Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2010, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
  Auf Besonderheiten beim Einsatz eines CAS wird an gegebener Stelle eingegangen.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mueller@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 16.03.11.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Tragen Sie die Antworten zu den Aufgaben 1 und 2 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 3 und 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot x+4}$ ($x \in \mathbf{D_f}$).

Welche Menge entspricht dem größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f?

☐ $\{x \in \mathbb{R}\}$ ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -8\}$ ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -8\}$ ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$

1.2 Welcher der angegebenen Funktionsterme beschreibt die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = (3 \cdot x + 4)^2$ ($x \in \mathbf{D_f}$)?

☐ $18 \cdot x + 24$ ☐ $6 \cdot x + 8$ ☐ $\frac{1}{9}(3\cdot x+4)^3$ ☐ $\frac{1}{3}(3\cdot x+4)^3$ ☐ $18 \cdot x$

1.3 Welche Funktion ist eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=x^5-4+\frac{1}{x^5}$ ($x \in \mathbf{D_f}$)?

☐ $F(x)=5\cdot x^4-4\cdot x+\frac{1}{x^5}$ ($x \in \mathbf{D_F}$)

☐ $F(x)=\frac{1}{6}\cdot x^6-4\cdot x+\frac{1}{x^6}$ ($x \in \mathbf{D_F}$)

☐ $F(x)=\frac{1}{6}\cdot x^6-4\cdot x-\frac{1}{4\cdot x^4}$ ($x \in \mathbf{D_F}$)

☐ $F(x)=\frac{1}{5}\cdot x^5-\frac{4}{x}-\frac{1}{4\cdot x^4}$ ($x \in \mathbf{D_F}$)

☐ $F(x)=\frac{1}{5}\cdot x^4-4\cdot x-4\cdot x^{-4}$ ($x \in \mathbf{D_F}$)

1.4 Gegeben ist die Ebene E durch E: $-x + 2 \cdot y + 4 \cdot z = 6$.
Für welchen Wert für a liegt der Punkt $P_a\ (2 \mid 0 \mid a)$ in der Ebene E?

☐ a = 1 ☐ a = 2 ☐ a = 3 ☐ a = 4 ☐ a = 5

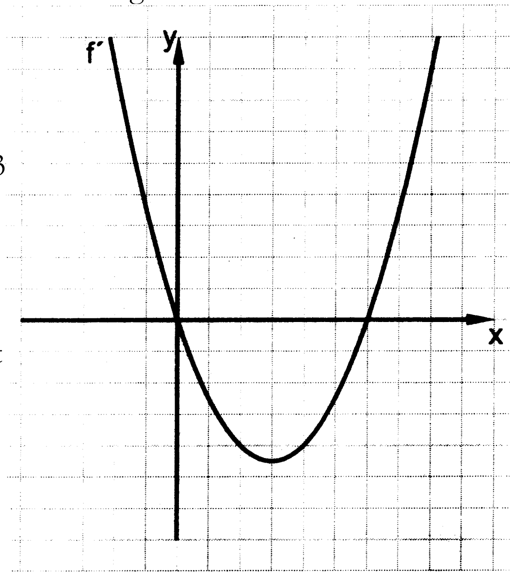
1.5 Für welchen Wert von m ($m \in \mathbb{R}$, $m > 0$) beträgt die Länge des Vektors $\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ m \end{pmatrix}$ 15 Längeneinheiten?

▢	▢	▢	▢	▢
$m = 3$	$m = 7$	$m = 11$	$m = 14$	$m = \sqrt{329}$

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 In der Abbildung ist der Graph der ersten Ableitungsfunktion f' einer Funktion f dargestellt. Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer zugehörigen Funktion f im dargestellten Intervall.

Erreichbare BE-Anzahl: 3



3 Aus Erfahrungen sind bestimmte Daten zur Grippeschutzimpfung bekannt. Man weiß, dass in einem bestimmten Wohnbezirk 40 % der Bevölkerung an der Grippeschutzimpfung teilnehmen und die anderen Bürger dieses Wohnbezirks sich nicht gegen Grippe impfen lassen.
Die nicht geimpften Bürger erkranken mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,0 % an Grippe. 1,0 % der geimpften Bürger erkranken trotz Impfung an Grippe.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewählter Bürger dieses Wohnbezirkes
(1) sich einer Impfung unterzieht und nicht an Grippe erkrankt;
(2) an Grippe erkrankt.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

4 Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes D der Geraden g mit der Ebene E.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($r \in \mathbb{R}$); E: $x - 5 \cdot y - 4 \cdot z = -2$

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil B1

Für die erste Etappe einer Bergwanderung erstellt eine Wandergruppe das Höhenprofil der Wanderung. Das Höhenprofil kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Kilometer) durch den Graphen der Funktion h mit
$y = h(x) = -0{,}000075 \cdot x^5 + 0{,}005 \cdot x^3 + 0{,}525$ ($x \in \mathbb{R}$; $-8{,}0 \leq x \leq 8{,}5$) beschrieben werden.
Die Funktionswerte geben dabei die jeweilige Höhe über dem Meeresspiegel an.

1.1 Ermitteln Sie den Höhenunterschied zwischen dem tiefsten und dem höchsten Punkt dieser ersten Etappe in Meter.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.2 Die Bergwanderung beginnt im Punkt P(-8,0 | h(-8,0)).
Ein Wanderer behauptet, dass die größte Steigung auf dieser Etappe an der Stelle x = 5,5 sein wird.
Positionieren Sie sich zu dieser Behauptung und begründen Sie Ihre Meinung.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Die zweite Etappe der Bergwanderung führt in ein anderes Gebiet, welches in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Kilometer) beschrieben wird.
Auf einem Hang befindet sich ein geradlinig verlaufender Lift, der die Talstation T(2,0 | 3,0 | 0,6) mit der Bergstation B(2,0| 6,0 | 1,1) verbindet. Auf dem gleichen Hang befindet sich eine Hütte, deren

Lage mit den Koordinaten H(3,0 | 4,0 | 0,8) festgelegt ist.
Die Punkte B, T und H bestimmen eindeutig eine Ebene E, in welcher der Hang liegt.

1.3 Weisen Sie nach, dass die Ebene E durch die Gleichung $x + 5 \cdot y - 30 \cdot z = -1$ beschrieben werden kann. Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.4 Die Wanderer befinden sich an der Talstation T und möchten zur Hütte H wandern.
Berechnen Sie, in welchem Winkel zum Lift TB die Wanderer laufen müssen, wenn sie auf direktem Weg zur Hütte wandern wollen.
Ermitteln Sie die Zeit in Minuten, die die Wanderer von der Talstation T zur Hütte H benötigen, wenn ihre durchschnittliche Geschwindigkeit beim Wandern $3{,}0\ \frac{km}{h}$ beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

1.5 Ein Rettungshubschrauber befindet sich zu einer bestimmten Zeit im Punkt F(2,5 | 3,0 | 0,9).
Ermitteln Sie den Abstand des Rettungshubschraubers zum Hang zu dieser Zeit.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.6 Die Sicht von der Hütte auf den Gipfel ist erfahrungsgemäß nur an einem Fünftel der Tage während der Hauptsaison gut.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit man bei 14 Urlaubstagen in der Hauptsaison genau 3 Tage gute Sicht von der Hütte auf den Gipfel hat.
Ermitteln Sie, wie viele Tage man sich in der Hauptsaison mindestens an der Hütte aufhalten müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einen Tag gute Sicht auf den Gipfel zu haben. Erreichbare BE-Anzahl: 4

1.7 Der Betreiber der Hütte veranstaltet ein Glücksspiel mit einem Glücksrad. Bei einer Drehung gewinnt der Spieler in 20 % aller Fälle ein Freigetränk im Wert von 2,80 €.
Für jede Drehung verlangt der Betreiber der Hütte 1,00 €.
Ein Wanderer beschließt, solange am Glücksrad zu drehen, bis er ein Freigetränk gewonnen hat, maximal jedoch drei Mal.
Untersuchen Sie, ob der Wanderer erwarten kann, dass sich diese Strategie für ihn lohnt.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B2

Eine Schüssel mit achsensymrnetrischer Querschnittsfläche hat einen Außendurchmesser von 14,0 cm und eine Höhe von 4,0 cm. Die Breite des oberen Randes beträgt 0,5 cm. Im tiefsten Punkt der Schüssel ist das Material 1,0 cm dick.
In der Abbildung 1 ist der Querschnitt dieser Schüssel in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Zentimeter) dargestellt. Die Querschnittsfläche wird begrenzt durch die Graphen der quadratischen Funktionen f und g sowie durch zwei zur x-Achse parallele Strecken.

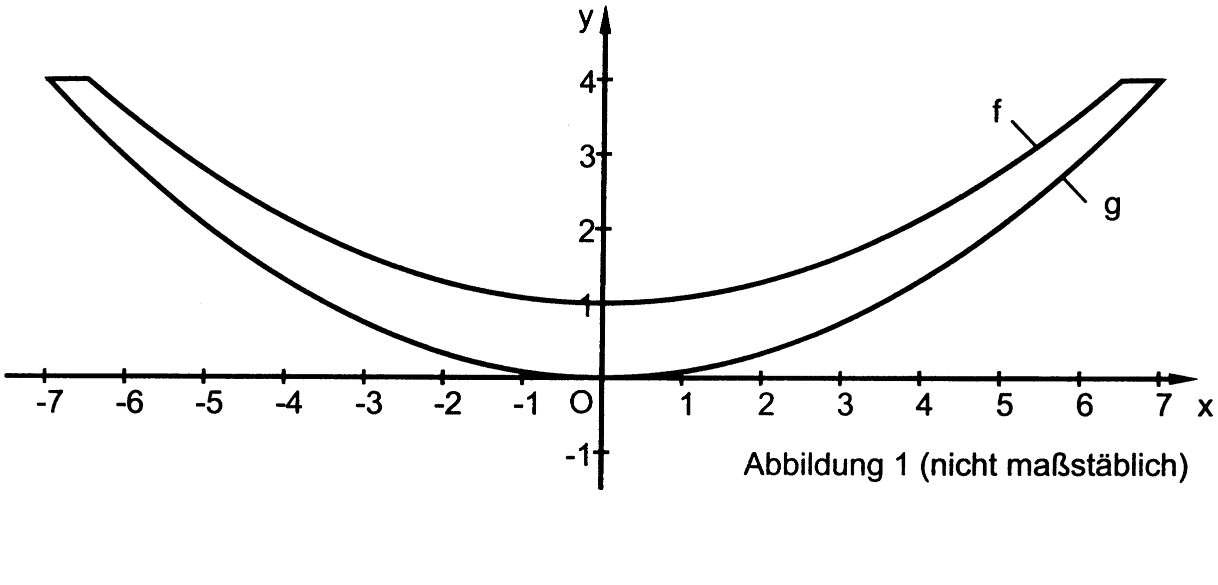


Abbildung 1 (nicht maßstäblich)

2.1 Zeigen Sie, dass die Funktion g durch die Gleichung $g(X)=\frac{4}{49}x^2$ (x $\in\mathbb{R}$; -7,0 ≤ x ≤ 7,0) beschrieben werden kann.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f.
Bestimmen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche. Erreichbare BE-Anzahl: 6

2.2 Die Aufbewahrung dieser Schüsseln erfolgt in einem Regal aus zwei Brettern (siehe Abbildung 2).
Diese Bretter berühren eine Schüssel in den Punkten B_1 und B_2, die jeweils 2,0 cm höher als der tiefste Punkt der Schüssel liegen.

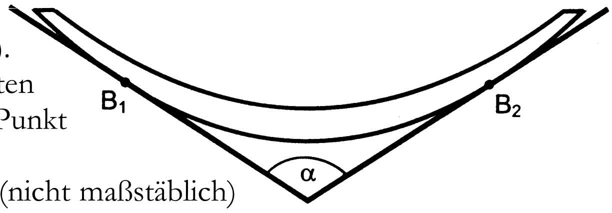
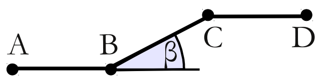


Abbildung 2 (nicht maßstäblich)

Ermitteln Sie die Größe des Öffnungswinkels a zwischen den Brettern des Regals. Erreichbare BE-Anzal: 4

2.3 Der Hersteller der Schüsseln gibt an, dass 90 % aller produzierten Schüsseln keine Mängel aufweisen. Ein Restaurant kauft viele Schüsseln von diesem Hersteller. Bei Anlieferung wird eine Stichprobe von 8 Schüsseln entnommen und auf Mängel untersucht. Das Restaurant nimmt die Lieferung nur an, wenn sich in dieser Stichprobe maximal eine Schüssel mit Mängeln befindet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung durch das Restaurant abgelehnt wird. Erreichbare BE-Anzahl: 2

2.4 Zum Transport des Geschirrs wird in dem Restaurant ein Förderband genutzt, das aus drei geradlinigen Abschnitten besteht.
Dieses Förderband hat von der Seite betrachtet den in der Zeichnung 1 dargestellten Verlauf.



Zeichnung 1: nicht maßstäblich

In einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) besitzen die Punkte folgende Koordinaten: A(3,0 | 2,0 | -1,0), B(-1,0 | 5,0 | -1,0), C(-7,0 | 9,0 | 0,5) und D(-11,0 | 12,0 | 0,5).
Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C und 0 in einer Ebene liegen.
Geben Sie die Länge des mittleren Abschnittes des Bandes an.
Ermitteln Sie die Größe des Winkels ß. Erreichbare BE-Anzahl: 5

2.5 Die Herstellerfirma der Schüsseln hat für die Herstellungskosten näherungsweise die Funktion K mit $K(w) = 0{,}185\, w^5 - 7{,}43\, w^4 + 136{,}2\, w^3 - 975{,}2\, w^2 + 3262{,}7\, w + 1280$ ermittelt.
Dabei ist w die produzierte Warenmenge in 1000 Stück und K gibt die Herstellungskosten in Euro an.
Die Firma geht bei ihren Berechnungen davon aus, dass die produzierte Warenmenge w vollständig verkauft wird. Dabei erzielt die Firma einen Verkaufserlös V (in Euro) von $V(w) = 2000\, w$.
Geben Sie die Herstellungskosten und den Verkaufserlös der Firma bei 1 500 produzierten und verkauften Schüsseln an.
Ermitteln Sie, in welchem Intervall die produzierte und verkaufte Warenmenge liegen muss, damit die Firma mit Gewinn arbeitet.
Geben Sie an, für welche produzierte und verkaufte Warenmenge der Betrieb den höchsten Gewinn erzielt. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Lösungsvorschläge

Aufgabe A

1 Feld 2, Feld 1, Feld 3, Feld 2, Feld 3

2 Graph (lokaler Maximumpunkt, lokaler Minimumpunkt, Wendepunkt)

3 Ansatz für Wahrscheinlichkeit für (1)
Wahrscheinlichkeit für (1): 0,396
Ansatz für Wahrscheinlichkeit für (2)
Wahrscheinlichkeit für (2): 0,034

4 Ansatz
Umformungen
Durchstoßpunkt: D $(1 \mid -1 \mid 2)$

Aufgabe B1

1.1 Ordinaten der Extrempunkte (2 BE)
Höhenunterschied: ≈ 1012 m

1.2 Ansatz für Steigung
Positionierung: Die Behauptung ist falsch.
Begründung: z. B. Angabe einer Stelle mit größerer Steigung als bei $x = 5{,}5$

1.3 Nachweis

1.4 Ansatz für Winkel
Winkel: 44,5°
Weglänge
Ansatz für Zeit
Zeit: ≈ 29 min

1.5 Ansatz für Abstand
Abstand: ≈ 280 m

1.6 Ansatz für Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit: ≈ 0,25
Ansatz für Anzahl der Tage
Anzahl der Tage: mindestens 21

1.7 Wahrscheinlichkeitsverteilung (2 BE)
Erwartungswert
Aussage: Es lohnt sich nicht.

Aufgabe B2

2.1 Nachweis
Ansatz für eine Gleichung der Funktion f
eine Gleichung der Funktion f: z. B. $f(x)=\frac{12}{169}\cdot x+1$
Ansatz für Flächeninhalt (2 BE)
Flächeninhalt: 34/3 cm²

2.2 eine Berührungsstelle: z. B. $x_1 = 7/2 \cdot\sqrt{2}$
Anstieg an Berührungsstelle: z. B. $4/7 \cdot\sqrt{2}$
Ansatz für Öffnungswinkel
Öffnungswinkel: $\alpha \approx 102°$

2.3 Ansatz für Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit: ≈ 0,1869

2.4 Nachweis (2 BE)
Länge des mittleren Abschnittes des Bandes: ≈ 7,4 m
Ansatz für Größe des Winkels β
Größe des Winkels β : β ≈ 12,2°

2.5 Herstellungskosten: ≈ 4 403 €
Verkaufserlös: 3 000 €
Ansatz für Intervall der Warenmenge
Intervall der Warenmenge: 2,631 bis 11,160 (in 1 000 Schüsseln)
maximaler Gewinn: bei 7,490 (in 1 000 Schüsseln)