KULTUSMINISTERIUM DES LANDES SACHSEN-ANHALT

Abitur
April/Mai 2002

Mathematik
(Leistungskurs)

Arbeitszeit: 300 Minuten

Der Prüfling wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten L 1, L 2 und L 3 zur Bearbeitung aus.

Gewählte Aufgaben (Die drei zur Bewertung vorgesehenen Aufgaben sind vom Prüfling anzukreuzen.):

Gebiet L 1	Gebiet L 2	Gebiet L 3
Aufgabe 1.1 ☐	Aufgabe 2.1 ☐	Aufgabe 3.1 ☐
Aufgabe 1.2 ☐	Aufgabe 2.2 ☐	Aufgabe 3.2 ☐

Unterschrift Prüfling:

Gebiet L 1 **Aufgabe 1.1**
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a und g durch

$y = f_a(x) = -\frac{1}{3}x^2 + ax$, $a, x \in R,\ a > 0$

$y = g(x) = \ln x$ $x \in R,\ x > 0.$

Die Graphen der Funktionen f_a seien mit F_a bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse sowie der lokalen Extrempunkte der Graphen F_a und ermitteln Sie die Art der Extrempunkte.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ortskurve k der Extrempunkte.

Zeichnen Sie die Ortskurve k im Intervall $-4 \le x \le 4$ und den Graphen F_2 im Intervall $-2 \le x \le 8$.

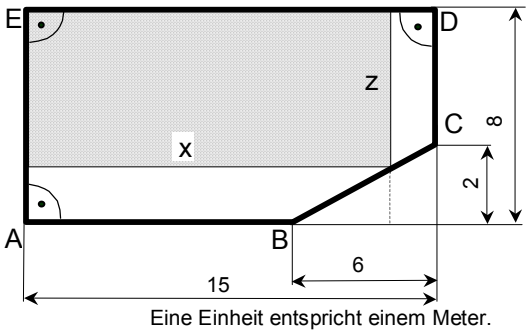
Jeder Graph F_a schließt mit der x-Achse, wie auch mit der Ortskurve k, jeweils eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie das Verhältnis der Maßzahlen dieser Flächeninhalte.

b) Durch Verketten der Funktionen f_2 und g entsteht die Funktion v mit $y = g(f_2(x))$.
Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion v.

Zeigen Sie, dass der Graph F_2 und der Graph der Funktion v an genau einer Stelle zur x-Achse parallele Tangenten besitzen, und ermitteln Sie jeweils eine Gleichung dieser Tangenten.

c) Untersuchen Sie die Betragsfunktion b mit $y = b(x) = |f_2(x)|$, $x \in R$, an der Stelle $x_1 = 0$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

d) Eine ebene Dachfläche hat die Form eines Fünfeckes ABCDE. Zur Bestückung mit Sonnenkollektoren soll eine rechteckige Fläche mit den Maßzahlen der Seitenlängen x und z (siehe nebenstehende Zeichnung) genutzt werden.
Zeigen Sie, dass zur Berechnung der Maßzahlen der Inhalte dieser Fläche die Zuordnungsvorschrift der Funktion f_{11} geeignet ist.



Eine Einheit entspricht einem Meter.
(Zeichnung nicht maßstäblich)

Berechnen Sie die Maßzahl der Seitenlänge x für den Fall, dass der Inhalt der Rechteckfläche maximal wird.

Gebiet L 1 **Aufgabe 1.2**
Analysis

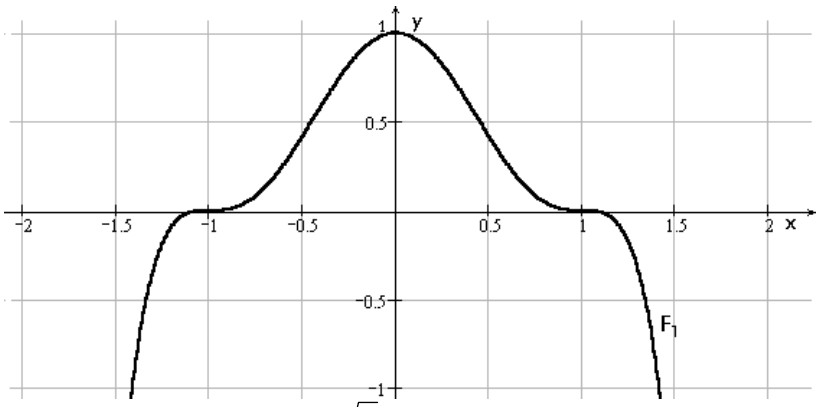
Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$y = f(x) = (x^2 - 1)^3$, $x \in R$,

$y = g(x) = e^{-3x^2}$, $x \in R$.

Ihre Graphen seien F bzw. G.

a) Untersuchen Sie den Graphen F auf Symmetrie; ermitteln Sie die Lage sowie die Art des lokalen Extrempunktes und die Koordinaten der Wendepunkte.
Begründen Sie, dass in nebenstehender Zeichnung der an der x-Achse gespiegelte Graph F in einem Intervall abgebildet ist und geben Sie eine Gleichung der durch diesen Graphen F_1 dargestellten Funktion f_1 an.



b) Der Graph G besitzt genau zwei Wendepunkte: $W_{1;2}\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6} \mid \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $-2 \le x \le 2$ in das oben gegebene Koordinatensystem; untersuchen Sie dazu diesen Graphen auf Symmetrie und ermitteln Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes sowie dessen Art.

c) Der Graph G, die Geraden mit den Gleichungen x = -1 bzw. x = 1 sowie die x- Achse begrenzen eine Fläche A vollständig.
Der Graph F_1 und die x-Achse begrenzen eine Fläche A_1 vollständig.
Begründen Sie mit Hilfe von Merkmalen der betreffenden Funktionen, dass die Inhalte der Flächen A und A_1 näherungsweise übereinstimmen.
Berechnen Sie einen Näherungswert für die Maßzahl des Inhaltes der Fläche A.

d) Gegeben sind Funktionen $g_{a;b;c}$ durch

$y = g_{a;b;c}(x) = a\ e^{-(bx+c)^2}$, $a, b, c, x \in R$, $a, b > 0$.

Zu diesen Funktionen gehört die Funktion g mit den Parameterwerten a = 1, $b = \sqrt{3}$ und c = 0. Die Funktion f_1 (siehe Aufgabe a)) kann für weitere Funktionen $g_{a,b,c}$ eine Näherungsfunktion sein. Den Wert genau eines der Parameter a, b oder c kann man verändern, so dass die Graphen von $g_{a,b,c}$ und der Graph F_1 (siehe Aufgabe a)) den gleichen Extrempunkt haben.
Begründen Sie (ohne Rechnung), welcher dieser drei Parameter verändert werden kann.

Hinweis: *Da der zeichnerische Teil aus Aufgabe b) auf diesem Blatt zu bearbeiten ist, hat es der Prüfling mit seinem Namen zu beschriften und der Prüfungsarbeit beizufügen.*

Gebiet L 2 **Aufgabe 2.1**
Analytische Geometrie

Ein geologisch untersuchtes Gebiet wird in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 5 Meter im Gelände.
Nach Bohrungen in einem ebenen, der Horizontalebene entsprechenden Gelände, dessen Lage durch die xy-Ebene beschrieben wird, stößt man in folgenden Punkten auf ein Braunkohleflöz:

A(0 | 0 | -2), B(-30 | 0 | -4), C(-30 | 60 | -8), D(0 | 60 | -6), E(-10 | 5 | -3).

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C, D und E in einer Ebene liegen, und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an. Diese Ebene sei mit K bezeichnet.

Es wird angenommen, dass durch die Ebene K die obere Begrenzung eines Kohleflözes beschrieben werden kann.
Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels unter dem das Kohleflöz zur Horizontalebene verläuft.

b) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Parallelogramms sind, und weisen Sie nach, dass der Punkt E im Inneren dieses Parallelogramms liegt.

Dieses Parallelogramm kennzeichnet die obere Begrenzung eines zu erschließenden Kohleflözes, von dem zunächst der darüber liegende Abraum parallel zur Horizontalebene bis zur Tiefe des Punktes A abgetragen werden soll.
Berechnen Sie das Volumen dieses Abraumes. (Dabei ist das Abraumvolumen für praktisch erforderliche Böschungen nicht zu berücksichtigen.)

c) Auf einer Höhenlinie der Ebene K liegen Punkte mit gleicher Höhe. Durch den Punkt A sei die Höhenlinie a bestimmt.
Ermitteln Sie die Koordinaten eines vom Punkt A verschiedenen Punktes der Höhenlinie a und stellen Sie eine Gleichung dieser Höhenlinie auf.

Auf der durch das Parallelogramm ABCD gekennzeichneten Begrenzungsfläche des Kohleflözes sollen senkrecht zu den Höhenlinien Rohre verlegt werden.
Berechnen Sie die Koordinaten eines Vektors der die Richtung der Rohrverlegung beschreibt.

Gebiet L 2 **Aufgabe 2.2**
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind gegeben

die Ebenen E_1: $3x + 4y - 5z - 13 = 0$,
E_2: $7x + y + 5z - 47 = 0$,

die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $r \in R$.

sowie der Punkt A(-2|1|-5).

a) Zeigen Sie, dass durch den Punkt A und die Gerade g eine Ebene E_3 festgelegt wird und ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.
[Ergebnis zur Kontrolle: E_3: $7x + y - 5z - 12 = 0$]

b) Berechnen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels der Ebenen E_2 und E_3.

c) Weisen Sie nach, dass die Normalenvektoren der Ebenen E_1, E_2 und E_3 linear unabhängig voneinander sind; schlussfolgern Sie, in welcher der nachfolgenden Abbildungen die Lage dieser Ebenen zueinander charakterisiert wird (*keine maßstäbliche Darstellung*).

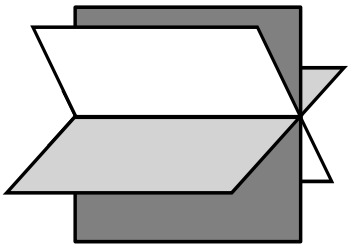


Abbildung 1

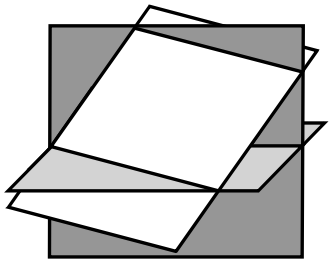


Abbildung 2

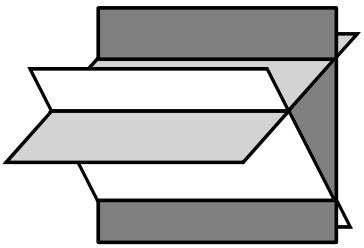


Abbildung 3

Ermitteln Sie den Durchschnitt der drei Ebenen E_1, E_2 und E_3.

d) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen E_2 und E_3.
Zeigen Sie, dass es genau eine Ebene gibt, die mit der Ebene E_2 und E_3 die Schnittgerade gemein hat und parallel zur xy-Ebene liegt; geben Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene an.
Zeigen Sie, dass es keine Ebene gibt, die mit der Ebene E_2 und E_3 die Schnittgerade gemein hat und parallel zur xz-Ebene liegt.

Gebiet L 3 **Aufgabe 3.1**
Stochastik

Ein Unternehmen fertigt in großer Serie elektronisch gesteuerte Pumpen. Die beiden mechanischen Hauptbauteile Kolben und Zylinder werden von verschiedenen Subunternehmen geliefert. Als jeweilige Defektwahrscheinlichkeit wird angenommen, dass 5 % der Kolben und 10 % der Zylinder defekt sind.
Die Zufallsgröße, die die Anzahl der defekten Hauptbauteile in einer Stichprobe angibt, wird als binomialverteilt angenommen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   - von 50 gelieferten Zylindern mehr als 45 fehlerfrei
   - von 50 gelieferten Kolben höchstens drei defekt

   sind.

b) Die Annahme, dass höchstens 5 % der Kolben defekt sind, soll in einem rechtsseitigen Signifikanztest (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$) überprüft werden.
   Entwickeln Sie einen geeigneten Test und ermitteln Sie den Ablehnungsbereich für den Fall einer Stichprobe vom Umfang $n = 100$.

   Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art unter der Annahme, dass für die Nullhypothese $p_0 = 0{,}05$ gilt.

   Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, unter der Annahme, dass $p_1 = 0{,}1$ gilt.

c) Eine elektronische Pumpe besteht im Wesentlichen aus dem elektronischen Steuerteil sowie genau einem Kolben und genau einem Zylinder. Sie gilt als mechanisch fehlerfrei, wenn der Kolben und der Zylinder fehlerfrei sind.
   Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:
   - A: Eine Pumpe ist mechanisch fehlerfrei.
   - B: Eine Pumpe ist mechanisch defekt, weil genau eines der beiden mechanischen Hauptbauteile defekt ist.
   - C: An allen mechanisch defekten Pumpen ist genau eines der beiden mechanischen Hauptbauteile defekt.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse.

   Bei einem Probelauf wird eine Pumpe als mechanisch defekt festgestellt.
   Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein defekter Kolben zu erwarten ist.

Hinweis: Tabelle zur Binomialverteilung im Anhang

Gebiet L 3 **Aufgabe 3.2**
Stochastik

Bei einer Tierpopulation sind durchschnittlich 3 % der Tiere mit dem Erreger einer Krankheit K infiziert. Die Zufallsgröße, die die Anzahl der infizierten Tiere in einer Stichprobe angibt, wird als binomialverteilt angenommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   - in einer Herde von 50 Tieren mindestens vier Tiere;
   - in einem Bestand von 420 Tieren höchstens 10 Tiere

   infiziert sind.

b) Berechnen Sie die Mindestgröße einer Herde, bei der mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens ein Tier infiziert ist.

c) Bei einem Blutschnelltest werden 85 % der infizierten Tiere als solche erkannt. Irrtümlich werden aber auch 20 % der nicht infizierten Tiere durch den Test als infiziert eingestuft.

   Nach dem Schnelltest wird ein Tier als nicht infiziert eingestuft.
   Weisen Sie nach, dass dann das Tier mit weniger als 1 % Wahrscheinlichkeit tatsächlich infiziert ist.

d) Das verstärkte Auftreten der Krankheit K lässt Experten vermuten, dass die Infizierungsrate auf mindestens 10 % gestiegen ist. In einer Studie soll diese Vermutung an 500 Tieren getestet werden.
   Entwickeln Sie einen Test und berechnen Sie auf dem Signifikanzniveau von 1 % den Ablehnungsbereich.

   Aus Kostengründen wird überlegt, die Stichprobe zu verkleinern.
   Stellen Sie dar, welche Auswirkungen dies haben könnte.

   Hinweis: Tabelle zur Binomialverteilung im Anhang

Anhang zu den Aufgaben der Stochastik aus der Abiturprüfung Mathematik im Mai/Juni 2002

Tabelle: Summierte Binomialverteilung

		p								
	k	**0,03**	**0,05**	**0,1**	**0,15**	**...**	**0,85**	**0,9**	**0,95**	**0,97**
50	**0**	0,21807	0,07694	0,00515	0,00030		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	1	0,55528	0,27943	0,03379	0,00291		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	2	0,81080	0,54053	0,11173	0,01419		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	3	0,93724	0,76041	0,25029	0,04605		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	4	0,98319	0,89638	0,43120	0,11211		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	5	0,99626	0,96222	0,61612	0,21935		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	6	0,99930	0,98821	0,77023	0,36130		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	7	0,99989	0,99681	0,87785	0,51875		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	8	0,99998	0,99924	0,94213	0,66810		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	9	1,00000	0,99984	0,97546	0,79109		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	10	1,00000	0,99997	0,99065	0,88008		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	11	1,00000	1,00000	0,99678	0,93719		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	12	1,00000	1,00000	0,99900	0,96994		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	13	1,00000	1,00000	0,99971	0,98683		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	14	1,00000	1,00000	0,99993	0,99471		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	15	1,00000	1,00000	0,99998	0,99805		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	16	1,00000	1,00000	1,00000	0,99934		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	17	1,00000	1,00000	1,00000	0,99979		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	18	1,00000	1,00000	1,00000	0,99994		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	19	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	20	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	...									
	40	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,20891	0,02454	0,00016	0,00000
	41	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,33190	0,05787	0,00076	0,00002
	42	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,48125	0,12215	0,00319	0,00011
	43	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,63870	0,22977	0,01179	0,00070
	44	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,78065	0,38388	0,03778	0,00374
	45	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,88789	0,56880	0,10362	0,01681
	46	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,95395	0,74971	0,23959	0,06276
	47	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,98581	0,88827	0,45947	0,18920
	48	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,99709	0,96621	0,72057	0,44472
	49	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		0,99970	0,99485	0,92306	0,78193
	50	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
100	**0**	0,04755	0,00592	0,00003	0,00000		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	1	0,19462	0,03708	0,00032	0,00000		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	2	0,41978	0,11826	0,00194	0,00002		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	3	0,64725	0,25784	0,00784	0,00009		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	4	0,81785	0,43598	0,02371	0,00043		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	5	0,91916	0,61600	0,05758	0,00155		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	6	0,96877	0,76601	0,11716	0,00470		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	7	0,98938	0,87204	0,20605	0,01217		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	8	0,99678	0,93691	0,32087	0,02748		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	9	0,99913	0,97181	0,45129	0,05509		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	10	0,99979	0,98853	0,58316	0,09945		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	11	0,99995	0,99573	0,70303	0,16349		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	12	0,99999	0,99854	0,80182	0,24730		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	13	1,00000	0,99954	0,87612	0,34743		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	14	1,00000	0,99986	0,92743	0,45722		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	15	1,00000	0,99996	0,96011	0,56832		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000