Aufgabe 6 Louvre Pyramide

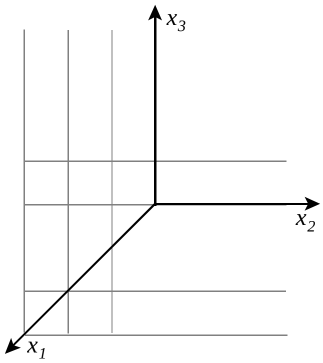
Der Eingang des berühmten Pariser Kunst-Museums "Louvre" wird durch eine Glas-Pyramide mit quadratischer Grundfläche gebildet:

Die Breite beträgt ungefähr 35 m und die Höhe 22 m.

Diese Pyramide wird jetzt in einem dreidimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystem (mit den Längeneinheiten von jeweils 1 m) betrachtet.

Die Bodenfläche sei die x_1-x_2-Ebene, und die x_3-Achse sei lotrecht nach oben gerichtet.
Das Koordinatensystem sei weiterhin so gewählt, dass die vier Eckpunkte auf dem Boden die folgenden Koordinaten haben:

$A(0\,|\,0\,|\,0)$ $B(35\,|\,0\,|\,0)$ $C(35\,|\,35\,|\,0)$ $D(0\,|\,35\,|\,0)$



a) Die Dachspitze sei S. Begründen Sie, dass S die folgenden Koordinaten hat: $(17{,}5\,|\,17{,}5\,|\,22)$.
Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein. 1 LE $\triangleq$ 1 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.

b) Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Koordinatenform der Ebene $\boldsymbol{E}$, in der die Pyramidenseitenfläche ABS liegt.

c) Bestimmen Sie den Winkel, den die Seitenflächen der Pyramide jeweils mit dem Fußboden bilden.

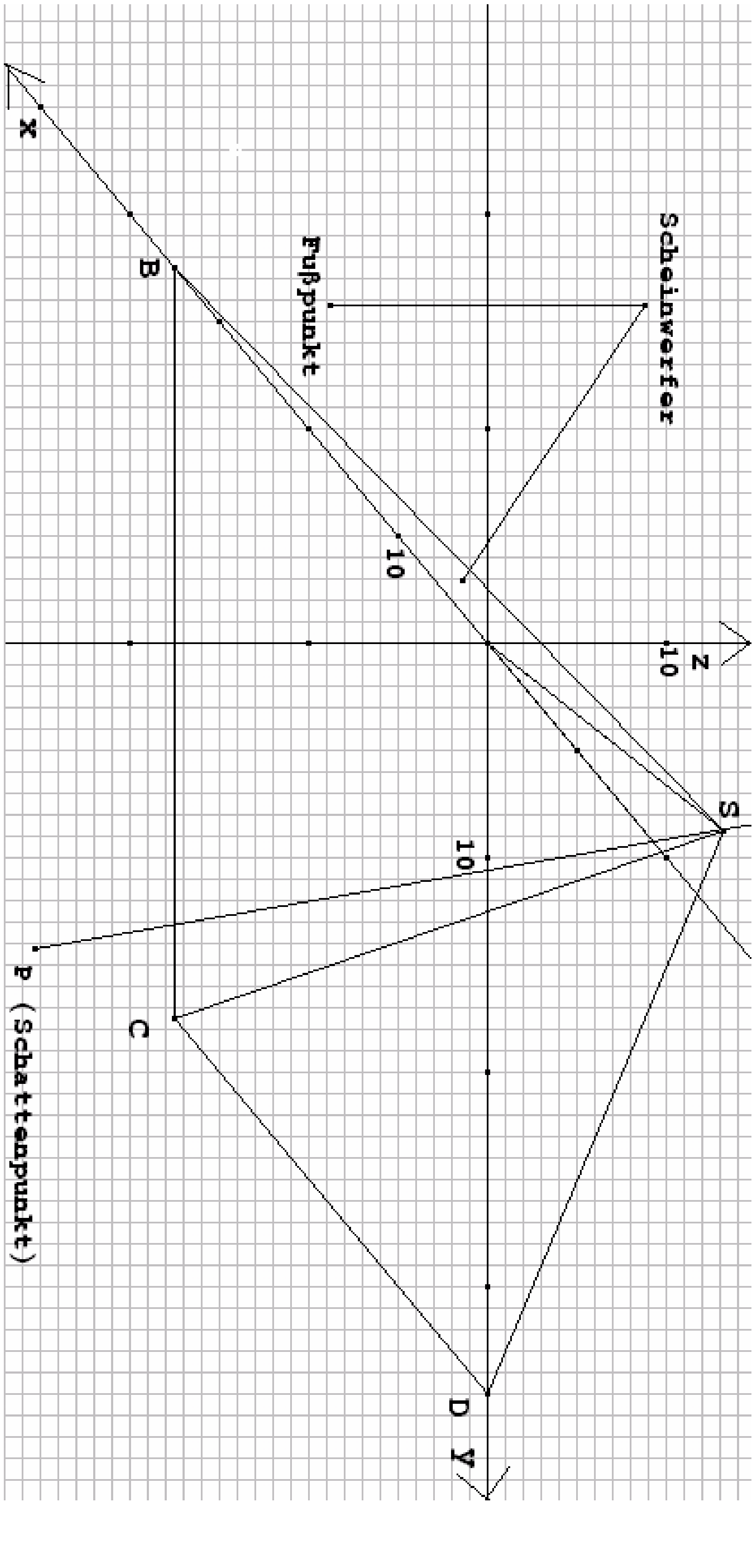
d) Um ein Angebot für die Fensterreinigung einzuholen, muss man den Flächeninhalt der Glasflächen berechnen. Berechnen Sie dazu zuerst den Flächeninhalt eines der vier (kongruenten) Seitendreiecke und dann die gesamte innen und außen zu reinigende Glasfläche.

e) Am Tage fällt bei schönem Wetter (paralleles) Sonnenlicht auf die Pyramide. Zum nun betrachteten Zeitpunkt sei der Richtungsvektor vom Sonnenlicht $\vec{r} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes P der Pyramidenspitze auf dem Boden.

f) Nachts sollen zur Verstärkung der Lichteffekte dann und wann die Seitenflächen der Pyramide von außen mit Scheinwerfern beleuchtet werden.
Einer der Scheinwerfer soll mit Hilfe eines Lichtmastes lotrecht über dem Bodenpunkt $F(17{,}5\,|\,-7\,|\,0)$ angebracht werden. Die als punktförmig angenommene Lichtquelle soll die Seitenfläche ABS so beleuchten, dass das Licht im Schwerpunkt dieser Seitenfläche senkrecht auftrifft.
Zeigen Sie zunächst, dass der Schwerpunkt M_1 die Koordinaten $\left(\frac{35}{2}\,|\,\frac{35}{6}\,|\,\frac{22}{3}\right)$ hat.
Bestimmen Sie dann die notwendige Höhe der Lichtquelle über dem Boden.

Schrägbild



Aufgabe 6 Louvre Pyramide

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	S liegt in x_3-Richtung 22 m über dem Mittelpunkt $M(17{,}5 \mid 17{,}5 \mid 0)$ der Grundfläche der Pyramide. Darum hat S die Koordinaten $(17{,}5 \mid 17{,}5 \mid 22)$. *Zeichnung siehe Anlage.*	10		
b)	Eine Parameterform der Ebene E ergibt sich aus der Drei-Punkte-Form: $\boldsymbol{E}: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AS}\ ,\ r,t \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix}\ ,\ r,t \in \mathbb{R}$. Eine Koordinatenform lässt sich mithilfe eines Normalenvektors zur Ebene oder durch Umformen eines Gleichungssystems finden zu: $44x_2 - 35x_3 = 0$.		20	
c)	Um auf a) zurückgreifen zu können, betrachten wir die Seitenfläche ABS: Der Winkel, den zwei Ebenen einschließen, entspricht dem Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren der Ebenen. Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von $\boldsymbol{E}$ entnimmt man der Koordinatendarstellung aus Teil b): $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -35 \end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor $\vec{n}_{x_1,x_2}$ zur x_1x_2-Ebene ist z.B. $\vec{n}_{x_1,x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Über die Beziehung $\cos(\alpha) = \frac{\lvert \vec{n} \cdot \vec{n}_{x_1,x_2} \rvert}{\lvert \vec{n} \rvert \cdot \lvert \vec{n}_{x_1,x_2} \rvert}$ erhält man einen Winkel zwischen den Normalenvektoren von 51,50°, der dem Winkel zwischen der Pyramidenfläche ABS und dem Fußboden entspricht. <u>Alternative:</u> Man betrachtet das bei M rechtwinklige Dreieck SMM_x, wobei M der Mittelpunkt der Bodenfläche und M_x der Mittelpunkt der Pyramidenkante $\overline{AB}$ sei. Dieses Dreieck hat die Kathetenlängen 22 m und 17,5 m. Der gesuchte Winkel liegt der Seite $\overline{MS}$ gegenüber. Also $\tan(\alpha) = \frac{22}{17{,}5}$, und damit $\alpha \approx 51{,}5°$.		20	
d)	Die zur Fußbodenseite gehörende Höhe eines jeden der Pyramidendreiecke erhält man mithilfe des Satzes von Pythagoras aus der Höhe der Pyramide und der halben Fußbodenseite: $h_\Delta = \sqrt{22^2 + 17{,}5^2}$ und damit: $A_\Delta = \frac{35 \cdot h_\Delta}{2} \mathrm{m}^2 \approx 492\,\mathrm{m}^2$. Acht Flächen sind zu reinigen, also rund 4 000 Quadratmeter.	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	Die Geradengleichung des „Sonnenstrahls“ durch S lautet: $g_5: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 15t + \frac{35}{2} \\ 10t + \frac{35}{2} \\ -10t + 22 \end{pmatrix}$. Auf dem Fußboden ist die x_3-Komponente Null. Also gilt für den Schattenpunkt P der Pyramidenspitze: $t = \frac{11}{5}$ und damit hat P die Koordinaten: $(\,50{,}5 \mid 39{,}5 \mid 0\,)$.		10	
f)	Der Schwerpunkt M_1 des Dreiecks ABS hat den Ortsvektor $\overrightarrow{0M}_1 = \frac{\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0S}}{3}$ und damit hat M_1 die Koordinaten: $\left(\frac{35}{2} \mid \frac{35}{6} \mid \frac{22}{3}\right)$ *Wenn diese Schwerpunktformel nicht bekannt ist, kann man auch rechnen:* $\overrightarrow{0M}_1 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{0S} + \overrightarrow{0B}}{2}\right)$, da A im Koordinatenursprung liegt. Damit hat M_1 die Koordinaten: $\left(\frac{35}{2} \mid \frac{35}{6} \mid \frac{22}{3}\right)$. *Falls gar keine Kenntnisse über den Schwerpunkt von Dreiecken vorhanden sind, kann man der Formelsammlung entnehmen, dass dieser der Schnittpunkt von zwei (aller drei) Seitenhalbierenden ist. Auch auf diesem Wege kann (notfalls) der Schwerpunkt M_1 ermittelt werden.* Der Scheinwerfer liegt auf einer Geraden mit der Gleichung: $g: \vec{x} = \overrightarrow{OM_1} + t \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OM_1} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -35 \end{pmatrix}$ (vgl. Teil c)) Um den gesuchten Scheinwerferpunkt M_S zu ermitteln, ist t so zu bestimmen, dass die zweite Komponente –7 wird. Also $44 \cdot t + \frac{35}{6} = -7$. Man erhält: $t = -\frac{7}{24} \approx -0{,}29$ und damit die Koordinaten für den Ort M_S der Lichtquelle: $\left(\frac{35}{2} \mid -7 \mid \frac{421}{24}\right) \approx (17{,}5 \mid -7 \mid 17{,}5)$. Die notwendige Höhe der Lichtquelle beträgt also 17,5 m.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20