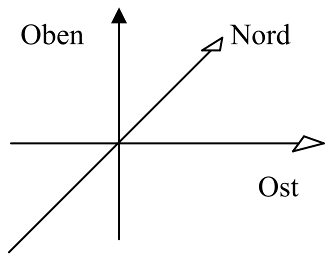
Aufgabe 8 Flugbahnen

Wir betrachten ein Koordinatensystem im Raum.
Die Koordinaten der Richtungsvektoren sind kartesisch mit den Koordinatenachsen in Ostrichtung, in Nordrichtung und senkrecht nach oben. Entgegen der üblichen Schreibweise wird hier, angepasst an die Navigation auf der Erde, die folgende Darstellung gewählt:



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ost} \\ \text{Nord} \\ \text{Oben} \end{pmatrix}$$

Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1 km.

Gegeben sind vier Punkte im Raum:

$A\,(-5 \mid -9 \mid 8)$ $B\,(5 \mid 1 \mid 8)$ $C\,(13 \mid 33 \mid 10)$ $D(19 \mid 27 \mid 9)$.

Die Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \vec{a} + t\cdot(\vec{b} - \vec{a}),\ \ t \in \mathbb{R}$$
$$h\colon\ \vec{x} = \vec{c} + t\cdot(\vec{d} - \vec{c}),\ \ t \in \mathbb{R}$$

beschreiben kurzzeitig die Bahnen zweier Flugzeuge.

Um 8.00 Uhr befand sich das erste Flugzeug im Punkt *A* und das zweite Flugzeug im Punkt *C* und beide flogen danach noch mindestens 4 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Der Parameter t hatte solange auch die Bedeutung einer Zeit [in Minuten].

$t = 0$ bedeutet also 8:00 Uhr.

a) Berechnen Sie, in jeweils welche Himmelsrichtungen die beiden Flugzeuge flogen und geben Sie an, welches der beiden Flugzeuge sich im Sinkflug befand.

b) Berechnen Sie, wann und an welchem Punkt das Flugzeug, das sich im Sinkflug befindet, bis auf eine Höhe von 7500 m gesunken war.

c) Das Flugzeug aus dem Aufgabenteil b) hatte schon ziemlich genau Kurs auf den geplanten Aufsetzpunkt der Landebahn eines Flughafens. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Aufsetzpunktes.

d) Untersuchen Sie, ob sich die beiden Flugbahnen schneiden.

e) Ermitteln Sie, ob Kollisionsgefahr bestand.

f) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der beiden Flugzeuge in der Zeit zwischen 8:00 und 8:04 Uhr.

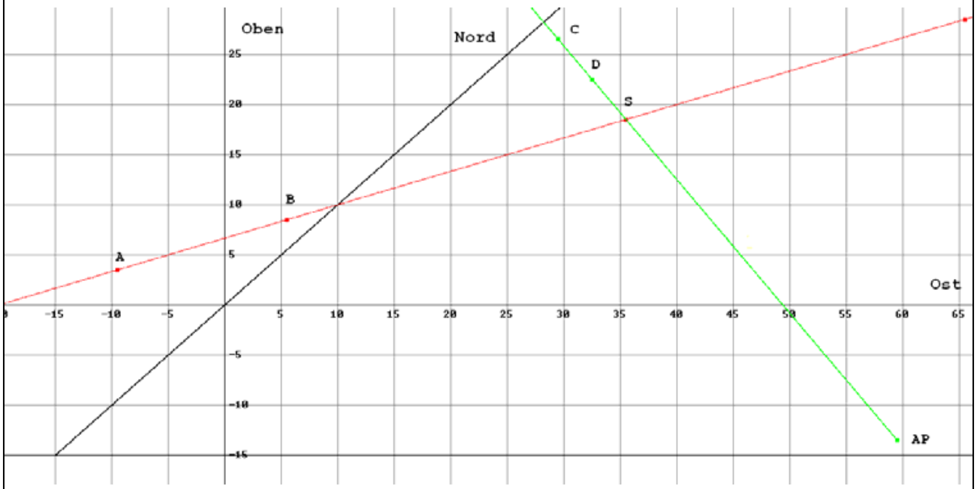
g) Fertigen Sie eine Schrägskizze der gesamten Situation an, in der die Punkte *A, B, C, D*, die Flugbahnen und der Aufsetzpunkt *AP* erkennbar sind.

h) Ein Flugsender befindet sich im Punkt *FS.* mit den Koordinaten *FS*(100 | 100 | 0).
Bestimmen Sie, an welchem Punkt seiner Flugbahn das erste Flugzeug dem Flugsender am nächsten war und wie groß dieser Abstand dort war.
Beurteilen Sie, ob man mit den bekannten Informationen auch feststellen kann, um welche Uhrzeit das war.

Aufgabe 8 Flugbahnen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<u>Allgemeine Bemerkung zur Lösung dieser Aufgabe:</u> Diese Aufgabe lässt sich in vielen Teilen mit sehr anschaulichen – auf Grundvorstellungen basierenden – Argumenten lösen, natürlich auch mit den üblichen Standardmethoden. Im Hinblick auf einen Kompetenz-bezogenen Mathematikunterricht sollten möglichst viele Grundvorstellungen und Argumentationswege entwickelt werden. Die hier vorgestellten Lösungsteile versuchen – wo immer es geht – inhaltlich zu argumentieren, statt formal zu rechnen.			
a)	Wir rechnen zunächst für jede Flugbahn einen Richtungsvektor als Differenzvektor aus: $\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \vec{D} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Das erste Flugzeug fliegt also nach Nordosten (die x_1- und die x_2-Komponente sind beide positiv und dem Betrag nach gleich) und das zweite Flugzeug fliegt nach Südosten (die x_1-Komponente ist positiv und die x_2-Komponente ist negativ und beide sind dem Betrag nach gleich). Das erste Flugzeug hält die Höhe (die x_3-Komponente ist null) und das zweite Flugzeug befindet sich im Sinkflug (die x_3-Komponente ist negativ).	10		
b)	Dem Richtungsvektor $\vec{v}$ kann man ansehen, dass das zweite Flugzeug in einer Minute um einen Kilometer sinkt. Die Ausgangshöhe war 10 km, also braucht das Flugzeug ab 8 Uhr 2,5 Minuten, um auf 7500 m zu sinken. $\vec{c} + 2{,}5 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix} + 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 18 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$. Um 8:02:30 Uhr war das Flugzeug in 7 500 m Höhe am Ort Q mit den Koordinaten $Q\ (28 \mid 18 \mid 7{,}5)$. Die Zeitangaben sind deshalb korrekt, weil $t < 4$ und wir uns also innerhalb der ersten vier Minuten nach 8:00 Uhr befinden.	10		
c)	Die Argumentation verläuft völlig analog zu b): wir bestimmen den Punkt *AP*, bei dem die x_3-Komponente Null ist, das muss bei $t = 10$ der Fall sein (Hier sollte man t nur als Parameter betrachten, da das Flugzeug sicherlich vor dem Aufsetzen seine Geschwindigkeit verringert hatte.). $\vec{c} + 10 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ -27 \\ 0 \end{pmatrix}$ Also hat *AP* die Koordinaten $(73 \mid -27 \mid 0)$.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Das zweite Flugzeug sinkt anfangs – ausgehend von einer Höhe von 10 km – in einer Minute um einen Kilometer. Das erste Flugzeug hält die Höhe von 8 km. Also ist das zweite Flugzeug bei t = 2 auf die Flughöhe von 8 km gesunken. $\vec{c}+2\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}13\\33\\10\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}6\\-6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\21\\8\end{pmatrix}$. Dann befindet es sich also im Punkt S mit den Koordinaten (25 | 21 | 8). Nur dieser Punkt S könnte ein Schnittpunkt der Flugbahnen sein. Es ist deshalb nur zu prüfen, ob dieser Punkt auf der Flugbahn des ersten Flugzeuges liegt. Das erste Flugzeug legt, wie schon festgestellt wurde, in x_1- und x_2-Richtung je 10 km pro Minute zurück, genauer: es vergrößert ausgehend von A (–5 | –9 | 8) den x_1-Wert und den x_2-Wert jeweils um 10 pro t-Einheit. Man erkennt, dass man um zum Punkt S zu kommen, den x_1-Wert und den x_2-Wert jeweils um 30 vergrößern muss, also wird der Punkt S für t = 3 erreicht. Somit schneiden sich die Flugbahnen. *<u>Bemerkung:</u> Wenn man hier formal rechnet, also den möglichen Schnittpunkt von zwei Geraden über ein lineares Gleichungssystem untersucht, dann müssen für die Parameter der beiden Geraden natürlich zwei verschiedene Variable angesetzt werden. Die Diskussion darüber kann fruchtbar sein.*		20	
e)	Für t = 2 auf der zweiten Flugbahn, bzw. für t = 3 auf der ersten Flugbahn erhält man den Schnittpunkt S. Beide Werte liegen in dem Vier-Minuten-Intervall, geben also auch die Zeitpunkte an, zu denen sich die Flugzeuge am Ort S befanden. Die beiden Flugzeuge passierten diese Stelle also in einem zeitlichen Abstand von einer Minute. Bei der üblichen Geschwindigkeit von Flugzeugen (vgl. f) war jedes der beiden Flugzeug mehrere Kilometer von S entfernt, als das andere Flugzeug den kritischen Punkt S passierte, insofern bestand keine Kollisionsgefahr Ein Fluglotse sieht das vermutlich anders und würde zwei Flugzeuge nicht im Minutenabstand an die gleiche Stelle „lotsen“. *<u>Bemerkung:</u> Streng genommen müsste man auch noch hinzufügen, dass der Winkel zwischen den Flugbahnen nicht extrem spitz (oder gar Null) ist.*		10	
f)	Das erste Flugzeug fliegt in einer Minute von A (t = 0) nach B (t = 1). Ebenso fliegt das zweite Flugzeug in einer Minute von C (t = 0) nach D (t = 1). Darum berechnen wir einerseits den Abstand von A nach B und andererseits den Abstand von C nach D: $Abst(A,B)=\sqrt{\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{u}\right)^2}=\sqrt{200}\approx 14{,}14$, $Abst(C,D)=\sqrt{\left(\vec{d}-\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{v}\right)^2}=\sqrt{73}\approx 8{,}54$. Das erste Flugzeug fliegt also zur betrachteten Uhrzeit mit einer Geschwindigkeit von 14,14 km/min ≈ 849 km/h, das zweite Flugzeug fliegt zur betrachteten Uhrzeit mit einer Geschwindigkeit von 8,54 km/min ≈ 513 km/h.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
g)		10		
h)	Statt des Abstandes eines beliebigen Punktes P_t auf der ersten Flugbahn mit dem Parameterwert t zum Flugsender minimieren wir dessen Quadrat: $(105 - 10t)^2 + (109 - 10t)^2 + 64 = 200\,t^2 - 4280\,t + 22970$ Diese quadratische Funktion hat ihr Minimum / ihre Scheitelstelle bei $t = 10{,}7$ und dort den Wert 72. Der minimale Abstand zum Flugsender betrug also $\sqrt{72}$ km $\approx 8{,}485$ km . Weiter gilt: $\vec{a} + 10{,}7 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 102 \\ 98 \\ 8 \end{pmatrix}$. Das Flugzeug befand sich im Punkt $P(102 \mid 98 \mid 8)$ dem Flugsender am nächsten. Um den Zeitpunkt bestimmen zu können, müsste man wissen, ob und ggf. wie das Flugzeug seine Geschwindigkeit verändert hatte. Wenn es seit 8:00 Uhr die Geschwindigkeit nicht verändert hätte, dann wäre das Flugzeug dem Flugsender um 8:10:42 Uhr am nächsten gewesen. *<u>Bemerkung:</u> Ein zweiter Weg führt über die Bestimmung der Länge des Lotes vom Flugsender auf die Flugbahn: Dann muss die Gleichung* $\left(\vec{a} + t \cdot \vec{u} - \overrightarrow{FS}\right) \cdot \vec{u} = 0$ *gelöst werden, und man erhält ebenfalls* $t = 10{,}7$. *Der berechnete minimal Abstand von* 8,485 km *lässt übrigens darauf schließen, dass das Flugzeug fast genau vertikal über den Flugsender geflogen ist, wahrscheinlich navigierte der Pilot so, dass er auf seiner Route der Reihe nach Flugsender abflog.*			20
	Insgesamt 100 BWE	40	40	20