

## Aufgabe 12 Konzerthalle

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

Durch die Eckpunkte

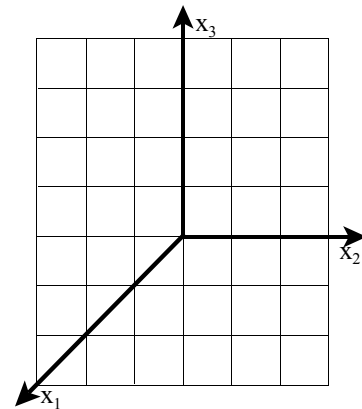
$$O_1 (0 \mid 0 \mid 0) \quad A_1 (3 \mid 0,25 \mid 0) \quad B_1 (3 \mid 2,25 \mid 0) \quad C_1 (0 \mid 2 \mid 0)$$

$$O_2 (0 \mid 0 \mid 1,5) \quad A_2 (3 \mid 0,25 \mid 0,5) \quad B_2 (3 \mid 2,25 \mid 1) \quad C_2 (0 \mid 2 \mid 2)$$

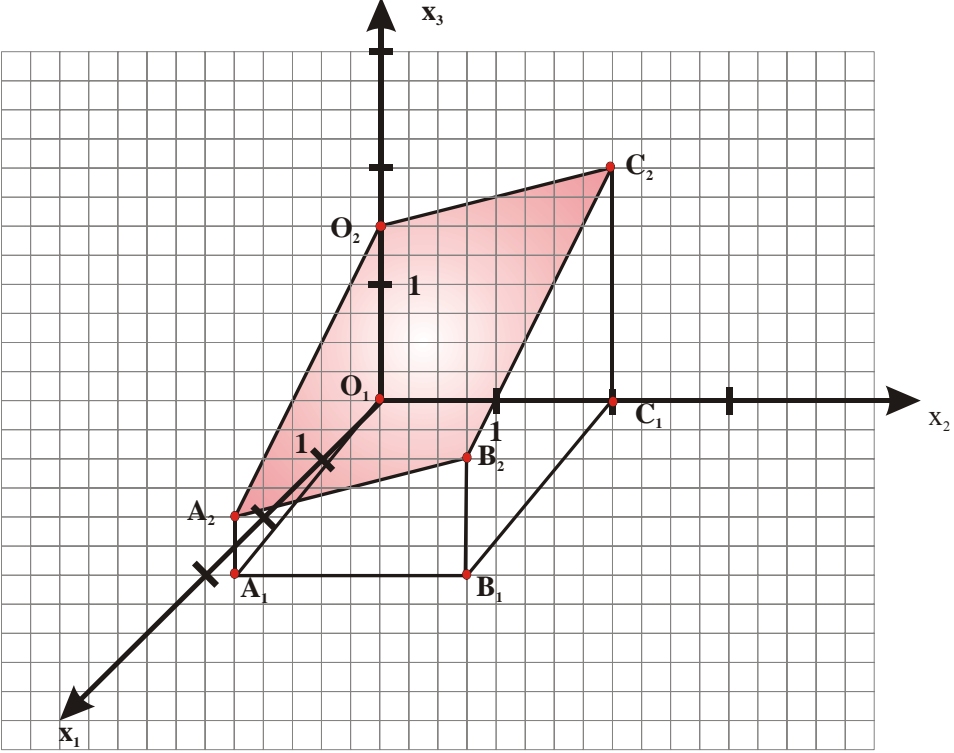
sind Daten für die Skizze einer modernen Konzerthalle im kartesischen Koordinatensystem gegeben, 1 Längeneinheit entspricht 10 m.

Die Punkte  $O_1, A_1, B_1$  und  $C_1$  begrenzen die Grundfläche, die Punkte  $O_2, A_2, B_2$  und  $C_2$  sind die Eckpunkte der Dachfläche.

- Zeichnen Sie die Konzerthalle in ein Koordinatensystem ein.  
1 LE  $\triangleq$  10 m, der Verkürzungsfaktor in  $x_1$ -Richtung beträgt  $0,5 \cdot \sqrt{2}$  und der Winkel zwischen  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse ist  $135^\circ$  groß.  
Weisen Sie nach, dass die Eckpunkte der Dachfläche in einer Ebene  $E$  liegen, und geben Sie eine Gleichung von  $E$  an.
- Zeigen Sie, dass das Dach die Form eines Rechtecks hat, aber kein Quadrat ist, und bestimmen Sie das Flächenmaß der Dachfläche.
- Für Gebäude mit einer Grundfläche von mehr als  $700 \text{ m}^2$  muss eine Extra-Grundflächensteuer bezahlt werden. Ist dies für die Konzerthalle der Fall? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Aus Sicherheitsgründen sollen zwei senkrechte Stützpfiler  $s_1$  und  $s_2$  eingezogen werden.  $s_1$  stützt das Dach im Mittelpunkt der Dachfläche,  $s_2$  wird über dem Punkt  $P (1 \mid 1,5 \mid 0)$  errichtet. Beschreiben Sie, wie man die Längen der beiden Pfeiler berechnen könnte, und bestimmen Sie die Länge des Pfeilers  $s_1$ .



## Aufgabe 12 Konzerthalle

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 <p>Bestimmung der Ebene <math>E</math> durch <math>O_2</math>, <math>A_2</math> und <math>C_2</math>:</p> $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0,25 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$ <p>Prüfung, ob <math>B_2</math> in <math>E</math> liegt: Ansatz:</p> $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0,25 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,25 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3r = 3 \\ 0,25r + 2s = 2,25 \\ -r + 0,5s = -0,5 \end{cases}$ <p>Aus <math>3r = 3</math> folgt: <math>r = 1</math>. In Gleichung (3) eingesetzt ergibt sich: <math>s = 1</math>. Probe in Gleichung (2): <math>2,25 = 2,25</math>. Also liegt <math>B_2</math> in <math>E</math>. <i>Es kann auch ohne Rechnung erkannt werden, dass <math>B_2</math> für <math>r = s = 1</math> in <math>E</math> liegt.</i></p>			
		20	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	<p><u>Berechnung der Seitenlängen:</u></p> $ \overrightarrow{O_2A_2}  = \left  \begin{pmatrix} 3 \\ 0,25 \\ -1 \end{pmatrix} \right  = \sqrt{10,0625} \quad  \overrightarrow{B_2C_2}  = \left  \begin{pmatrix} -3 \\ -0,25 \\ 1 \end{pmatrix} \right  = \sqrt{10,0625}$ $ \overrightarrow{A_2B_2}  = \left  \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right  = \sqrt{4,25} \quad  \overrightarrow{C_2O_2}  = \left  \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right  = \sqrt{4,25}$ <p>Die Dachfläche hat die Form eines Parallelogramms.</p> <p><u>Nachweis, dass einer der Winkel ein rechter Winkel ist:</u></p> <p>Es gilt: <math>\overrightarrow{O_2A_2} \cdot \overrightarrow{O_2C_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0,25 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} = 0</math>.</p> <p>Die Dachfläche hat die Form eines Rechtecks.</p> <p><u>Berechnung des Flächenmaßes der Dachfläche:</u></p> $F(D) = \sqrt{10,0625} \cdot \sqrt{4,25} \approx 6,5395 \text{ FE}.$ <p>Die Dachfläche ist ca. <math>654 \text{ m}^2</math> groß.</p>			
c)	<p>Es muss keine Extra-Steuer bezahlt werden, denn die Grundfläche ist kleiner als die Dachfläche, und diese beträgt weniger als <math>700 \text{ m}^2</math>.</p> <p><i>Es ist auch möglich, den Flächeninhalt der Grundfläche zu berechnen und dann die Frage nach der Grundsteuer zu beantworten. Hier kommen zwei Möglichkeiten in Frage:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Berechnung mit Hilfe elementargeometrischer Überlegungen. Die Grundfläche ist ein Parallelogramm mit der Grundseite <math>g = 2 \text{ LE}</math> und der Höhe <math>h = 3 \text{ LE}</math>.</li> <li>2. Berechnung mit Hilfe der Vektorrechnung und der Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms.</li> </ol> <p>Das Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von <math>6 \text{ FE}</math>. Das Flächenmaß der Grundfläche beträgt also <math>600 \text{ m}^2</math>.</p>			15
d)	<p><u>Mögliche Berechnung der Höhe von <math>s_1</math>:</u></p> <p>Man berechnet den Schnittpunkt <math>S_1</math> der Diagonalen der Dachfläche oder den Mittelpunkt <math>M</math> einer der Diagonalen. Die <math>x_3</math>-Koordinate dieses Punktes gibt die Höhe von <math>s_1</math> (in Längeneinheiten) an.</p> <p><u>Mögliche Berechnung der Höhe von <math>s_2</math>:</u></p> <p>Man bestimmt den Punkt <math>R(1 \mid 1,5 \mid r)</math>, der auf der Dachfläche liegt. Die <math>x_3</math>-Koordinate <math>r</math> gibt die Höhe von <math>s_2</math> (in Längeneinheiten) an.</p>			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p><u>Berechnung von <math>s_1</math>:</u></p> $\vec{s}_1 = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a}_2 + \vec{c}_2) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,125 \\ 1,25 \end{pmatrix}, \text{ die } x_3\text{-Koordinate ist } 1,25.$ <p>Die Länge des Pfeilers <math>s_1</math> beträgt also 1,25 LE entsprechend 12,5 m.</p>			
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20