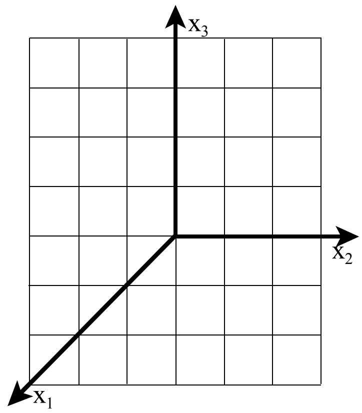
Aufgabe 11 Lichtkunst

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

Das neueste Werk eines jungen Künstlers besteht aus einer Skulptur und zwei starren Stromschienen, die von einer Wand (x_1-x_3-Ebene) zur anderen Wand (x_2-x_3-Ebene) verlaufen. Auf diesen Schienen können Lampen bewegt werden, um die Skulptur zu beleuchten. Da die Schienen nur einen Durchmesser von 4 cm haben, soll diese Ausdehnung in den Rechnungen vernachlässigt werden. Die Schienen werden also als Teile von Geraden angesehen. Die beiden Stromschienen sind an den Wänden befestigt und verbinden die Punkte $P_1(10 | 0 | 3)$ und $Q_1(0 | 6 | 6)$ bzw. $P_2(8 | 0 | 5)$ und $Q_2(0 | 8 | 4)$.

1 Längeneinheit entspricht 1 m.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g_1 und g_2, die den Verlauf der Stromschienen beschreiben und zeichnen Sie die Stromschienen in ein Koordinatensystem ein.
1 LE $\triangleq$ 1 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.



b) Zeigen Sie, dass sichergestellt ist, dass die Stromschienen sich nicht berühren.

c) In den Punkten $L_1(5 | 3 | 4{,}5)$ und $L_2(2 | 6 | 4{,}25)$ befinden sich Lampen, die als punktförmige Lichtquellen betrachtet werden können.
Weisen Sie nach, dass L_1 auf g_1 liegt und L_2 auf g_2, und bestimmen Sie den Abstand der beiden Lampen voneinander.
Zeichnen Sie die Lampenpunkte in das Koordinatensystem ein.

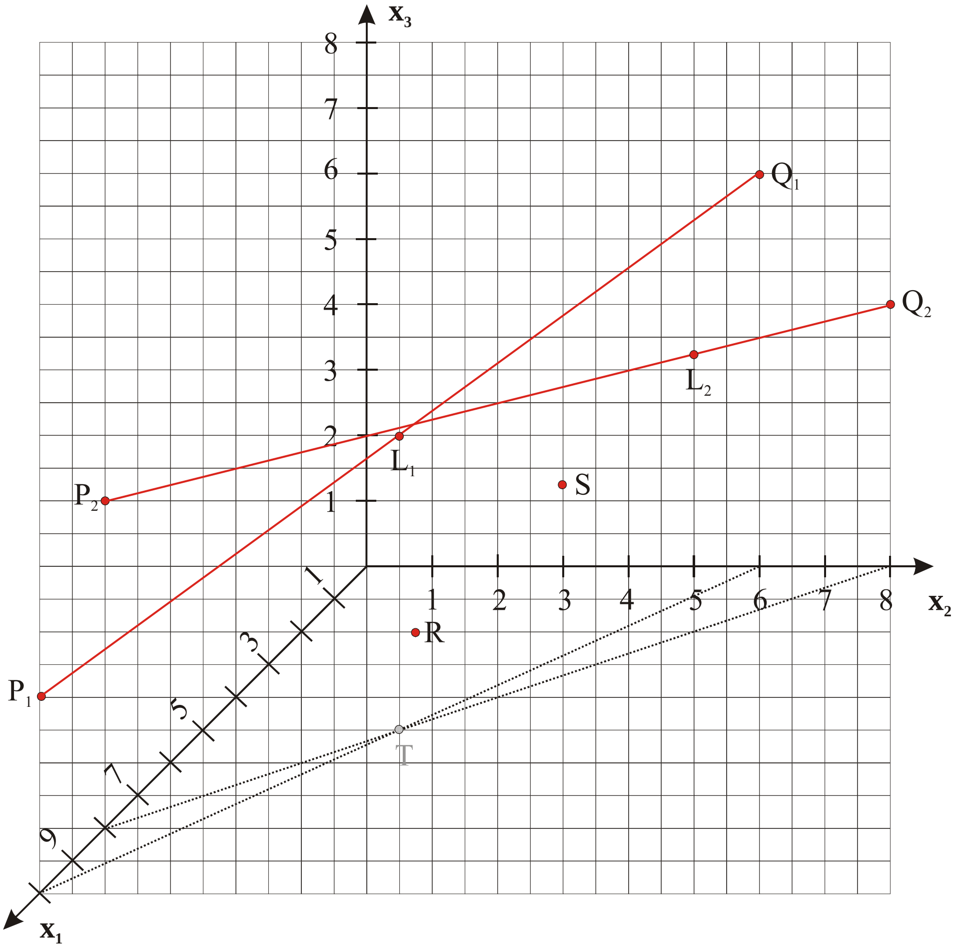
d) Der höchste Punkt der Skulptur sei $S(2 | 4 | 2{,}25)$. Der Künstler möchte, dass der Schatten dieser Skulpturenspitze noch auf den Fußboden des Raumes (x_1-x_2-Ebene) und nicht auf eine Wand fällt. Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung nur eine der beiden Lampen eingeschaltet werden darf. Bestimmen Sie den Schattenpunkt R auf dem Fußboden des Raumes und zeichnen Sie R und S in das Koordinatensystem ein.

e) An die Stromschienen sollen neue Lampen angebracht werden, die von der Schiene 0,2 m vertikal herunterhängen. Beurteilen Sie, ob dies möglich ist, ohne dass dadurch die freie Beweglichkeit der Lampen auf der gesamten oberen Schiene durch die untere Schiene eingeschränkt wird.

<u>*Hinweis:*</u> *Skizzieren Sie die vertikale Projektion der Schienen auf die x_1-x_2-Ebene, d.h. die x_3-Komponente ist Null und betrachten Sie den Höhenunterschied der Schienen über dem Schnittpunkt der Projektionsgeraden.*

Aufgabe 11 Lichtkunst

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>



Die Gleichungen der Geraden in Zwei-Punkte-Form lauten z.B.:

$$g_1:\quad \vec{x}=\vec{p}_1+s\cdot(\vec{q}_1-\vec{p}_1)=\begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix},\quad s\in\mathbb{R}\ \text{ und}$$

$$g_2:\quad \vec{x}=\vec{p}_2+t\cdot(\vec{q}_2-\vec{p}_2)=\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\-1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Dabei sollen $s\in[0;1]$ *und* $t\in[0;1]$ *auch als richtig gelten.*

</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Gleichsetzen der Parameterdarstellungen von g_1 und g_2 ergibt:
$$\begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}8t-10s=-2\\-8t+6s=0\\t+3s=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=\frac{1}{2}\\t=\frac{3}{8}\\\frac{15}{8}\neq 2\end{cases}$$
Die Geraden schneiden sich also nicht.</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Der Ortsvektor von L_1 genügt der Parameterdarstellung von g_1 für $s=\frac{1}{2}$.
Der Ortsvektor von L_2 genügt der Parameterdarstellung von g_2 für $t=\frac{3}{4}$.
Der Abstand d der beiden Lampen voneinander beträgt:
$d=\left|\vec{l}_1-\vec{l}_2\right|=\sqrt{3^2+(-3)^2+0{,}25^2}=\sqrt{18{,}0625}=4{,}25$, also 4,25 m.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Berechnet werden die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden h_i von S und L_i, i = 1,2, mit der x_1,x_2-Ebene.
$$h_1: \vec{x}=\vec{s}+r(\vec{l}_1-\vec{s})=\begin{pmatrix}2\\4\\2{,}25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-1\\2{,}25\end{pmatrix}\quad,\quad r\in\mathbb{R}.$$
$$h_1\cap E_{1,2}:\quad\begin{pmatrix}2\\4\\2{,}25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-1\\2{,}25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=-1\\r_2=5\\r=-1.\end{cases}$$
Da die x_1-Koordinate des Schnittpunktes negativ ist, liegt er nicht auf dem Raumboden. Die Lampe L_1 darf somit nicht eingeschaltet werden.
$$h_2:\quad\vec{x}=\vec{s}+r\cdot(\vec{l}_2-\vec{s})=\begin{pmatrix}2\\4\\2{,}25\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\ r\in\mathbb{R}.$$
$$h_2\cap E_{1,2}:\quad\begin{pmatrix}2\\4\\2{,}25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=2\\r_2=1{,}75\\r=-1{,}125\end{cases}.$$
Die Lampe L_2 darf eingeschaltet werden, weil der Schattenpunkt R(2 | 1,75 | 0) auf dem Raumfußboden liegt, da seine ersten beiden Koordinaten größer als Null sind.</td><td></td><td>20</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Die vertikale Projektion der beiden Schienen auf die x_1-x_2-Ebene wird betrachtet, da die neuen Lampen in die (negative) x_3-Richtung hängen. Am Schnittpunkt T der Projektionsgeraden müssen die Höhen (x_3-Koordinaten) der Schienen ausgerechnet werden.

Für die Projektionsgerade von g_1 gilt: $pg_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt das Gleichungssystem

$$10 - 10s = x_1$$
$$0 + 6s = x_2$$

Durch Umformen erhält man

$$pg_1: \ x_1 = 10 - \frac{5}{3} x_2 .$$

Entsprechend gilt: $pg_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$, woraus das Gleichungssystem

$$8 - 8t = x_1$$
$$0 + 8t = x_2$$

folgt. Durch Umformen erhält man $pg_2: \ x_1 = 8 - x_2$. Durch Gleichsetzen der Projektionsterme erhält man: $10 - \frac{5}{3} x_2 = 8 - x_2$, also $x_2 = 3$. Dieser Wert wird in einen Term eingesetzt und man erhält $x_1 = 5$. Damit ist $T(5 \mid 3 \mid 0)$ der Schnittpunkt der beiden Projektionsgeraden.

Die Bestimmung der Höhen H_1 und H_2 von g_1 und g_2 über diesem Bodenpunkt ergibt:

$$g_1: \ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \wedge H_1 = 4{,}5 \ \text{und}$$

$$g_2: \ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = \frac{3}{8} \wedge H_2 = 4{,}625,$$

d.h. die Höhendifferenz über dem Punkt T beträgt nur $H_2 - H_1 = 0{,}125$ m, so dass eine Lampe, die 0,2 m tief von der Schiene 2 hängt, die Schiene 1 dort berühren würde.

Es ist also nicht möglich, die neuen Lampen in der beschriebenen Weise anzubringen.

</td><td></td><td>5</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>