Aufg.-Nr.: 24	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: LK	WTR

Dreieckspyramide

Gegeben sind die Punkte
A(- 6 ; 8 ; 7) , B(- 3 ; - 4 ; 4) , C(1 ; - 8 ; 6) und D(9 ; - 4 ; - 2) .

a) Ermitteln Sie die Koordinatenform der Ebene E, die durch die drei Punkte A, B und C gegeben ist. (mögliches Ergebnis: $2x + y - 2z = -18$)

b) Geben Sie die Schnittpunkte S_x, S_y und S_z der Ebene E mit den Koordinatenachsen an und zeichnen Sie das Dreieck $S_xS_yS_z$ in ein Koordinatensystem ein.
(1 LE ≅ 0,5 cm, Verkürzungsfaktor in x-Richtung $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$)

c) Zeigen Sie, dass der Punkt D außerhalb der Ebene E liegt und berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene E.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D‘, den man durch Spiegelung des Punktes D an der Ebene E erhält.

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC sowie das Volumen der Dreieckspyramide, die das Dreieck ABC gemeinsam mit dem Punkt D bildet.

f) Durch $h_k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1+2k \\ 2-2k \\ 2+k \end{pmatrix}$ ($t, k \in \mathbb{R}$) ist eine Geradenschar mit dem gemeinsamen Punkt A gegeben. Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in der Ebene E liegen.

g) Entscheiden Sie, ob die Gerade AC eine Gerade der obigen Geradenschar h_k ist.

h) Berechnen Sie den Schnittwinkel, den die Gerade AC mit der Geraden h_5 einschließt.

Lösung

a)

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}\right] + s \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix}$ oder auch $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalenform in Koordinatenform umwandeln

$\vec{n} * \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 18 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z = -18$

b) Schnittpunkte mit de Koordinatenachsen,

$S_x(-9|0|0)$ für $y = z = 0$; analog: $S_y(0|-18|0)$ und $S_z(0|0|9)$

c) Setze D in die Koordinatenform der Ebene ein: $2 \cdot 9 + (-4) - 2 \cdot (-2) = 18 \neq -18$, also ist D kein Punkt der Ebene. Mit der Hesseschen Normalform ergibt sich für den Abstand d des Punktes D von der Ebene:

$$d = \left| \frac{2 \cdot 9 + (-4) - 2 \cdot (-2) + 18}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{36}{3} = 12$$

d)

Die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu E durch den Punkt D. Für den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene gilt:

$2 \cdot (9 + 2t) + (-4 + t) - 2 \cdot (-2 - 2t) = -18 \Leftrightarrow 18 + 9t = -18 \Leftrightarrow t = -4$,

den Spiegelpunkt von D zur Ebene E erhält man für t = -8, also $D_{Spiegel}(-7|-12|14)$

e)

Flächeninhalt des Dreiecks mittels $A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -36 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 54 = 27$ (FE)

Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) * \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} -36 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-648\right| = 108$ (VE)

f) Einsetzen der Geraden in die Ebene E ergibt:

$$2\cdot(-6+t\cdot(1+2k))+(8+t\cdot(2-2k))-2\cdot(7+t\cdot(2+k))=-18$$
$$\Leftrightarrow -12+2t+4kt+8+2t-2kt-14-4t-2kt=-18$$
$$\Leftrightarrow -18=-18$$

Die Geradenschar h_k liegt also in der Ebene E.

g) Der Richtungsvektor der Geraden AC und der Richtungsvektor der Schar sind linear abhängig für $k=-\frac{5}{3}$, außerdem liegt der Punkt A auf jeder Geraden der Schar, d.h. die Gerade AC gehört zu der Schar.

<u>Beweis der linearen Abhängigkeit:</u>

$$t\cdot\begin{pmatrix}7\\-16\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2k\\2-2k\\2+k\end{pmatrix}$$ führt auf die drei Gleichungen:

$$I.\quad 7t=(1+2k)$$
$$II.\quad -16t=(2-2k)$$
$$III.\ -1t=(2+k)$$

Einsetzen von III. in I. und II. führt zu:

$I^*\ -14-7k=1+2k \Leftrightarrow k=-\frac{5}{3}$ und II* $32+16k=2-2k \Leftrightarrow k=-\frac{5}{3}$

Aus III. folgt dann noch $t=-\frac{1}{3}$

h)

$$h_5:\vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\8\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}11\\-8\\7\end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}11\\-8\\7\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}7\\-16\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{306}}=\frac{198}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{306}}\approx 0{,}74 \Rightarrow \alpha\approx 42{,}3°$$