Aufg.-Nr.: 21	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: LK	WTR

Flugbahnen

Bei der Flugsicherung des Sportflughafens herrscht Alarmzustand:
Bert Bruch hat sich soweit von den Folgen seiner letzten Landung erholt, dass er wieder in einem Flugzeug sitzen kann. Er befindet sich derzeit im Anflug auf die Landebahn mit den Eckpunkten

$$A(80 \mid 400 \mid 2),\ B(100 \mid 400 \mid 2),\ C(80 \mid 1200 \mid 6) \text{ und } D(100 \mid 1200 \mid 6)$$
$$(1 \text{ Einheit} \mathrel{\hat{=}} 1 \text{ m})$$

Berts Flugbahn zur Landung verläuft entlang einer Geraden. Er befindet sich zum Zeitpunkt *t* (in s) im Punkt X(*t*) mit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 100 \\ -2550 \\ 228{,}75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}.$$

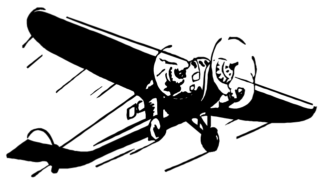
a) Zeigen Sie, dass die vier Eckpunkte der Landebahn in einer Ebene liegen und ein Rechteck bilden.

b) Bestimmen Sie den Abstand der Flugbahn von der (näherungsweise als punktförmig betrachteten) Flugsicherung in $F(0 \mid 0 \mid 8)$.

c) Damit Bert nicht schon wieder eine Bruchlandung macht, muss er natürlich im Bereich der Landebahn aufsetzen. Seine oben angegebene Flugbahn darf beim Aufsetzen nicht um mehr als 6° gegen die Landebahn geneigt sein.
Prüfen Sie, ob Bert beiden Bedingungen gerecht wird und es diesmal schafft.

d) Auch ein zweites Flugzeug im Bereich des Sportflughafens bewegt sich entlang einer Geraden. Es befindet sich zum Zeitpunkt *t* im Punkt Y(*t*) mit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 53 \\ -410 \\ 43{,}75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -30 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Weisen Sie nach, dass die Flugbahn von Bert Bruchs Flugzeug die Flugbahn dieses Flugzeuges schneidet.
Begründen Sie, dass es trotzdem nicht zu einem Zusammenstoß beider Flugzeuge kommt.

e) Berechnen Sie, wo sich die beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt t = 50 befinden.
Berechnen Sie außerdem den Abstand der beiden Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt.

f) Bestimmen Sie den Abstand d(t) der beiden Flugzeuge zu einem beliebigen Zeitpunkt t.
Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die beiden Flugzeuge ihren kleinsten Abstand haben.

Lösung

a)

Die Seitenvektoren sind $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{CD}$ und $\vec{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{AC}$

(Nachweis paralleler Seiten)

Außerdem gilt $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{AB} = 0$ (Nachweis rechter Winkel)

b) Lotpunktfußverfahren

Der Lotfußpunkt liegt auf der Geraden und hat die Koordinaten

$L(100 - 0{,}1t \mid -2550 + 22t \mid 228{,}75 - 1{,}5t)$

Der Vektor $\overrightarrow{FL}$ ist senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden, also

$$\overrightarrow{FL} * \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 100 - 0{,}1t \\ -2550 + 22t \\ 220{,}75 - 1{,}5t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -10 + 0{,}01t - 56100 + 484t - 331{,}125 + 2{,}25t = 0$$

$$\Leftrightarrow -56441{,}125 + 486{,}26t = 0 \Leftrightarrow t \approx 116{,}072$$

$$\left|\vec{FL}\right| = \sqrt{(100 - 0{,}1 \cdot 116{,}072)^2 + (-2550 + 22 \cdot 116{,}072)^2 + (220{,}75 - 1{,}5 \cdot 116{,}072)^2} \approx 100$$

Der Abstand der Flugbahn beträgt also ungefähr 100m.

c) Überprüft werden müssen zwei Dinge:

Liegt der Landepunkt auf der Landebahn?

Ist der Flugbahnwinkel kleiner 6°?

Die Landebahn liegt in der Ebene, die von den Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ aufgespannt wird. Ein Normalenvektor dieser Ebene ergibt sich mit Hilfe des Vektorproduktes:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -80 \\ 16000 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt die Normalenform der Ebene $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 200 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 80 \\ 400 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow -x_2 + 200x_3 = 0$

Einsetzen der Geraden, in der die Flugbahn verläuft:

$$2550 - 22t + 200 \cdot 228{,}75 + 200 \cdot (-1{,}5t) = 0$$
$$\Leftrightarrow 48300 - 322t = 0 \Leftrightarrow t = 150$$

Einsetzen von t = 150 in die Geradengleichung ergibt den Landepunkt S(85|750|3,75). Dieser liegt innerhalb der rechteckigen Landebahn.

Der Winkel ergibt sich mit Hilfe der Formel:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\vec{n} * \vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{u}\right|}$$, wobei $\vec{u} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor der Geraden ist.

$$\sin\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 200 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2 + 200^2} \cdot \sqrt{0{,}1^2 + 22^2 + 1{,}5^2}} \approx \frac{\left|-322\right|}{4410{,}3} \Rightarrow \alpha \approx 4{,}2°$$

Die Bedingungen sind also beide erfüllt.

d) Der Schnitt der beiden Geraden führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 100 - 0{,}1t = 53 + 2s \\ \text{II.} & -2550 + 22t = -410 - 30s \\ \text{III.} & 228{,}75 - 1{,}5t = 43{,}75 + 4s \end{array}$$

$$\text{I.} \cdot 15 - \text{III.} \quad 1271{,}25 = 751{,}25 + 26s \Leftrightarrow s = 20$$
$$\text{I.} \Rightarrow t = 70$$

Einsetzen in II. bestätigt die Lösung.

Der gemeinsame Punkt ist R(93|-1010|123,75)

Da die Parameter t und s den jeweiligen Zeitpunkt an einem bestimmten Ort angeben, sind die Flugzeuge zu verschiedenen Zeiten im Punkt R und stoßen nicht zusammen.

e) Es gilt: $\vec{x}(50) = \begin{pmatrix} 95 \\ -1450 \\ 153{,}75 \end{pmatrix}$ und $\vec{y}(50) = \begin{pmatrix} 153 \\ -1910 \\ 243{,}75 \end{pmatrix}$

Der Abstand beträgt zum Zeitpunkt t = 50:

$$d(50) = \sqrt{(153 - 95)^2 + (-1450 + 1910)^2 + (153{,}75 - 243{,}75)^2} \approx 472{,}30 \text{ Meter}$$

f) Für ein beliebiges t gilt:

$$\vec{y}(t) - \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -47 + 2{,}1t \\ 2140 - 52t \\ -185 + 5{,}5t \end{pmatrix}$$

und damit $d(t) = \sqrt{(-47 + 2{,}1t)^2 + (2140 - 52t)^2 + (-185 + 5{,}5t)^2}$

Das Quadrat des Abstandes ergibt:

$$d^2(t) = (-47 + 2{,}1t)^2 + (2140 - 52t)^2 + (-185 + 5{,}5t)^2$$
$$= 2738{,}66t^2 - 224792{,}4t + 4616034$$

Bestimmung des Minimums:

$$\left(d^2(t)\right)' = 5477{,}32t - 224792{,}4 = 0 \Leftrightarrow t \approx 41$$

Da die zweite Ableitung konstant positiv ist, hat man zum Zeitpunkt t = 41 Sekunden den minimalen Abstand der beiden Flugzeuge.