Aufg.-Nr.: 18	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: GK	WTR

Gegeben sind die Gerade g durch den Punkt P(2 | 1 | -1) und den

Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade h_t durch den Punkt Q(9 | 12 | -2)

und den Richtungsvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}, t \in R$.

a) Bestimmen Sie t so, dass sich die beiden Geraden schneiden, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S.
(Ergebnis: t = -1; S(6 | 9 | 7)).

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte auf der Geraden g, die von Q die Entfernung $3\sqrt{11}$ haben. Erstellen Sie dazu eine Skizze an.
(Ergebnis: A(6 | 9 | 7) = S, B(4 | 5 | 3))

c) Q' sei der Spiegelpunkt von Q bzgl. der Geraden g. Tragen Sie Q' in Ihre Skizze aus Teilaufgabe b) ein und berechnen Sie die Koordinaten von Q'.

d) 1. Geben Sie eine Koordinatengleichung der durch die Geraden g und $h_{t=-1}$ gebildeten Ebene E an.
(mögliches Ergebnis: 8x - 5y + z = 10)

2. Zeigen Sie, dass die Ebene F mit F: x + 2y + 2z = 29 senkrecht auf der Ebene E steht.

Lösung

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$$

I. $-7 + l + m = 0$

II. $-11 + 2l - m \cdot t = 0$

III. $1 + 2l - 3m = 0$

Aus I. folgt $l = 7 - m$; in III. folgt $1 + 14 - 2m - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow l = 4$

In II. folgt $-11 + 8 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = -1$; Schnittpunkt S(6|9|7)

b) Ein Punkt auf der Geraden g hat die Koordinaten $G(2 + l \mid 1 + 2l \mid -1 + 2l)$

$$\vec{QG} = \begin{pmatrix} -7 + \lambda \\ -11 + 2\lambda \\ 1 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$d^2 = (-7 + l)^2 + (-11 + 2l)^2 + (1 + 2l)^2 = 9l^2 - 54l + 171 = (3\sqrt{11})^2 = 99$$
$$\Leftrightarrow l^2 - 6l + 8 = 0 \Rightarrow l_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1$$

$l_1 = 4$ und $l_2 = 2$ Einsetzen in G ergibt die gesuchten Punkte A(6|9|7) = S und B(4|5|3)

c) Die zur Geraden g senkrechte Ebene E, die den Punkt Q enthält hat den Richtungsvektor der Geraden g als Normalenvektor, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, daraus folgt die Ebenengleichung E:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow E : x + 2y + 2z - 29 = 0$$

Setze die Gerade g dort ein:

$$2 + t + 2 \cdot (1 + 2t) + 2 \cdot (-1 + 2t) - 29 = 0 \Leftrightarrow 9t - 27 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

Der Schnittpunkt von E und g ist also F(5|7|5).

Für den Spiegelpunkt Q' folgt

$$\vec{OQ'} = \vec{OQ} + 2 \cdot \vec{QF} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$; also Q'(1|2|12)

d) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; Normalenvektor: $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenform: $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = 0$

Koordinatenform: $8x - 5y + z = 10$

Der Normalenvektor der Ebene F ist $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Skalarprodukt mit $\vec{n}_E$ ergibt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, also sind die Ebenen senkrecht zueinander.