Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2011, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Baethge (baethge@ehrenberg-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 04.04.12.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 240 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Die erste Ableitung der Funktion f_a mit $f_a(x) = -2 \cdot \sin(a \cdot x)$ ($x \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) an der Stelle $x = 1$ beträgt:

☐	☐	☐	☐	☐
$-2 \cdot \sin(a)$	$2 \cdot a \cdot \sin(a)$	$-2 \cdot a \cdot \cos(a)$	$2 \cdot \cos(a)$	$-2 \cdot a \cdot \sin(a) \cdot \cos(a)$

1.2 Die Funktion f mit $f(x)=\frac{(x+4)^2}{(x+2)\cdot(x-3)}$ ($x \in \mathbf{D}_f$) besitzt folgende Eigenschaft:

- ☐ Der Punkt P(1 | 4) liegt auf dem Graphen der Funktion f.
- ☐ Der Graph der Funktion f besitzt eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung x = -2.
- ☐ Die Funktion f besitzt bei x = 3 eine Nullstelle.
- ☐ Die Abszissenachse ist waagerechte Asymptote des Graphen der Funktion f.
- ☐ Die Funktion f besitzt bei x = -4 eine Polstelle.

1.3 Die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$) schneidet

- ☐ den positiven Teil der x-Achse und den positiven Teil der y-Achse
- ☐ den positiven Teil der x-Achse und den negativen Teil der y-Achse
- ☐ den negativen Teil der x-Achse und den positiven Teil der y-Achse
- ☐ den negativen Teil der x-Achse und den negativen Teil der y-Achse
- ☐ keine der Koordinatenachsen

1.4 Ein Code besteht aus vier Teilen und besitzt die Form *Buchstabe_Buchstabe_Buchstabe_Ziffer*. Die drei Buchstaben sind paarweise verschieden.
Wie viele verschiedene Codes dieser Form lassen sich aus den Buchstaben A, B und C sowie den Ziffern 0, 2 und 4 bilden?

☐	☐	☐	☐	☐
4	12	18	24	81

1.5 Welche der folgenden Aussagen gilt für jeden Alternativtest?

- ▢ Liegt das Ergebnis der Stichprobe im Ablehnungsbereich, nimmt man die Nullhypothese an.
- ▢ Liegt das Ergebnis der Stichprobe im Annahmebereich, nimmt man die Alternativhypothese an.
- ▢ Lehnt man die Nullhypothese ab, kann man einen Fehler 1. Art begehen.
- ▢ Der Annahmebereich und der Ablehnungsbereich überschneiden sich.
- ▢ Wenn durch die Veränderung des kritischen Wertes der Fehler 1. Art kleiner wird, wird der Fehler 2. Art auch kleiner.

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 3/2\, x^2 + e^{-x}$ ($x \in \mathbf{D}_f$)
Bestimmen Sie eine Gleichung der Stammfunktion F von f so, dass der Graph von F durch den Punkt A (0 | 2) verläuft. Erreichbare BE-Anzahl: 4

3 Gegeben sind die Gerade g durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$) und für jedes b ($b \in \mathbb{R}$) eine Ebene E_b durch $E_b : (b-2) \cdot x + y + b \cdot z = 1$.

3.1 Bestimmen Sie den Wert für b, für den die Gerade g parallel zur Ebene E_b verläuft.
Erreichbare BE -Anzahl: 2

3.2 Untersuchen Sie, ob es einen Wert für b gibt, für den die Gerade g orthogonal zur Ebene E_b verläuft. Erreichbare BE -Anzahl: 2

3.3 In einem Behälter befinden sich genau vier ideale Würfel.
Jeder der Würfel ist entweder von Variante 1 oder von Variante 2.
Würfel der Variante 1: Genau eine Seitenfläche des Würfels trägt die Zahl 1.
Würfel der Variante 2: Genau zwei Seitenflächen des Würfels tragen die Zahl 1.
Aus dem Behälter wird zufällig ein Würfel gezogen und dieser wird genau einmal geworfen. Die Zahl 1 tritt bei diesem Experiment mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{24}$ auf.
Bestimmen Sie, wie viele Würfel der Variante 1 der Behälter enthält. Erreichbare BE -Anzahl: 2

Aufgabe B 1

Der Querschnitt der Hülle eines mit Heißluft gefüllten Ballons kann in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung 0 (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt werden (siehe Abbildung).

Die Rotationsachse der Ballonhülle liegt auf der Abszissenachse. Der Durchmesser $\overline{AB}$ der unteren kreisförmigen Öffnung des Ballons liegt auf einer zur Ordinatenachse parallelen Geraden. Die Stärke des Materials der Ballonhülle wird vernachlässigt.

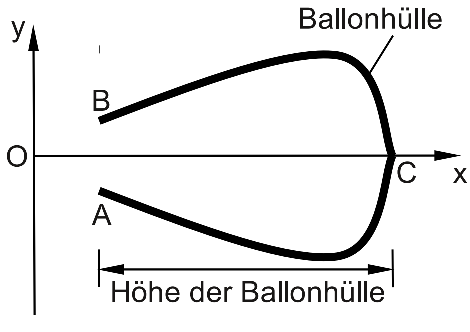


Abbildung (nicht maßstäblich)

Für bestimmte Werte für t ($t \in \mathbb{R}$, $0 < t < 10$) liegt die Querschnittslinie der Ballonhülle zwischen den Punkten B und C näherungsweise auf dem Graphen der Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{x}{10-t}\sqrt{25-t-x}$ ($x \in \mathbf{D}_{f_t}$). Die erste Ableitungsfunktion von f_t kann dargestellt werden durch

$$f_t'(x) = \frac{50 - 2\cdot t - 3\cdot x}{(20-2\cdot t)\cdot\sqrt{25-t-x}} \quad (x \in \mathbf{D}_{f_t}).$$

1.1 Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_t an.
Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_t an.
Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der ersten Ableitungsfunktion f_t' an. Die

Funktion f_t besitzt genau eine Extremstelle.
Geben Sie diese Extremstelle an. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Betrachtet wird ein mit Heißluft gefüllter Ballon, dessen Querschnittslinie der Ballonhülle zwischen den Punkten B und C auf dem Graphen der Funktion f_4 liegt. Jeder zur Rotationsachse senkrechte Schnitt durch die Ballonhülle ergibt einen Kreis. Der Durchmesser der unteren kreisförmigen Öffnung des Ballons beträgt 3,00 m.

1.2 Ermitteln Sie den maximalen Durchmesser der Ballonhülle dieses Ballons. Bestimmen Sie die Höhe der Ballonhülle dieses Ballons.
Zur Stabilisierung sind in die Ballonhülle 20 Lastbänder eingenäht. Jedes Band verläuft entlang der Ballonhülle auf kürzestem Weg vom unteren Ballonrand bis zu einer Höhe von 18,00 m über der unteren kreisförmigen Öffnung des Ballons.
Bestimmen Sie die Gesamtlänge des benötigten Bandmaterials für alle Lastbänder, wenn für die Verarbeitung zusätzlich 12 % der berechneten Länge berücksichtigt werden.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

1.3 Die heiße Luft im Inneren des Ballons hat die mittlere Dichte 0,984 kg/m³.
Bestimmen Sie die Masse der heißen Luft im Inneren des Ballons. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Der beschriebene Heißluftballon wird aufgerichtet und ist startbereit.

Die Bewegung des Ballons wird in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 Meter) beobachtet. Zum Startzeitpunkt liegt die Symmetrieachse der Ballonhülle auf der z-Achse und der Punkt C der Hülle besitzt die z-Koordinate $z_C = 21{,}00$. Das punktförmige Objektiv einer Kamera befindet sich im betrachteten Koordinatensystem im Punkt K(0,00 | 40,00 | 2,07).

1.4 Jeder Punkt des Ballons bewegt sich nach dem Start für 300 Sekunden mit der^konstanten
Geschwindigkeit 3,00 $\frac{m}{s}$ in Richtung des Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2{,}00 \\ 4{,}00 \\ 1{,}50 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Entfernung des Punktes C vom Objektiv der Kamera nach diesen 300 Sekunden. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Zum Einnähen der Lastbänder kommen zwei Garnsorten zur Anwendung, die bei unterschiedlicher Belastung reißen. Die Reißfestigkeit Z (in N) gibt die Zugkraft an, ab der das Garn reißt. Die Reißfestigkeit jeder Garnsorte wird als normalverteilt angenommen.

1.5 Bei Garnsorte 1 gilt für die Reißfestigkeit Z_1: $\mu_1 = 2{,}31$ N und $\sigma_1 = 0{,}35$ N.
Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Garnsorte 1 bei einer Belastung von weniger als 2,90 N reißt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.6 In Tests zur Untersuchung der Reißfestigkeit Z2 der Garnsorte 2 wurde festgestellt, dass 95 % der Proben bei einer Belastung von weniger als 2,8 N rissen.
Bei Garnsorte 2 gilt für die Reißfestigkeit Z_2: $\sigma_2 = 0{,}38$ N.
Ermitteln Sie den Erwartungswert μ_2 der Reißfestigkeit Z_2 der Garnsorte 2.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe B 2

Die Studenten einer Kunsthochschule erhalten im Rahmen eines Projektes den Auftrag, einen Gegenstand des täglichen Gebrauchs zu gestalten.

Student Peter experimentiert dabei mit Paaren zueinander kongruenter, gerader und quadratischer Pyramiden. Die Grundflächen der Pyramiden aller Paare haben eine Kantenlänge von 25 mm.

Jedes Paar von Pyramiden unterscheidet sich von einem anderen Pyramidenpaar durch die Neigung der Seitenflächen zur Grundfläche.

Peter zersägt jede der Pyramiden eines Paares parallel zu ihrer Grundfläche in einer Höhe h (in Millimeter) so, dass die Seitenlänge der quadratischen Deckfläche des entstehenden Restkörpers 15 mm beträgt.

Die beiden Restkörper eines Pyramidenpaares setzt er zu einer Eieruhr zusammen (siehe Abbildung).

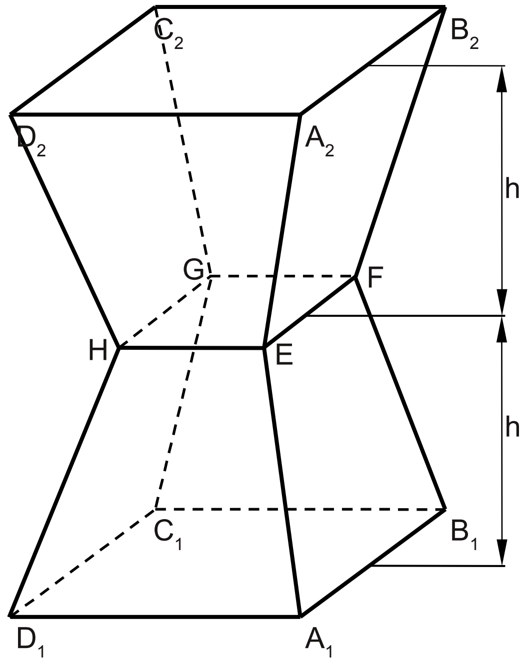


Abbildung 1: nicht maßstäblich

Jede dieser so entstandenen Eieruhren kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Millimeter) mit den Punkten $A_1(0 \mid 25 \mid 0)$, $B_1(-25 \mid 25 \mid 0)$, $D_1(0 \mid 0 \mid 0)$ und $E(-5 \mid 20 \mid h)$ dargestellt werden.

2.1 Geben Sie die Koordinaten der Punkte C_1, C_2 und F an.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche A_1B_1FE in Abhängigkeit von h. Erreichbare BE-Anzahl: 5

2.2 Bei einer Eieruhr gilt h = 36.
Berechnen Sie den Neigungswinkel der Kante $\overline{A_1E}$ zur Grundfläche $A_1B_1C_1D_1$ bei dieser Eieruhr. Erreichbare BE -Anzahl: 2

2.3 Ermitteln Sie einen Näherungswert für h so, dass die Kanten $\overline{EA_1}$ und $\overline{EA_2}$ einen Winkel von 150° einschließen. Erreichbare BE-Anzahl: 3

In jeder Eieruhr befinden sich zwei kongruente gerade Kreiskegel, deren Grundflächen in den Flächen $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$ liegen. Die Grundkreisflächen besitzen jeweils einen Durchmesser von 20 mm. Die Spitzen der Kreiskegel treffen im Schnittpunkt M der Diagonalen der Fläche EFGH aufeinander. Im Punkt M befindet sich eine Bohrung, durch die der Sand der Eieruhr gleichmäßig rieseln kann. Der Durchmesser der Bohrung wird vernachlässigt.

2.4 Ermitteln Sie einen Wert für h so, dass das Volumen eines solchen Kreiskegels 4,3 cm^3 beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

2.5 Bestimmen Sie einen Wert für h so, dass der Neigungswinkel der Mantellinie des Kreiskegels zur Grundfläche um 15° kleiner als der Neigungswinkel einer Seitenfläche der Eieruhr zur Grundfläche ist. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Student Peter hat schon einen Preis bei einem Wettbewerb erhalten. Erfahrungsgemäß kennen drei von vier Studenten der Kunsthochschule die Preisträger der Wettbewerbe.

2.6 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 80 Studenten der Kunsthochschule mehr Studenten Peter als Preisträger kennen, als man erwarten kann.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 16 dieser 80 Studenten Peter als Preisträger nicht kennen. Erreichbare BE-Anzahl: 4

2.7 60 % der Studenten, die Peter als Preisträger kennen, interessieren sich auch für sein Projekt Eieruhr. Aber auch 20 % der Studenten, die Peter als Preisträger nicht kennen, interessieren sich für sein Projekt. Während einer Befragung gibt ein Student an, dass er sich für das Projekt Eieruhr interessiert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Student auch Peter als Preisträger kennt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Lösungsvorschläge

Teil A

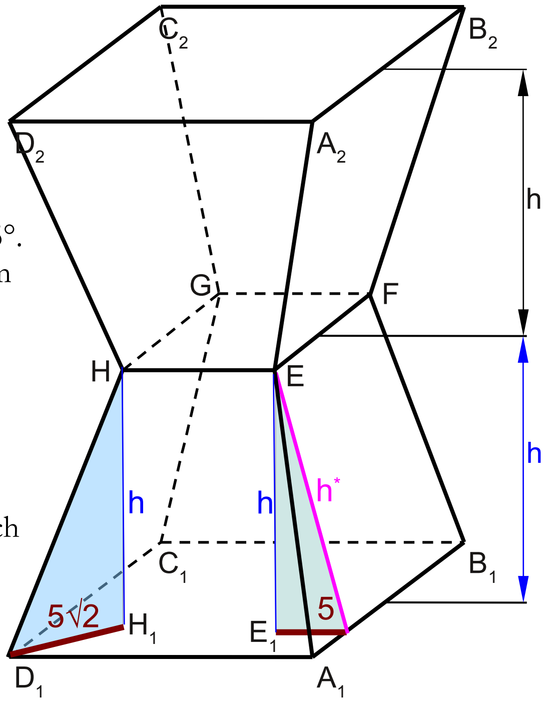
1. Feld 3, 2, 3, 3, 3
2. $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - e^{-x} + C$ mit $2 = 0 - e^0 - C \Rightarrow C = 3$ und $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - e^{-x} + 3$
3. $\begin{pmatrix} b-2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ b = 8/5

   $\begin{pmatrix} b-2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow k = -\frac{1}{2}$ und $\begin{pmatrix} b-2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ es gibt kein b, so dass $g \perp E_b$
4. k sei die Anzahl der Würfel V1: $\frac{k}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4-k}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$ $\Rightarrow k = 3$

Teil B 1

1) $25 - t - x \geq 0 \Rightarrow \mathbf{D_f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 25 - t\}$
   $x_{01} = 0$; $x_{02} = 25 - t$
   $\mathbf{D_f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 25 - t\}$
   $x_e = \frac{50-2t}{3}$
2) Durchmesser d: $d = 2\, f_4(14) \approx 12.3469$ m
   $f_4(x_B) = 1.5 \Rightarrow x_B \approx 2.0685$; $x_0 = 21$ und $h \approx 18.9315$ m
   eine Bogenlänge: $\int_{2.0685}^{18+2.0685} \sqrt{1+\left(f_4'(x)\right)^2}\, dx \approx 20.0444$
   Gesamtlänge: 449 m
3) Volumen: $V = \pi \cdot \int_{2.0685}^{18+2.0685} f_4^2(x)\, dx \approx 1409.2989$ und Masse $m \approx 1387$ kg
4) Punkt C im Zeitpunkt 0 s: P(0 | 0 | 21) und nach 300 s: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 300 \cdot 3 \cdot \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1.5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1.5 \end{pmatrix}\right|} \approx \begin{pmatrix} -381.5992 \\ 763.1985 \\ 307.1994 \end{pmatrix}$
   Abstand zur Kamera: ≈ 873 m
5) $X \sim N_{\mu=2.31;\sigma=.35} \rightarrow P(X < 2.9) = 0.9541$
6) $P(X < 2.8) = .95$ und $X \sim N_{\mu;\sigma=.38} \rightarrow \mu \approx 2.1750$
   z. B.: `solve(normalcdf(-1E99,2.8,M,.38)-.95,M,1,10)` → 2.1750

Teil B 2



1) $C_1(-25 \mid 0 \mid 0)$, $C_2(-25 \mid 0 \mid 2h)$, $F(-20 \mid 20 \mid h)$
   Fläche A: $A(h) = \frac{1}{2}(25 + 15) \cdot h^* = 20 \cdot \sqrt{h^2 + 25}$
2) Der gesuchte Winkel befindet sich im Dreieck A_1EE_1.
   $\alpha = \arctan(h/(5\sqrt{2})) \approx 78.89°$
3) Ist Winkel $\sphericalangle A_1EE_1 = 15°$ so ist $\sphericalangle A_1EA_2 = 180° - 2 \cdot 15°$.
   $\tan 15° = 5\sqrt{2} / h$ bzw. $h = 5\sqrt{2} / \tan 15° \approx 26.39$ mm
4) Kegel: $1/3\ \pi\ r^2\ h = 4{,}3\ cm^3 = 4300\ mm^3$ mit $r = 10$
   $\Rightarrow h \approx 41.1$ mm
5) Winkel im Kreiskegel: $\beta = \arctan(h/10)$
   Winkel der Seitenfläche: $\alpha = \arctan(h/5)$ und
   $\beta + 15° = \alpha$
   Die Gleichung $15° = \arctan\left(\frac{h}{5}\right) - \arctan\left(\frac{h}{10}\right)$ ließe sich durch anwenden des Tangens und des Additionstheorems für $\tan(\alpha - \beta)$ vereinfachen zu
   $\tan(15°) = \frac{5h}{h^2 + 50}$ und dann als quadratische Funktion lösen, jedoch scheint der Einsatz des GTR sinnvoller:
   `solve(tan⁻¹(X/5) - tan⁻¹(X/5) - 15°,X,3)` $\rightarrow$ 3.2432
   bzw. mit einem anderen Startwert ist $h \approx 15.4171$ mm
   Beachten Sie die `mode`-Einstellung bezüglich der Winkeleingabe
6) Binomialverteilung $n = 80$; $p = .75$ mit $E = 60 \Rightarrow P(X>60) = 1 - B_{n;p}(60) \approx 0.4572$
   $B_{n;1-p}(16) \approx 0.1841$
7) k steht für kennen; i für interessieren; in der Aufgabe gegeben: $P(k) = .75$; $P_k(i) = .6$ und
   $P_{\bar{k}}(i) = .2$
   also $P(i) = .75 \cdot .6 + .25 \cdot .2$ und $P_i(k) = .75 \cdot .6 / P(i) = .9$