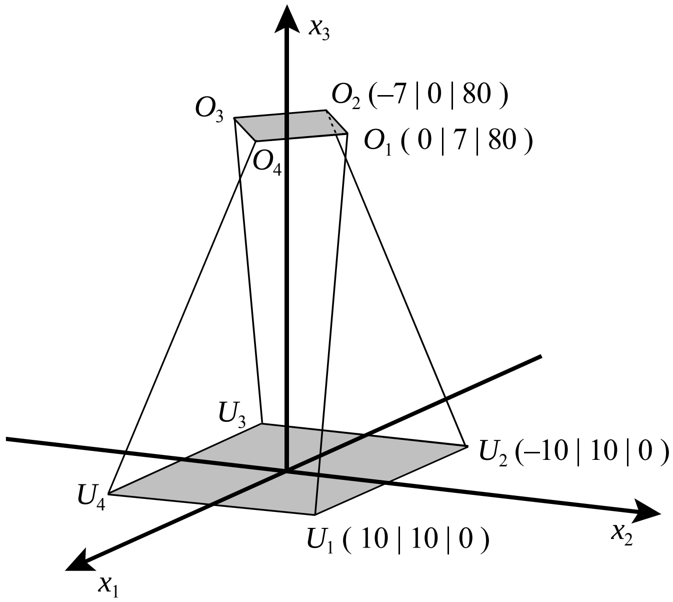
Aufgabe 13 Hafenturm

Einige Jahre lang war in Hamburg ein Hochhaus am Hafen im Gespräch, dessen grundsätzliche architektonische Idee in der nebenstehenden Zeichnung wiedergegeben ist, die allerdings in der x_3-Richtung nicht maßstäblich ist.
Diese Idee bildet die Grundlage für diese Aufgabe.

Die Bodenfläche und das Dach bilden je ein waagerechtes Quadrat.

Die beiden Quadrate sind gegeneinander um 45° gedreht.

Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sind senkrecht übereinander (auf der x_3-Achse).



In der Zeichnung sind die vier Eckpunkte der Bodenfläche mit U_1, U_2, U_3 und U_4 angegeben, die der Dachfläche mit O_1, O_2, O_3 und O_4. Für je zwei dieser Punkte sind die Koordinaten gegeben.

a) Die Gerade g_1 verbindet die Punkte U_1 und O_1, die Gerade g_2 die Punkte U_2 und O_2 und analog sind die Geraden g_3 und g_4 definiert.

Berechnen Sie zunächst eine der zugehörigen Geradengleichungen und geben Sie dann unter Ausnutzung der Symmetrie auch die anderen drei an.

Berechnen Sie die Länge einer der vier (gleichlangen) Kanten des Gebäudes.

b) In verschiedenen Höhen h haben die Stockwerke natürlich viereckige waagerechte Bodenflächen.

Bestimmen Sie für $h = 40$ die vier Punkte des entsprechenden Vierecks und begründen Sie, dass dieses Viereck jedenfalls ein Quadrat ist.

Begründen Sie, dass dies für jede der Bodenflächen gelten muss, also für jedes (zulässige) h.

c) Ermitteln Sie den Winkel, um den die Bodenfläche des Geschosses mit der Bodenhöhe $h = 40$ gegenüber dem Grundgeschoss gedreht ist.

d) Untersuchen Sie, ob die Bodenflächen zweier aufeinander folgender Geschosse immer um den gleichen Winkel weitergedreht sind, wenn die Höhenabstände zwischen zwei Geschossen immer gleich sind.

Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 13 Hafenturm

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Geradengleichungen für die Kanten:

Die erste Geradengleichung ergibt sich aus den Punkten U_1 und O_1 zu

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 80 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Die anderen sind *(Berechnung ist auch erlaubt)*:

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 80 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}, \ g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 80 \end{pmatrix}, \ \nu \in \mathbb{R} \quad \text{und}$$

$$g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 80 \end{pmatrix}, \quad \rho \in \mathbb{R}$$

Länge einer Kante:

Hier ist der Abstand des Grund- und des Dachpunktes auf einer Geraden zu bestimmen, z.B. $d\left(\overline{U_1O_1}\right)$. Es ergibt sich $d = \sqrt{6509} \approx 80,68$.

</td><td>25</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Bestimmen der Eckpunkte für $h = 40$:

Die Eckpunkte liegen auf den Kanten, der jeweilige Parameter ist so zu wählen, dass x_3 jeweils den Wert 40 aufweist, also ist λ, μ, ν und ρ jeweils 0,5.

Die vier Eckpunkte lauten daher
E_1 (5 | 8,5 | 40), E_2 (–8,5 | 5 | 40), E_3 (–5 | –8,5 | 40), E_4 (8,5 | –5 | 40).

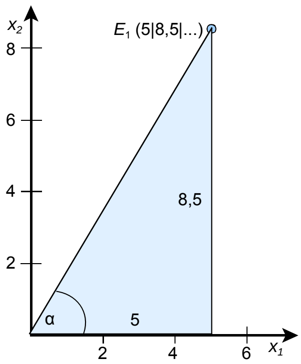
Nachweis Quadrat:
Man kann wie unten stehend argumentieren oder eben rechnen:

$$\overrightarrow{E_1E_2} \cdot \overrightarrow{E_1E_4} = \begin{pmatrix} -13,5 \\ -3,5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,5 \\ -13,5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{E_1E_2} \perp \overrightarrow{E_1E_4} \quad \text{und}$$

$$\overrightarrow{E_3E_4} \cdot \overrightarrow{E_1E_4} = \begin{pmatrix} 13,5 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,5 \\ -13,5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{E_3E_4} \perp \overrightarrow{E_1E_4}$$

und die drei Geschosskanten sind ersichtlich gleich lang.
Also ist das Viereck $E_1E_2E_3E_4$ ein Quadrat

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Allgemeine Argumentation: Aus Symmetriegründen ist klar, dass die Seiten und Winkel dieser Vierecke gleich sein müssen, dann können es aber nur Quadrate sein wegen der Konstanz der Innenwinkel bei n-Ecken. *Hier kann auch gerechnet werden, z.B. um die Symmetrie zu belegen:* Allgemein müssen die Eckpunkte den x_3-Wert h aufweisen, der zugehörige Parameter also jeweils den Wert $\frac{h}{80}$ haben. Die vier Eckpunkte lauten daher: $E_1\left(10-\frac{h}{8} \mid 10-\frac{3h}{80} \mid h\right)$, $E_2\left(-10+\frac{3h}{80} \mid 10-\frac{h}{8} \mid h\right)$, $E_3\left(-10+\frac{h}{8} \mid -10+\frac{3h}{80} \mid h\right)$, $E_4\left(10-\frac{3h}{80} \mid -10+\frac{h}{8} \mid h\right)$ *Man kann zur Überprüfung der Rechtwinkligkeit natürlich auch hier ein Skalarprodukt ausrechnen, z.B. mit den Vektoren* $\overrightarrow{E_1E_2}$ *und* $\overrightarrow{E_1E_4}$: $\overrightarrow{E_1E_2} \cdot \overrightarrow{E_1E_4} = \begin{pmatrix} \frac{13h-1600}{80} \\ -\frac{7h}{80} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7h}{80} \\ \frac{13h-1600}{80} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$		20	10
c)	Da hier Geschosse betrachtet werden, spielt die x_3-Koordinate keine Rolle – der Drehwinkel kann in der x_1-x_2-Ebene betrachtet werden. Die Verbindungslinie von U_1 zum Ursprung schließt mit der x_1-Achse einen Winkel von 45° ein.  Für $h = 40$ betrachten wir die Verbindungslinie von E_1 zum Zentrum des Geschosses. Diese schließt mit der x_1-Achse den Winkel α ein, der sich bestimmen lässt durch $\alpha = \arctan\left(\frac{8,5}{5}\right) \approx 59,53°$. Das mittlere Geschoss ist also um 14,53° gegenüber dem Grundgeschoss gedreht.		25	
d)	Diese Aussage ist nicht richtig, wie aus c) folgt: Nehmen wir dazu der Einfachheit halber an, das Gebäude hätte nur zwei Geschosse, und ein drittes Geschoss würde noch oben draufgesetzt. Die Bodenflächen des untersten und des ersten Geschosses sind dann nach d) um 14,5° gegeneinander gedreht. Die Bodenflächen des ersten und des zweiten Geschosses sind aber gegeneinander um 30,5° (= 45° –14,5°), denn das unterste und das oberste Geschoss sind um 45° gegeneinander gedreht).		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20