

Aufgabe 11 Meteoriteneinschlag

In sternklaren Nächten in den Ebenen von Kansas beobachten die beiden Amateurastronomen Myers und Smith den Himmel auf der Suche nach Meteoren und Meteoriten. Smith hat dabei eine Beobach-
tungsposition, die gegenüber der von Myers fünf Kilometer weiter westlich und drei Kilometer weiter
nördlich ist. – Sehen Sie für diese Aufgabe den Erdboden als Ebene an und setzen Sie voraus, dass der
Koordinatenursprung am Ort der Beobachtungsposition von Smith ist. Die Längeneinheit ist 1km.

In der Nacht zum 4. März beobachten sie beide einen Meteoriten. Seine Feuerspur beginnt irgendwo
hoch in der Atmosphäre und endet beim Eintritt in die dichtere, untere Atmosphäre. Die Astronomen
bezeichnen diese beiden wesentlichen Punkte der Bahn des Meteors mit „Upper Event (U)“ und „Lo-
wer Event (L)“.

Beide können nur jeweils die Richtung angeben, in der sie die Ereignisse U und L sehen. Wenn sie
sich über diese Punkte verständigen, so geben sie jeweils einen Richtungsvektor an, der von ihrer Po-
sition zum Ereignispunkt zeigt. Die Koordinaten der Richtungsvektoren sind kartesisch mit den Koor-
dinatenachsen in Ostrichtung, in Nordrichtung und senkrecht nach oben.

Gehen Sie davon aus, dass die Bahn des Meteoriten eine Gerade ist.

Für das Ereignis am 4. März ermitteln die beiden Astronomen folgende vier Richtungsvektoren.

$$\vec{r}_{My,U} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1,8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{My,L} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{Sm,U} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1,2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{Sm,L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Koordinaten von U und L .
- Berechnen Sie den räumlichen Abstand von U und L .

Der Meteorit schlägt am Ende seiner Bahn im Punkt K auf dem Erdboden auf.

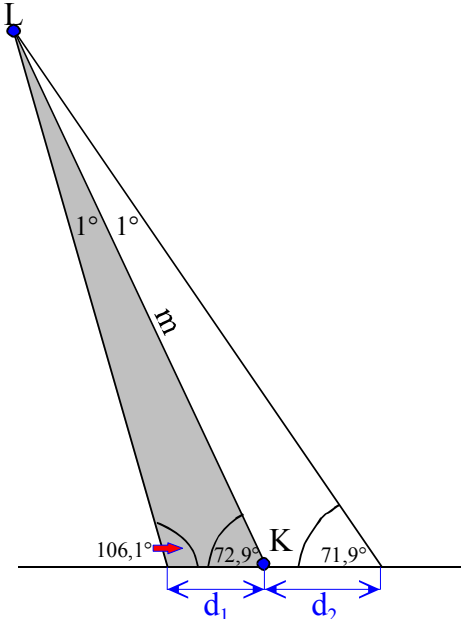
- Berechnen Sie die Koordinaten dieses Aufschlagpunktes K und bestimmen Sie den Winkel der
Bahn zur Erdoberfläche.
- Berechnen Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist, und ermitteln Sie
für diesen die Richtung zum Aufschlagpunkt. Geben Sie dabei die Richtung in Grad gegenüber der
Nordrichtung an.

Am Punkt L spalten sich vom Meteoriten einige kleinere Teile ab, die ebenfalls auf geraden Bahnen
weiterfliegen. Die Abweichung von der Bahn des Meteoriten beträgt jeweils höchstens 1° .

- Für zwei dieser Bruchstücke sollen Sie genaue Berechnungen vornehmen. Beide weichen in ihrer
Richtung um genau 1° nach oben bzw. nach unten von der Richtung des Meteoriten ab. Fertigen
Sie eine nicht maßstabgetreue Skizze an und bestimmen Sie die Entfernungen der Aufschlagpunkte
der beiden Bruchstücke vom Aufschlagpunkt des Meteoriten.
- Geben Sie begründet eine obere Abschätzung für die Größe der Fläche an, auf die der ganze Mete-
oritenschauer niedergeht.

Aufgabe 11 Meteoriteneinschlag

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Der Aufgabenteil fragt zweimal nach dem Schnittpunkt je zweier Geraden im Raum, wobei vorausgesetzt ist, dass diese Schnittpunkte existieren. Zunächst müssen die Beobachter und Richtungen im Koordinatensystem fixiert sein. Laut Aufgabe befindet sich Smith im Ursprung des Koordinatensystems, und die drei Koordinatenrichtungen sind Ost-Nord-Zenith. Dann befindet sich Smith am Punkt $S(0 0 0)$ und Myers am Punkt $M(5 -3 0)$.</p> <p>Damit ergibt sich für die beiden Geraden zu U</p> $u_S: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1,2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_M: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1,8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ <p>und für die beiden Geraden zu L</p> $l_S: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad l_M: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$ <p>Die Lösung des ersten GLS ergibt $\lambda = \mu = 5$ und damit $U(-5 6 40)$, die Lösung des zweiten GLS ergibt $\lambda = 2$ und $\mu = 1$ und damit $L(4 2 8)$.</p>		25	
b)	<p>Mit Hilfe der üblichen Abstandsbestimmung ergibt sich</p> $d = \sqrt{1121} \text{ km} \approx 33,5 \text{ km}.$	5		
c)	<p>Die Bahn des Meteoriten ist eine Gerade durch U und L und lässt sich damit durch die Gleichung $b: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -32 \end{pmatrix}$ beschreiben. Im Punkt K ist die x_3-Koordinate Null; dies ergibt $t = 0,25$ und damit $K(6,25 1 0)$.</p> <p>Der Winkel lässt sich z.B. mit Hilfe einer Normalen der Erdoberfläche und dem Richtungsvektor der Bahngeraden berechnen.</p> $\sin \alpha = \frac{\left \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -32 \end{pmatrix} \right }{\sqrt{1121}} \approx 0,956 \Rightarrow \alpha \approx 72,9^\circ$	5	10	
d)	<p>Es ergibt sich $d(K, S) \approx 6,33 \text{ km}$ und $d(K, M) \approx 4,19 \text{ km}$. Myers ist also näher am Aufschlagpunkt.</p> <p>Die Richtung für Myers ergibt sich aus dem Vektor $\overline{MK} = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$:</p> <p>Der Winkel α seines Weges, angegeben Nord \rightarrow Ost, bestimmt sich durch $\tan \alpha = \frac{1,25}{4}$ zu $\alpha \approx 17,4^\circ$.</p>	10	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	 <p>Die Strecke m von L bis K ist $\sqrt{(6,25 - 4)^2 + (1 - 2)^2 + (0 - 8)^2} \approx 8,37$ km .</p> <p>Mit dem Sinus-Satz folgt :</p> $\frac{d_1}{\sin 1^\circ} = \frac{8,37}{\sin 106,1^\circ} \Rightarrow d_1 \approx 152 \text{ m} \text{ und ebenso } d_2 \approx 154 \text{ m} .$		10	5
f)	<p>154 m – über den Punkt K hinaus – und 152 m – Aufschlag vor K – sind die extremen Abweichungen von der Flugbahn des Hauptteils. Die Bruchstücke befinden sich in einem Kegel mit der Spitze bei L. Die Fläche, in der die Bruchstücke auftreffen, ist die Schnittfläche dieses Kegels mit der (als eben angenommenen) Erdoberfläche, also eine Ellipse, die einem Kreis sehr ähnlich ist. Der Radius des Kreises ist sicher nicht größer als 154 m, die Fläche also nicht größer als $74\,510 \text{ m}^2$.</p>			15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20