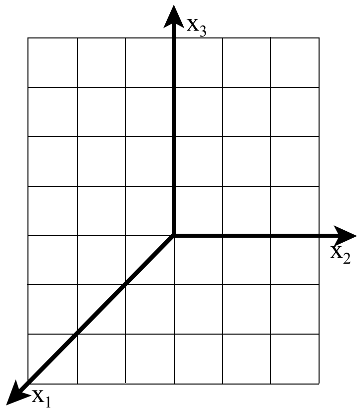
Aufgabe 9 U-Boot

Während einer Forschungsfahrt tritt ein U-Boot am Punkt $P(1200 \mid 0 \mid -540)$ – alle Angaben in m – in den Überwachungsbereich seines Begleitschiffes ein. Die Überwachung erfolgt durch SONAR (**So**und **N**avigation **a**nd **R**anging). Das Begleitschiff ruht im Ursprung des Koordinatensystems.

Bei der Darstellung von Punkten und Bewegungen durch Vektoren soll die x_1-Achse nach Süden zeigen, die x_2-Achse nach Osten und die x_3-Achse in vertikaler Richtung nach oben. Im Folgenden entspricht eine Längeneinheit 100 m in der Realität.

a) Zeichnen Sie die Standorte von U-Boot und Begleitschiff in ein Koordinatensystem ein.
1 LE $\hat{=}$ 100 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5 \cdot \sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135°groß.



b) Der Kapitän des U-Boots teilt mit, dass er Kurs Nordost mit gleich bleibender Tiefe fährt.
Geben Sie eine Gleichung einer Geraden g an, die die Fahrtroute des U-Bootes beschreibt.

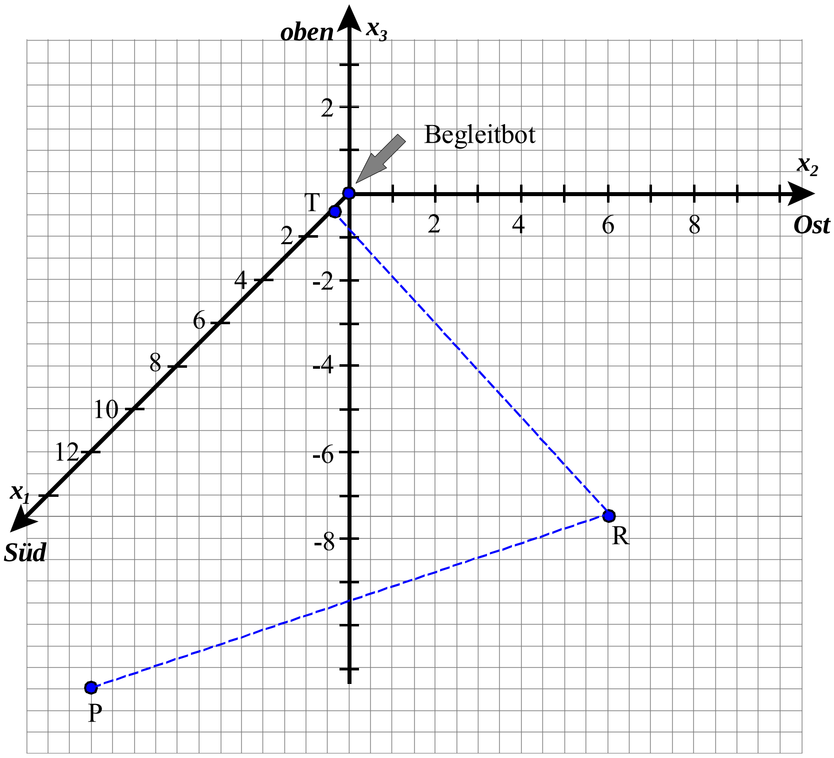
c) Am Punkt $R(\ 400 \mid 800 \mid -540\ )$ ändert das U-Boot seine Fahrtrichtung und fährt in Richtung des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix}$ weiter.
Bestimmen Sie, um wie viel Grad sich das U-Boot bezüglich der horizontalen Ebene gedreht hat und berechnen Sie den Steigungswinkel bezüglich der horizontale Ebene.
Bestimmen Sie den Punkt T, an dem das U-Boot die Wasseroberfläche erreicht.
Zeichnen Sie in Ihr Koordinatensystem die Bahn des U-Boots zwischen R und T ein.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts S, an dem das U-Boot bezüglich der Fahrt vom Aufgabenteil c) den geringsten Abstand zum Begleitschiff hat.

e) Nehmen wir an, das U-Boot hätte in R seine Fahrtrichtung nicht verändert und wäre also weiter in gleichbleibender Tiefe Kurs Nordost gefahren.
Ermitteln Sie den Punkt, an dem es den SONAR-Bereich verlässt.
Das U-Boot fährt mit einer Geschwindigkeit von 10 kn (kn: Knoten; 1 kn = 1 Seemeile pro Stunde; 1 Seemeile = 1852 m). Bestimmen Sie die Zeitdauer, die sich das U-Boot im Sonarbereich befindet.

f) Die *Entfernung* eines Objekts kann mittels SONAR bestimmt werden, wenn man die Zeit misst, die zwischen Ausstrahlung des Ortungssignals und Empfang des reflektierten Signals misst. Die Schallgeschwindigkeit im Wasser beträgt 1,4 km/s.
Beschreiben Sie eine Methode, mit der man die *Geschwindigkeit* eines Objekts ermitteln kann, wenn man z.B. alle Sekunde ein Ortungssignal aussendet.
Erhalten Sie mit Ihrer Methode die tatsächliche Geschwindigkeit des Objekts relativ zum (ruhend gedachten) Wasser? Begründen Sie.

Aufgabe 9 U-Boot

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)		5		
b)	Richtung Nordost heißt hier, dass die Gerade den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat. Mit dem Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ -540 \end{pmatrix}$ ergibt sich für *g*: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ -540 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$.	5		
c)	Für den horizontalen Drehwinkel wird die x_3-Komponente des Richtungsvektors Null gesetzt. Damit erhält man den neuen Richtungsvektor $\vec{w}_e = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mithilfe der Formel für das Skalarprodukt ergibt sich als Drehwinkel in der Ebene: $\cos\alpha = \frac{\lvert\vec{v} \cdot \vec{w}_e\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{w}_e\rvert} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\lvert 8 - 13\rvert}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{233}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{466}} \Rightarrow \alpha \approx 76{,}6°$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Als Steigungswinkel verstehen wir den Winkel zwischen der Geraden mit dem Vektor $\vec{w}$ als Richtungsvektor und der zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene, in der g liegt. Zur Berechnung benötigen wir nur den Richtungsvektor $\vec{w}$ und einen Normalenvektor der Ebene, z. B. $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, und setzen beide in die entsprechende Formel zur Schnittwinkelberechnung ein:

$$\sin\beta=\frac{|\vec{w}\cdot\vec{n}|}{|\vec{w}|\cdot|\vec{n}|}\Leftrightarrow \sin\beta=\frac{|9|}{|\sqrt{314}|\cdot|1|}\Rightarrow \beta\approx 30{,}5^\circ.$$

T ist der Schnittpunkt einer Geraden h und der x_1x_2-Ebene, wobei h die neue Fahrtroute beschreibt. Es gilt: $h\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix};\ s\in\mathbb{R}$. Gesucht ist s, sodass die x_3-Komponente Null wird.

Aus $-540+s\cdot 9=0$ folgt $s = 60$. Dieser Wert von s wird in die Gleichung von h eingesetzt und es ergibt sich: $\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+60\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-80\\20\\0\end{pmatrix}$, also hat T die Koordinaten (–80 | 20 | 0).
</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Der Abstand eines Punktes auf der Geraden h zum Ursprung $O(0 \mid 0 \mid 0)$ ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} d(s)&=\left|\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right|\\ &=\sqrt{(400-8s)^2+(800-13s)^2+(-540+9s)^2}\\ &=\sqrt{314s^2-36920s+1091600}\end{aligned}$$

Der Wurzelausdruck ist extremal, wenn der Radikand extremal ist. Also:

$f(s)=314\cdot s^2-36\,920\cdot r+1\,091\,600$ und $f'(s)=628\cdot s-36\,920$. Die notwendige Bedingung für Extrempunkte ist: $f'(s)=0$. Lösen der linearen Gleichung $628\cdot s-36920=0$ führt zu $s\approx 58{,}79$. Da der Graph von f eine nach oben geöffnete Parabel ist, liegt bei $s\approx 58{,}79$ ein Tiefpunkt. Für S folgt daher:

$$\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+58{,}790\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-70{,}32\\35{,}73\\-10{,}89\end{pmatrix}.$$

Von allen Punkten der Geraden h hat der Punkt S(–70,32 | 35,73 | –10,89) den geringsten Abstand zum Ursprung.

Hinweis: Die x_3-Komponente ist negativ, also ist S tatsächlich ein Punkt der Fahrtstrecke von dem U-Boot.
</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Der SONAR-Bereich lässt sich vereinfacht als Kugel K auffassen, mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Am Punkt P tritt das U-Boot in den SONAR-Bereich ein, also hat das SONAR eine Reichweite von $r=\sqrt{1200^2+540^2}\approx 1316$ m. Das entspricht dem Abstand von P zum Ursprung. Der Sonarbereich lässt sich als Kugel K mit dem Radius r vorstellen. Es gilt: $K:\ \vec{x}^2\le r^2=1\,731\,600$. Gesucht sind die Schnittpunkte von K mit g, also wird der Term von g in K eingesetzt und nach s aufgelöst.

$$\left(\begin{pmatrix}1200\\0\\-540\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)^2=r^2=1731600$$

$$\begin{aligned}(1200-s)^2+s^2+(-540)^2&=1731600\\ 2\cdot s^2-2400\cdot s+1731600&=1731600\\ 2s^2-2400s&=0\\ s(2-2400)&=0.\end{aligned}$$

Als Lösung erhält man s = 0 oder s = 1200. s = 0 gehört zum Punkt P und s = 1200 gehört zum Austrittspunkt Q, mit $\vec{q}=\begin{pmatrix}1200\\0\\-540\end{pmatrix}+1200\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1200\\-540\end{pmatrix}$.

Also hat der Austrittspunkt Q die Koordinaten (0 | 1200 | –540).

Zur Berechnung der Zeitdauer benötigt man die gefahrene Strecke s, denn mit der Geschwindigkeitsangabe v lässt sich die Zeitdauer t ermitteln. Das U-Boot fährt die Strecke

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1200\\1200\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1200)^2+1200^2}=1200\cdot\sqrt{2}\approx 1\,697.$$

Dann gilt: $v=10\text{ kn}=\frac{10\cdot 1\,852\text{ m}}{1\text{ h}}=18{,}52\,\frac{\text{km}}{\text{h}}=18\,520\,\frac{\text{m}}{\text{h}}$ und schließlich $t=\frac{s}{v}=\frac{1697}{18520}=0{,}09163$ Stunden bzw. ca. 5 Minuten und 30 Sekunden.

Das U-Boot befindet sich rund 5,5 min im SONAR-Bereich.
</td><td></td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>
Misst man die Zeit t_1, die das Signal braucht, um wieder zurückzukommen, kann man die Entfernung s eines Objekts nach der Gleichung $v=\frac{s}{t}$ mit $v=1{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ berechnen: $s=v\cdot\frac{1}{2}t_1$.

Misst man jede Sekunde ein Ortungssignal, so erhält man jede Sekunde eine Entfernung. Aus der Entfernungsdifferenz und der Zeitdifferenz lässt sich eine
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Durchschnittsgeschwindigkeit berechnen. Man erhält mit dieser Methode aber lediglich den Geschwindigkeitsanteil, der sich auf die Signalquelle zu bewegt bzw. von ihr weg bewegt und nicht die tatsächliche Geschwindigkeit des U-Bootes.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20