Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2012, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Baethge (baethge@ehrenberg-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 08.05.12.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 300 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Welcher der angegebenen Terme beschreibt einen Funktionsterm der ersten Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$ ($x \in D_f$)?

☐ $2x \cdot e^x + e \cdot x^2$ ☐ $x^2 \cdot e^{2 \cdot x}$ ☐ $2x \cdot e^x + x^2$ ☐ $2x \cdot e^x$ ☐ $2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

1.2 Die Funktion f mit $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ ($x \in D_f$) besitzt für $x = 1$

☐ den Funktionswert $y = 1$
☐ keinen Funktionswert
☐ eine Nullstelle
☐ eine Polstelle
☐ eine Extremstelle

1.3 Welches bestimmte Integral mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ hat den Wert 0?

☐ $\int_{-2}^{2} (x^2 + a)\,dx$ ☐ $\int_{-2}^{2} e^{ax}\,dx$ ☐ $a \cdot \int_{-2}^{2} \sin(x)\,dx$ ☐ $a \cdot \int_{-2}^{2} x^4\,dx$ ☐ $\int_{-2}^{2} (x^2 + 2)\,dx$

1.4 Die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$) verläuft

☐ parallel zur x-y-Koordinatenebene
☐ parallel zur y-z-Koordinatenebene
☐ parallel zur x-z-Koordinatenebene
☐ parallel zur z-Achse
☐ durch den Koordinatenursprung

1.5 Gegeben sind alle ganzrationalen Funktionen f mit $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, deren erste Ableitungsfunktion f' jeweils die folgenden Eigenschaften haben:
(1) Die erste Ableitungsfunktion f' besitzt genau eine Nullstelle.

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) \leq 0$.
Welche Aussage ist unter diesen Voraussetzungen für jede dieser Funktionen wahr?

- ▢ Die Funktion f besitzt eine Polstelle.
- ▢ Die Funktion f besitzt ein Minimum.
- ▢ Die Funktion f besitzt ein Maximum.
- ▢ Die Funktion f ist monoton wachsend.
- ▢ Die Funktion f besitzt eine Wendestelle.

Für Aufgabe 1 erreichbare BE -Anzahl: 5

2 Gegeben ist die Ebene E mit E: $x + 2 \cdot y - 2 \cdot z = 2$ und für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) eine Ebene G_a mit $G_a : 3 \cdot x + 4 \cdot y + a \cdot z = 1$.
Für jedes b ($b \in \mathbb{R}$) ist ein Punkt P_b $(1|-2|b)$ gegeben.

2.1 Geben Sie den Wert für b an, für den der Punkt Pb in der Ebene E liegt.
Erreichbare BEAnzahl: 1

2.2 Bestimmen Sie den Abstand der Punkte P_b zur Ebene G_a für $a = 0$. Erreichbare BE-Anzahl: 2

2.3 Geben Sie den Wert für a an, für den die Ebenen E und Ga orthogonal zueinander verlaufen.
Erreichbare BE-Anzahl: 1

3 Für jedes p ($p \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion f_p mit $f_p(x) = x^2 - p \cdot x - 2$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben. Für jeden Wert für p besitzt der Graph von f_p genau einen lokalen Extrempunkt. Alle diese Extrempunkte liegen auf dem Graphen einer Funktion g.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g. Erreichbare BEAnzahl: 4

4 Eine Umfrage unter 32 Schülern hat ergeben:
Genau 20 Schüler besitzen einen internetfähigen Computer, genau 14 Schüler besitzen ein Fahrrad und genau 4 Schüler besitzen weder einen internetfähigen Computer noch ein Fahrrad.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Schüler sowohl einen internetfähigen Computer als auch ein Fahrrad besitzt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe B 1

Betrachtet wird ein 200 m langer geradlinig verlaufender Abschnitt eines Hochwasserschutzdammes.

Sein Querschnitt kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt werden. Dieser Querschnitt wird im gesamten Abschnitt näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $y = f(x) = \left(\frac{1}{20}\cdot x^2 - \frac{9}{5}\right)^2$ $(x \in \mathbb{R},\ x_A \le x \le x_B)$ Abszissenachse begrenzt (siehe Abbildung).

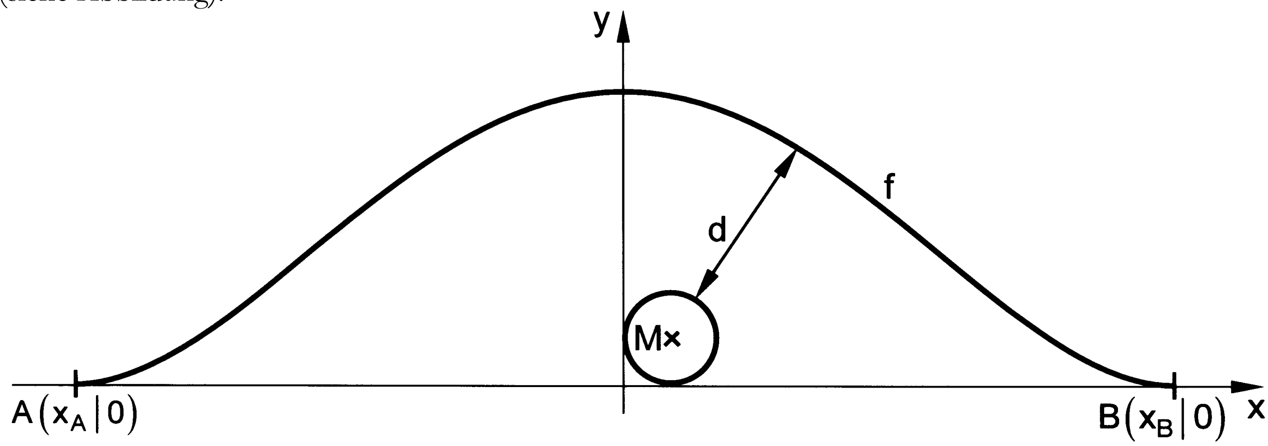


Abbildung (nicht maßstäblich)

1.1 Geben Sie die Breite und die Höhe dieses Dammes an.
Ermitteln Sie den größten Steigungswinkel des Dammes. Erreichbare BE -Anzahl: 4

1.2 Im betrachteten Abschnitt soll auf der gesamten Oberfläche des Dammes die Grasnarbe erneuert werden.
Ermitteln Sie, für wie viele Quadratmeter Grassamen bestellt werden müssen.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.3 Der Grassamen wird in zwei unterschiedlichen Qualitäten (erste und zweite Wahl) angeboten. Der Hersteller gibt für die Grassamen erster Wahl eine Keimgarantie von 95 % und für die Grassamen zweiter Wahl eine Keimgarantie von 80 % an.
Ein Gartenbaubetrieb erhält vom Hersteller eine unbeschriftete Probepackung Grassamen. Der Hersteller behauptet, dass diese Grassamen von erster Wahl sind.
Der Gartenbaubetrieb will in einer Stichprobe von 100 ausgesäten Grassamen die Nullhypothese H_0 mit $p_0 = 0{,}95$ gegen die Alternativhypothese H_1 mit $p_1 = 0{,}80$ testen, indem er prüft, wie viele Grassamen von den 100 ausgesäten Samen keimen.
Ermitteln Sie für den Ablehnungsbereich A der Nullhypothese von $A = \{0; \ldots ; 90\}$ die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. und 2. Art. Erreichbare BEAnzahl: 4

1.4 Grassamen wird in Tüten angeboten. Bestimmt man von diesen Tüten mit Grassamen jeweils die Masse, dann sind diese Massen annähernd normalverteilt.
Für Tüten mit Grassamen erster Wahl ergibt sich für die Masse einer Tüte mit Grassamen der Erwartungswert $\mu_1 = 3\,000$ g und die Standardabweichung $\sigma_1 = 30$ g.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Masse m einer zufällig ausgewählten Tüte mit Grassamen erster Wahl im Intervall $2\,980 \text{ g} \le m \le 3\,020$ g liegt.
Für Tüten mit Grassamen zweiter Wahl ergibt sich für die Masse einer Tüte mit Grassamen der Erwartungswert $\mu_2 = 3\,000$ g und die Standardabweichung σ_2.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 58 % beträgt die Masse einer zufällig ausgewählten Tüte mit Grassamen zweiter Wahl mindestens 2 990 g.
Ermitteln Sie die Standardabweichung σ_2. Erreichbare BE-Anzahl: 4

1.5 Eine Rohrleitung mit einem Außendurchmesser von 1 Meter verläuft im Innern des Dammes (siehe Abbildung).

Im Querschnitt hat der die Rohrleitung darstellende Kreis den Mittelpunkt M(0,5 | 0,5).
Ermitteln Sie den minimalen Abstand d der Rohroberfläche zur Profillinie der Dammoberfläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.6 Für Werte a und b (a, b ∈ ℝ; a > 0; b > 0) begrenzen der Graph der Funktion $f_{a,b}$ mit

$$f_{ab}(x)=\left(\frac{1}{a}\cdot x^2-b\right)^2$$ (x ∈ $D_{fa,b}$ und die Abszissenachse den Querschnitt eines Dammes.

Beschreiben Sie ein Verfahren zum Nachweis dafür, dass der Graph jeder dieser Funktionen die Abszissenachse als Tangente hat.
Ermitteln Sie die Werte für a und b so, dass der Damm eine Höhe von 4 m und eine Breite von 8 m besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Aufgabe B 2

Im Rahmen einer internationalen Reisemesse präsentiert sich das Reiseland Ägypten. Auf dem ebenen Boden des Messegeländes wurde dazu ein Modell einer geraden Pyramide aus Holz errichtet.

Die quadratische Grundfläche ABCD der Pyramide ABCDS liegt in der x-y-Koordinatenebene eines kartesischen Koordinatensystems (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter).

Für die Koordinaten der Punkte gilt: A(8,0 | 0,0 | 0,0), C(0,0 | 8,0 | 0,0) und D(0,0 | 0,0 | 0,0).

Die Pyramide umschließt ein Volumen von 160,0 m³.
Alle Materialstärken werden vernachlässigt.

2.1 Zeigen Sie, dass die Spitze S der Pyramide die Koordinaten S(4,0 | 4,0 | 7,5) besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

In den Pyramiden von Gizeh in Ägypten gelangt man über schräg ansteigende Gänge zu den Grabkammern der Pharaonen. Um dies auf der Reisemesse zu simulieren, hat man eine gegenüber der Grundfläche ABCD der Pyramide geneigte, ebene Bodenfläche in die Pyramide eingebaut. Diese Bodenfläche hat die Eckpunkte A, E, F(6,0 | 7,2 | 1,5) und G(6,0 | 0,0 | 0,0).

Die Strecken AE und EF liegen in den Seitenflächen ABS bzw. BCS der Pyramide (siehe Abbildung).

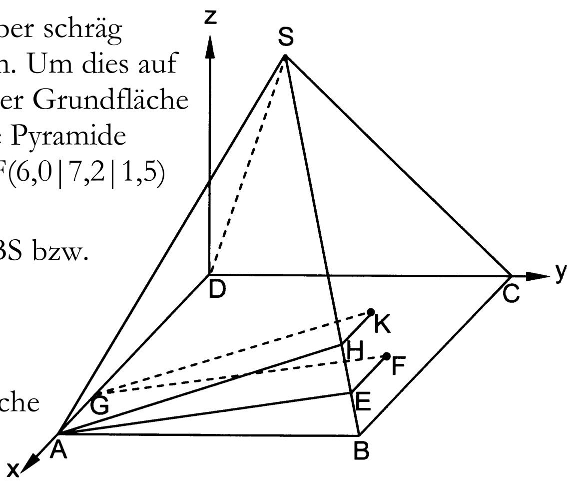


Abbildung (nicht maßstäblich)

2.2 Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der die Bodenfläche AEFG liegt.
Bestimmen Sie den Neigungswinkel dieser Bodenfläche gegenüber der Grundfläche ABCD der Pyramide.
Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche AEFG ein Trapez ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Bodenfläche AEFG.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

2.3 In der Cheopspyramide in Ägypten führt ein Gang in die Königskammer. Dieser Gang soll durch den Einbau einer weiteren trapezförmigen Fläche AHKG in das Modell der Pyramide verdeutlicht werden (siehe Abbildung). Die 50-prozentige Steigung des Ganges soll durch die Neigung der Fläche AHKG gegenüber der Grundfläche ABCD der Pyramide simuliert werden. Die Strecken AH und HK liegen in den Seitenflächen ABS bzw. BCS der Pyramide. Der Punkt K besitzt die Koordinaten K (6,0 | y_K | z_K).
Ermitteln Sie die z-Koordinate des Punktes K.

Erreichbare BE -Anzahl: 3

2.4 Um die Aufmerksamkeit auf den Messestand zu erhöhen, möchte man Lichtstrahler installieren. Einer dieser punktförmigen Lichtstrahler soll an einem Mast befestigt werden, welcher senkrecht zum Boden über dem Punkt L(4,0 | 11,0 | 0,0) steht. Der Lichtstrahl soll im Punkt T(4,0 | 6,4 | 3,0) senkrecht auf die Seitenfläche BCS der Pyramide treffen.
Bestimmen Sie die Höhe über dem Punkt L, in welcher der Lichtstrahler am Mast befestigt werden muss.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Am Messestand von Ägypten wird in ausgelegten Werbebroschüren für Nilkreuzfahrten geworben.

Erfahrungsgemäß nimmt ein Besucher dieses Messestandes mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % eine solche Broschüre mit. Von den Besuchern, die eine Werbebroschüre mitgenommen haben, buchen erfahrungsgemäß 10 % während der Messe eine der angebotenen Nilkreuzfahrten.

Von allen Besuchern dieses Messestandes buchen erfahrungsgemäß 7 % während der Messe eine Nilkreuzfahrt.

2.5 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 Besuchern des Messestandes mehr Besucher eine Werbebroschüre mitnehmen als zu erwarten ist. Erreichbare BE-Anzahl: 2

2.6 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Besucher des Messestandes, der während der Messe keine Nilkreuzfahrt gebucht hat, auch keine Werbebroschüre mitgenommen hatte.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Lösungsvorschläge

Teil A

1 je Ergebnis 1 BE: Feld 5, Feld 2, Feld 3, Feld 3, Feld 5

2.1 Wert für b: b = −2,5

2.2 Ansatz für Abstand: z. B.: nach Hesse $d(P_b, G_0) = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{6}{5}$

Abstand: 1,2

2.3 Wert für a: a = 5,5

3 Extremstelle: $f'_p(x_e) = 2\,x_e - p = 0 \Rightarrow p = 2\,x_e \Rightarrow y_e = f_{2\,xe}(x_e) = -x_e^2 - 2$
Ordinate des Extrempunktes
Ansatz für eine Gleichung der Funktion g
eine Gleichung der Funktion g: z. B. $g(x) = -x^2 - 2$

4 Ansatz für Wahrscheinlichkeit siehe Tabelle
Wahrscheinlichkeit: 3/16

	iC	**Kein iC**	
Fahrrad	6		14
kein F.		4	
	20	12	32

Teil B 1

1.1 Breite: 12 m
Höhe: 3,24 m
Ansatz für maximalen Steigungswinkel: Maximum der ersten Ableitung
fMax(nDerive(Y1,X,X),X,-6,0) ⟶ 3.4641 und m = f'(-3.4641) = 0.8314 = tan α
maximaler Steigungswinkel: ≈ 39,7°

1.2 Ansatz für Bogenlänge: $\int_{-6}^{6} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

Bogenlänge: ≈ 13,91m
Ergebnis: Grassamen für ca. 2 780 Quadratmeter

1.3 Ansatz für Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art: $X \sim b_{100;.95}$ mit alpha = $P(x \leq 90)$
Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art: ≈ 0,0282
Ansatz für Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art: $X \sim b_{100;.8}$ mit beta = $P(x > 90)$
Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art: ≈ 0,0023

1.4 Wahrscheinlichkeit: P (2 980 g ≤ m ≤ 3 020 g) ≈ 0, 495
Ansatz für Standardabweichung σ_2: $\Phi_{3000;\,\sigma}(x >= 2990) = 0{,}58 \Rightarrow \Phi_{3000;\,\sigma}(x < 2990) = 0{,}42$
Zwischenschritt: $-10/\sigma = -0{,}2019$ ⟵ `invNorm(.42)`
Standardabweichung σ_2: $\sigma_2 \approx 50$ g

1.5 Ansatz für Zielfunktion: kürzester Abstand zum Mittelpunkt des Kreises
$l(x) = d^2(x) = (x - 0{,}5)^2 + (f(x) - 0{,}5)^2$ ⟶ Minimum bei x = 1.7835
d ≈ 2,54 muss noch um den Radius des Kreises vermindert werden
Zielfunktion
minimaler Abstand d: d ≈ 2,04 m

1.6 vollständige Beschreibung (3 BE): die Tiefpunkte sind gleichzeitig die Nullstellen
$f(x_e) = 0$, $f'(x_e) = 0$ und $f''(x_e) \geq 0$
Wert für b: b = 2
Ansatz für Wert für a: $f_{a,b}(4) = 0$
Wert für a: a = 8

Teil B 2

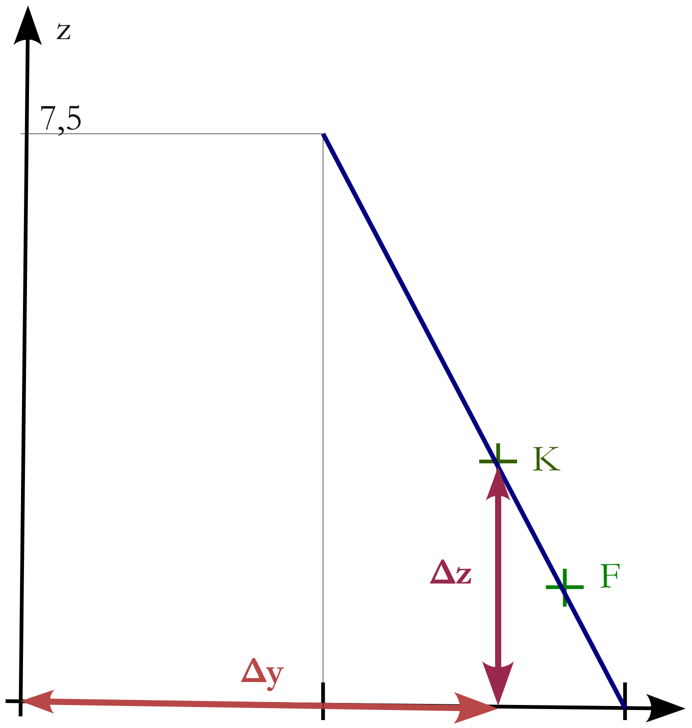
2.1 Nachweis für x- und y-Koordinate: da eine gerade Pyramide vorliegt, bezeichnen die Werte die Mitte der Grundfläche (Diagonalenschnittpunkt)
Nachweis für z-Koordinate: $V = \frac{1}{3} A_g h \Rightarrow h = 7{,}5$

2.2 eine Gleichung der Ebene: z. B. $5 \cdot y - 24 \cdot z = 0$
Ansatz für Neigungswinkel: Grundfläche z = 0 und GTR: prgmGeometri
Neigungswinkel: ≈ 11,8°

Koordinaten des Punktes E: $\overrightarrow{OE} = g_{BS} \cap z = 1{,}5 \quad \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ 7{,}2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Nachweis für Trapez (2 BE): $\overrightarrow{AG} \| \overrightarrow{EF}$ aber nicht $\overrightarrow{GF} \| \overrightarrow{AE}$
Ansatz für Flächeninhalt der Bodenfläche: die Höhe des Trapezes ist $\overline{GF}$, denn die x-Werte stimmen überein und damit sind die Winkel bei G und K rechte Winkel.
Flächeninhalt: ≈ 11,8 m²

2.3 Ansatz für z-Koordinate (2 BE):
betrachten wir die Ebene x = 6, enthält die Schnittlinie auf Fläche BCS die Punkte P und K (siehe Abbildung); es ergibt sich die Geradengleichung $z = -15/8\, y + 15$ und aus dem Seitenverhältnis
$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{1}{2} = -\frac{15}{8} + \frac{15}{y}$
z-Koordinate: $z_K \approx 3{,}2$



2.4 Ansatz für Höhe des Lichtstrahlers (2 BE)
nun sind wir in der Ebene x = 4, aber wir können die blaue Gerade der Abbildung weiter benutzen: Senkrechte durch T
$z = 8/15\, y - 31/75$ und mit $y = y_L = 11$
ergibt sich $z_L \approx 5.453$
Höhe des Lichtstrahlers: ≈ 5,5 m

2.5 Ansatz für Wahrscheinlichkeit:
$X \sim b_{100;.6}$ $P(x>60)$
Wahrscheinlichkeit: ≈ 0,4621

2.6 Ansatz für Wahrscheinlichkeit (2 BE): $P(\overline{w}, \overline{b}) = 0{,}39$, $P_{\overline{b}}(\overline{w})$
Wahrscheinlichkeit: ≈ 0,4194