Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2011, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
  Auf Besonderheiten beim Einsatz eines CAS wird an gegebener Stelle eingegangen.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Baethge (baethge@ehrenberg-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 04.04.12.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{3x}{4+2x}$ ($x \in D_f$).

Die Funktion f besitzt eine Polstelle bei:

☐ $x = 2$ ☐ $x = 0$ ☐ $x = -\frac{1}{4}$ ☐ $x = -2$ ☐ $x = -4$

1.2 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2 \cdot \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$).
Welchen Anstieg m hat der Graph der Funktion f an der Stelle $x = 0$?

☐ $m=2$ ☐ $m=1$ ☐ $m = 0$ ☐ $m = -1$ ☐ $m = -2$

1.3 Gegeben ist die Gerade g durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ($r \in \mathbb{R}$).

Senkrecht zu dieser Geraden g verläuft die Gerade h mit:

☐ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$)

☐ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$)

☐ $h: \vec{x} = s \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$)

☐ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$)

☐ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$)

1.4 In welchem Punkt P durchstößt die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t ∈ ℝ) die x-y-Koordinatenebene?

☐	☐	☐	☐	☐
P(0 | 0 | 1)	P(0 | 0 | -1)	P(2 | 2 | 0)	P(-2 | -2 | 0)	P(4 | 4 | -1)

1.5 In der ersten Reihe in der Aula sind noch genau 5 Stühle frei. Fünf Schüler wollen sich auf diese fünf Stühle setzen, wobei jeder Schüler auf genau einem Stuhl sitzen soll.
Wie viele Möglichkeiten der Sitzverteilung gibt es?

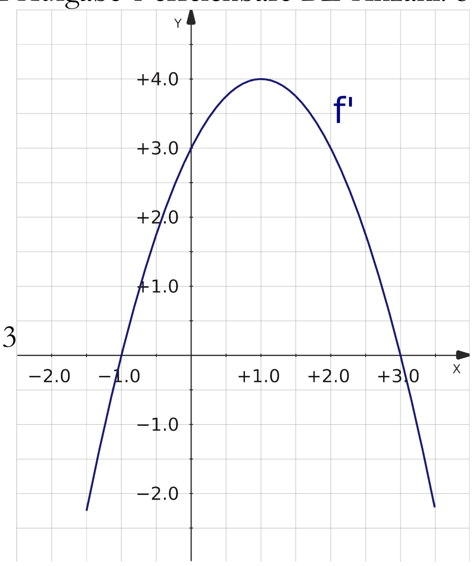
☐	☐	☐	☐	☐
1	5	25	120	5^5

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 In der Abbildung ist der Graph der ersten Ableitungsfunktion f' einer Funktion f im Intervall $-1{,}5 \le x \le 3{,}5$ (x ∈ ℝ) dargestellt.
Begründen Sie mithilfe des Graphen der ersten Ableitungsfunktion f' folgende wahre Aussagen.

(1) Die Tangente an den Graphen der Funktion f hat an der Stelle x = 2 einen positiven Anstieg.

(2) Der Graph der Funktion f hat im betrachteten Intervall einen lokalen Minimumpunkt. Erreichbare BE-Anzahl: 3



3 Gegeben sind die Punkte A(-4 | 3 | -1), C(1 | -1 | -6) und D(6 | 2 | 0).
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes B so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes des Parallelogramms ABCD.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

4 In einer Urne befinden sich genau fünf Kugeln, drei goldfarbene und zwei silberfarbene. Der Urne wird solange ohne Zurücklegen zufällig eine Kugel entnommen, bis zum ersten Mal eine goldfarbene gezogen wird.
Ermitteln Sie, wie viele Ziehungen durchschnittlich zu erwarten sind. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Aufgabe B 1

Auf einem Kinderspielplatz wird ein Kletterturm gebaut. Er soll aus dem quaderförmigen Gebäudekörper OABCDEFG, dem 1,00 m hohen Quadergerüst DEFGHIJK und der geraden Pyramide HIJKL als Überdachung bestehen.
Die Gesamthöhe des Kletterturms beträgt 3,00 m.
In den Planungsunterlagen ist der Kletterturm in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) mit dem Koordinatenursprung O dargestellt (siehe Abbildung – nicht maßstäblich).

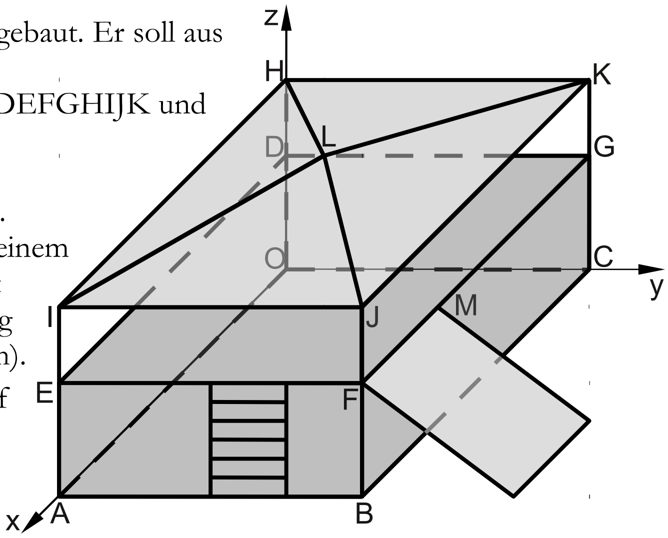


Abbildung (nicht maßstäblich)

Jeder der Eckpunkte A, C und D befindet sich auf dem positiven Teil der zugehörigen Koordinatenachse. Die Längen der Seitenkanten des quaderförmigen Gebäudekörpers sind mit $\overline{OA} = 4{,}00$ m, $\overline{AB} = 3{,}50$ m und $\overline{AE} = 1{,}50$ m festgelegt. Das Gelände des Spielplatzes liegt in der x-y-Koordinatenebene.

1.1. Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte D und J an. Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.2. Begründen Sie, dass der Punkt L die Koordinaten L(2,00 | 1,75 | 3,00) besitzt.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.3. Die gesamte Dachfläche soll gedeckt werden. Die beauftragte Firma rechnet mit Kosten in Höhe von 30 € pro Quadratmeter.
Berechnen Sie die Kosten für die Deckung der gesamten Dachfläche. Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.4. Vom Punkt G aus soll eine Stange in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4{,}00 \\ 3{,}00 \\ 0{,}00 \end{pmatrix}$ angebracht werden.
Weisen Sie nach, dass der Punkt R mit den Koordinaten R(-2,00 | 5,00 | 1,50) ein möglicher Endpunkt dieser Stange sein kann. Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.5. Von der Deckfläche des Gebäudekörpers führt eine Rutsche zum Spielplatzgelände. Die obere Kante der Rutsche ist durch die Strecke $\overline{FM}$ festgelegt. Die Ebene, in der die Rutschfläche liegt, ist gegenüber dem Gelände des Spielplatzes um 41,0° geneigt.
Berechnen Sie die Länge der Rutsche.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, in der die Rutsche liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

1.6. Auf dem Spielplatzgelände soll ein neuer Sandkasten angelegt werden. Der Sandkasten wird näherungsweise durch die Graphen der Funktionen f mit $y(x) = 0{,}2 \cdot x^3 + 1{,}6 \cdot x^2 + 2{,}9 \cdot x + 2{,}0$ $(x \in D_f)$ und g mit $g(x) = -f(x)$ sowie durch die Gerade $x = 0$ vollständig begrenzt.
Ermitteln Sie den Inhalt der für den Sandkasten zur Verfügung stehenden Fläche.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Tim und Florian treffen sich auf dem Spielplatz, um Basketball zu spielen. Bei Basketballfreiwürfen trifft Tim bei jedem Versuch mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 %.

1.7. Tim führt 15 Basketballfreiwürfe durch.
Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
Ereignis A: Tim trifft höchsten dreimal.
Ereignis B: Der erste Treffer von Tim ist im fünften Versuch. Erreichbare BE-Anzahl: 4

1.8. Berechnen Sie, wie viele Versuche Tim mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichket von mehr als 99 % mindestens einen Treffer zu haben. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe B 2

Durch das Hochwasser vom August 2002 sind in Sachsen hohe Schäden entstanden. Viele Einrichtungen des Hochwasserschutzes waren und sind für Hochwasser ausgelegt, wie sie statistisch gesehen nur in einem von 30 Jahren auftreten (Fachbezeichnung HQ 30).

Als angemessen gilt heute ein Schutz gegen Hochwasser, wie sie durchschnittlich in einem von 100 Jahren auftreten (Fachbezeichnung HQ 100).

Dementsprechend betragen die Wahrscheinlichkeiten, mit der ein Hochwasser des Typs HQ 30 bzw. des Typs HQ 100 in einem beliebigen Jahr auftritt, $p_{30} = \frac{1}{30}$ bzw. $p_{100} = \frac{1}{100}$

2.1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der an einem Flussabschnitt innerhalb von 100 Jahren kein Hochwasser vom Typ HQ 100 eintritt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

2.2. In einem Zeitraum von 15 Jahren soll der Hochwasserschutz an einem Flussabschnitt deutlich verbessert werden.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesem Zeitraum mindestens ein Hochwasser vom Typ HQ 30 eintritt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Die Abbildung 1 zeigt den Querschnitt durch ein Flussbett und dessen ebene Umgebung, auf den sich die Aufgabenteile 2.3 bis 2.6 beziehen.
In einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) beschreibt die x-Achse die Profillinie der Uferzone in der Umgebung des Flussbetts.

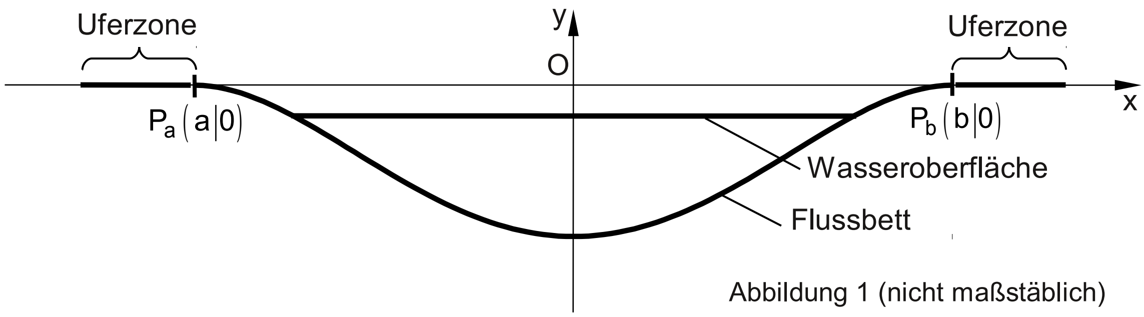


Abbildung 1 (nicht maßstäblich)

Die Profillinie des Flussbetts wird im Intervall $a \le x \le b$ näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}0002 \cdot x^4 + 0{,}04 \cdot x^2 - 2{,}0$ $(x \in D_f)$ beschrieben und geht in den Punkten P_a und P_b in die Uferzone über.

2.3. Begründen Sie, dass die maximale Tiefe des Flussbetts gegenüber der Uferzone 2,0 m beträgt.
Weisen Sie nach, dass die Profillinie des Flussbetts symmetrisch ist.
Zeigen Sie, dass das Flussbett 20,0 m breit ist. Erreichbare BE-Anzahl: 5

2.4. Ermitteln Sie, in welcher Tiefe des Flussbetts gegenüber der Uferzone der Anstieg der Profillinie des Flussbetts am größten ist. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Als Durchfluss $Q\left(\text{in}\,\frac{m^3}{s}\right)$ eines Fließgewässers wird das Wasservolumen bezeichnet, das in einer Sekunde die Querschnittsfläche des Gewässers passiert. Es gilt: $Q = v_m \cdot A$ mit

vm: mittlere Fließgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$,

A: Inhalt der Querschnittsfläche (Fläche, die von der Wasseroberfläche und der Profillinie des Flussbetts begrenzt wird) in m²

2.5. Die Wasseroberfläche befindet sich 1,8 m über dem tiefsten Punkt des Flussbettes.
Bestimmen Sie den Durchfluss bei einer mittleren Fließgeschwindigkeit von $3{,}2\ \frac{m}{s}$.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

2.6. Zeigen Sie, dass ein Durchfluss von 100,0 $\frac{m^3}{s}$ bei einer mittleren Fließgeschwindigkeit von 4,0 $\frac{m}{s}$ zur Überschwemmung der Uferzone führt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Zum Hochwasserschutz wurde ein Deich außerhalb der Uferzone errichtet. Ein Teil des Deiches kann in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) näherungsweise als gerades Prisma beschrieben werden. Die Grundfläche OABC des Prismas liegt dabei in der y-z-Koordinatenebene (siehe Abbildung 2).

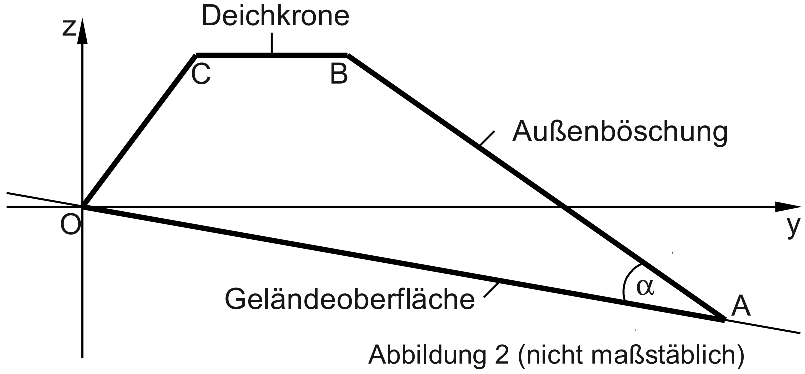


Abbildung 2 (nicht maßstäblich)

Die Ebene, in der die Deichkrone liegt, verläuft parallel zur x-y-Koordinatenebene. Die Ebene E_1, in der die Außenböschung liegt, ist durch die Gleichung E_1: $y + 2 . z = 12{,}0$ beschrieben.
Die Geländeoberfläche liegt in einer Ebene E_2, die durch die Gleichung

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}0 \\ 7{,}0 \\ -1{,}0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 7{,}0 \\ -1{,}0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2{,}0 \\ ,7{,}0 \\ 1{,}0 \end{pmatrix}$$ (r, s ∈ ℝ) beschrieben ist.

2.7. Bei modernen Deichen muss der Neigungswinkel α der Außenböschung gegen die Geländeoberfläche kleiner als 20° sein.
Zeigen Sie, dass diese Forderung bei diesem Deich erfüllt ist. Erreichbare BE-Anzahl: 2

2.8. Der Punkt C hat die Koordinaten C(0,0 | 4,0 | 2,0). Die Länge der Strecke $\overline{CB}$ gibt die Breite der Deichkrone an.
Bestimmen Sie die Breite der Deichkrone. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Lösungsvorschläge

Teil A

1) Feld 4, Feld 1, Feld 2, Feld 3, Feld 4
2) Begründung für positive Steigung: f'(2) > 0
   notwendiges Kriterium für lokalen Extrempunkt:
   liegt für x = -1 vor, denn es gilt f'(-1) = 0 und die erste Ableitung steigt dort
   hinreichendes Kriterium für lokalen Minimumpunkt
3) Ansatz für Koordinaten des Punktes B: $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{DC}$
   Koordinaten des Punktes B: B(-9 | 0 | -7)
   Ansatz für Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes: $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2}$
   Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes: $\left(-\frac{3}{2} \middle| 1 \middle| -\frac{7}{2}\right)$
4) vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung (2 BE)
   E = 1 ·P({(g)}) + 2 ·P({(sg)}) + 3 ·P({(ssg)}) = 1 ·3/5 + 2 ·2/5 ·3/4 + 3 ·2/5 ·1/4 ·1
   Erwartungswert: 1,5

Teil B1

1) Koordinaten des Punktes D: D(0,00 | 0,00 | 1,50)
   Koordinaten des Punktes J: J(4,00 | 3,50 | 2,50)
2) Begründung für x- und y-Koordinate: z. B. ergeben sich aus dem Mittelpunkt von $\overline{OB}$
   Begründung für z-Koordinate: Gesamthöhe ist 3,00 m
3) Ansatz für den Flächeninhalt der gesamten Dachfläche:
   die Höhen der Dreiecke ergeben sich aus der Dachhöhe 0,5 m nach dem Satz des Pythagoras im Dreieck IJL $h_L = \sqrt{0{,}5^2 + 2^2} \approx 2{,}0616$ und somit 2 ·A_{IJL} ≈ 7,2154 außerdem 2 ·A_{JKL} ≈ 7,2801
   Flächeninhalt der gesamten Dachfläche: 14,50 m²
   Kosten: 435 €
4) Nachweis (2 BE)
   z. B. eine Gleichung der Geraden: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit λ = ½ ergibt sich $\vec{OR}$
   Punktprobe
5) Ansatz für Länge der Rutsche: $\sin 41° = \frac{1{,}5}{l}$
   Länge der Rutsche: 2,29 m
   Ansatz für eine Gleichung der Ebene: ein weiterer Punkt der Ebene könnte sein: N(4 | 5,226 | 0)
   eine Gleichung der Ebene: z. B. 1,50 y + 1,73 z = 7,84 (mit GTR: prgmGeometri)
6) Nullstelle der Funktion f: x_N = -5.80
   Ansatz für Flächeninhalt: $A = 2 \cdot \int_{-5.80}^{0} f(x)\,dx \approx 20.60$
   Flächeninhalt des Sandkastens: 20,6 m²
7) Ansatz für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: P(A) = $B_{15;.35}(k<4)$
   Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: P(A) = .1727
   Ansatz für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: P(B) = $(1 - .35)^4 \cdot .35$
   Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: P(B) = .0625

8) Ansatz für die Anzahl der Versuche: $1 - (1 - .35)^n > .99$
Anzahl der Versuche : mindestens 11 Versuche

Teil B2

1) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: .99^100 oder $b_{100;.99}(0)$
Wahrscheinlichkeit: 0,3660
2) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: 1 – (29/30)^15 oder $B_{100;1/30}(k>0)$
Wahrscheinlichkeit: 0,3986
3) Begründung: f(0) = -2,0
Nachweis der Symmetrie (2 BE): es gilt f(-x) = f(x), denn die x-Werte treten nur in geraden Potenzen auf; der Graph ist Achsensymmetrisch
Nachweis für Breite des Flussbetts (2 BE): f(10) = 0; die Breite ist 20 m
Anmerkung: es gilt zwar auch f'(10) = 0, aber das wurde nicht gefordert
4) Ansatz für Tiefe (2 BE): z. B. mit GTR `fMax(f'(x),X,0,10)` → 5.7735 und f(5.7735) = -.889
Tiefe: 0,9 m
5) Ansatz für Inhalt der Querschnittsfläche (2 BE):
Schnittstellen f(x) = -0,2 → $x_S = \pm 8.269$ und $\int_{-8.269}^{8.269} f(x)+.2\,dx$
Inhalt der Querschnittsfläche: 17,8 m²
Durchfluss: 57 m^3s^{-1}
6) erforderlicher Querschnitt: 25,0 m²
Ansatz für Inhalt der verfügbaren Querschnittsfläche: $\int_{-10}^{10} f(x)\,dx$
Inhalt der verfügbaren Querschnittsfläche: 21,3 m²
7) Nachweis
z. B. prgmGeometri → Schnittwinkel zweier Ebenen und Eingabe E_1 und E_2 → 18,4°
8) Koordinaten des Punktes B: B(0,0 | 8,0 | 2,0) wegen z = 2 in E_1
Breite der Deichkrone: 4,0 m