschülers. 40 % der ermittelten Zufallszahlen waren +1, davon hat Tina 55 % ermittelt. Von den anderen Zufallszahlen hat Tina 50 % ermittelt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die von Tina ermittelten Zufallszahlen nicht +1 sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Es gibt verschiedene Arten von Sonnenuhren. Bei den vertikalen Sonnenuhren befindet sich das Ziffernblatt auf einer vertikalen Projektionsebene, z. B. einer Häuserwand. An dieser ist ein zu dieser Ebene geneigter Schattenstab befestigt.

Die Projektionsebene einer vertikalen Sonnenuhr sei die x-z-Koordinatenebene eines kartesischen Koordinatensystems (1 Einheit entspricht 1 m), dessen x-Achse in Ost-West-Richtung verläuft.
Der Schattenstab ist im Koordinatenursprung befestigt und endet im Punkt $P(0{,}00; -0{,}20; -0{,}25)$.

a) Die Neigung des Schattenstabes gegenüber der x-y-Ebene entspricht näherungsweise der geographischen Breite des Aufstellungsortes der Sonnenuhr.

Berechnen Sie die geographische Breite des Aufstellungsortes der Sonnenuhr.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Durch die Länge des Schattens lässt sich mit Sonnenuhren auch das Datum anzeigen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt fallen die Sonnenstrahlen in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ ein.

Bestimmen Sie die Länge des Schattens auf der Projektionsebene.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Zwischen einer Sonnenuhr und einer mechanischen Uhr gibt es Zeitabweichungen Δt_1 durch die Ellipsenbewegung der Erde um die Sonne und Zeitabweichungen Δt_2 durch die Neigung der Erdachse. Die gesamte Zeitabweichung Δt (in Minuten) kann an einem bestimmten Ort näherungsweise durch folgende Zeitgleichung modelliert werden:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 8 \cdot \sin\left(\frac{360°}{365{,}25} \cdot (T - 185)\right) + 10 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{360°}{365{,}25} \cdot (T - 80)\right) \quad (T \in R,\ 0 < T \leq 365)$$

Die Variable T kennzeichnet die Tage eines Nichtschaltjahres (für den 1. Januar gilt $0 < T \leq 1$, für den 2. Januar gilt $1 < T \leq 2$ usw.).

Geben Sie einen Tag des Jahres an, an dem zu einem bestimmten Zeitpunkt die Zeitabweichung Δt_2 keinen Einfluss auf Δt hat.

Bestimmen Sie ein Datum eines Jahres, an dem die Sonnenuhr und die mechanische Uhr gleich gehen.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für die maximale Zeitabweichung Δt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Wahlaufgabe 2

Die Schönfelder Papierfabrik im Erzgebirge stellt verschiedene Arten von Recycling-Papieren her.

Bei der Herstellung wird das Papier am Ende der Papiermaschine auf einen Tambour (Trommel) mit einem Durchmesser von 40,0 cm aufgewickelt (siehe Abbildung).

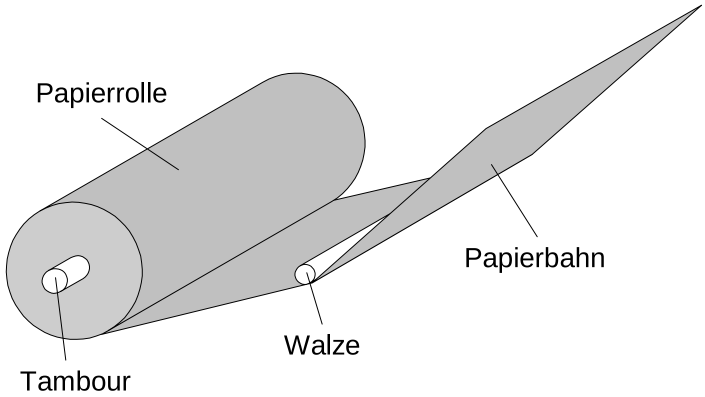


Abbildung (nicht maßstäblich)

Der Tambour rotiert um eine Achse, die in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 m) durch die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 11{,}00 \\ 3{,}00 \\ 3{,}00 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2{,}00 \\ 5{,}00 \\ 0{,}00 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 0{,}68)$$ beschrieben werden kann.

Das Papier wird mit einer Breite von 330 cm mittig auf dem Tambour aufgerollt.

a) Der Tambour ist so lang wie seine Drehachse.

Ermitteln Sie, wie weit der Tambour auf jeder der beiden Seiten der Papierrolle übersteht.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Zu Beginn der Aufwicklung auf den leeren Tambour verläuft die Papierbahn zwischen Tambour und der dazu parallelen Walze in der Ebene E mit der Gleichung $5x + 2y - 14z = 22$.

Der Durchmesser der Walze wird für den folgenden Sachverhalt vernachlässigt.

Auf der Walze existiert ein Punkt $P(15{,}00;\, 12{,}00;\, 5{,}50)$.

Zeigen Sie, dass der Punkt P in der Ebene E liegt und dass die Ebene E den Tambour berührt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Bei der Herstellung einer bestimmten Papiersorte beträgt die Papierdicke 0,10 mm. Ein Quadratmeter dieses Papiers hat eine Masse von 60,0 g.

Berechnen Sie die Masse des aufgewickelten Papiers, wenn der Durchmesser der auf dem Tambour aufgewickelten Rolle 140 cm beträgt.

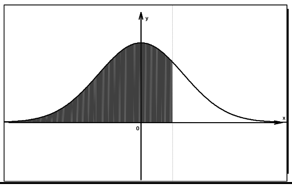
Erreichbare BE-Anzahl: 5

Materialien für Aufgaben zur Stochastik

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000