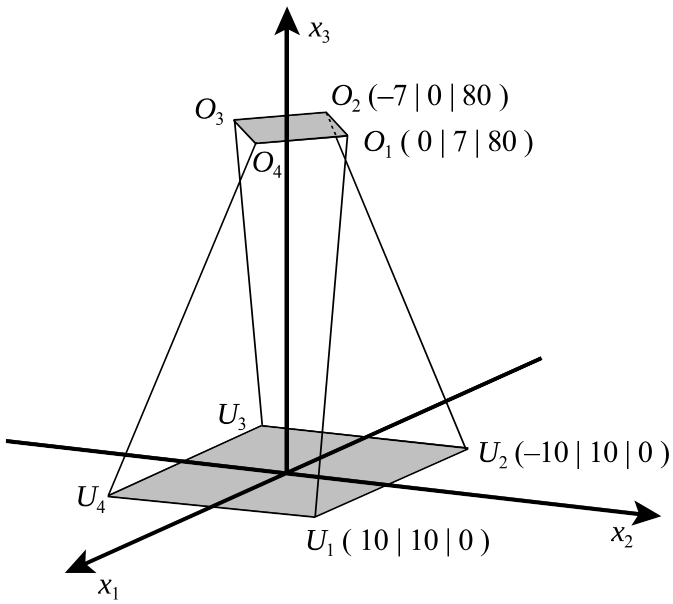
Aufgabe 6: Hafenturm

Einige Jahre lang war in Hamburg ein Hochhaus am Hafen im Gespräch, dessen grundsätzliche architektonische Idee in der nebenstehenden Zeichnung wiedergegeben ist, die allerdings in der x_3-Richtung nicht maßstäblich ist.
Diese Idee bildet die Grundlage für diese Aufgabe.

Die Bodenfläche und das Dach bilden je ein waagerechtes Quadrat.

Die beiden Quadrate sind gegeneinander um 45° gedreht.

Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sind senkrecht übereinander (auf der x_3-Achse).



In der Zeichnung sind die vier Eckpunkte der Bodenfläche mit U_1, U_2, U_3 und U_4 angegeben, die der Dachfläche mit O_1, O_2, O_3 und O_4. Für je zwei dieser Punkte sind die Koordinaten gegeben.

a) Die Gerade g_1 verbindet die Punkte U_1 und O_1, die Gerade g_2 die Punkte U_2 und O_2 und analog sind die Geraden g_3 und g_4 definiert. Berechnen Sie zunächst eine der zugehörigen Geradengleichungen und geben Sie dann unter Ausnutzung der Symmetrie auch die anderen drei an.

b) Berechnen Sie die Länge einer der vier (gleichlangen) Kanten des Gebäudes.

c) In verschiedenen Höhen h haben die Stockwerke natürlich viereckige waagerechte Bodenflächen. Bestimmen Sie die vier Punkte eines solchen Vierecks als Funktion von h und begründen Sie, dass diese Vierecke immer Quadrate sind.

d) Um welchen Winkel ist die Bodenfläche des Geschosses mit der Bodenhöhe $h = 40$ gegenüber dem Grundgeschoss gedreht?

e) „Wenn die Höhenabstände zwischen zwei Geschossen immer gleich sind, dann sind die Bodenflächen zweier aufeinander folgende Geschosse immer um den gleichen Winkel weitergedreht.“ Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig ist.

f) Begründen Sie, dass zwei benachbarte Gebäudekanten windschief sind.

g) Stellen Sie sich vor, die Konstruktion würde in der gleichen Weise nach oben weitergebaut werden. Beurteilen Sie, wie sich die Größe der Bodenflächen der Geschosse ändern wird.

h) Ermitteln Sie, in welchem Geschoss man die geringste Miete bezahlen müsste und wie hoch diese bei einem Mietpreis von 20 € pro Quadratmeter Bodenfläche wäre, wenn das Gebäude mit 30 Geschossen bis auf eine Gesamthöhe von 120 m weitergebaut würde und der Höhenabstand zwischen den Geschossböden immer 4 m hoch wäre.

Aufgabe 6: Hafenturm

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die erste Geradengleichung ergibt sich aus den Punkten U_1 und O_1 zu $g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-10\\-3\\80\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{R}$. Die anderen sind: $g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-10\\80\end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R},\ g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\-10\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}10\\3\\80\end{pmatrix},\ \nu\in\mathbb{R}$ und $g_4:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\-10\\0\end{pmatrix}+\rho\cdot\begin{pmatrix}-3\\10\\80\end{pmatrix},\quad \rho\in\mathbb{R}$	10		
b)	Hier ist der Abstand des Grund- und des Dachpunktes auf einer Geraden zu bestimmen, z.B. $d\left(\overline{U_1O_1}\right)$. Es ergibt sich $d=\sqrt{6509}\approx 80{,}68$.	10		
c)	Die Eckpunkte, die auf den Kanten also auf den Geraden g_i liegen, müssen den x_3-Wert h aufweisen, also muss der zugehörige Parameter jeweils den Wert $\frac{h}{80}$ haben. Die vier Eckpunkte lauten daher: $E_1\left(10-\frac{h}{8}\mid 10-\frac{3h}{80}\mid h\right),\quad E_2\left(-10+\frac{3h}{80}\mid 10-\frac{h}{8}\mid h\right),$ $E_3\left(-10+\frac{h}{8}\mid -10+\frac{3h}{80}\mid h\right),\quad E_4\left(10-\frac{3h}{80}\mid -10+\frac{h}{8}\mid h\right)$ Aus Symmetriegründen ist klar, dass die Seiten und Winkel dieser Vierecke gleich sein müssen, dann können es aber nur Quadrate sein wegen der Konstanz der Innenwinkel bei n-Ecken. Man kann zur Überprüfung der Rechtwinkligkeit natürlich auch einmal ein Skalarprodukt ausrechnen, z.B. mit den Vektoren $\overrightarrow{E_1E_2}$ *und* $\overrightarrow{E_1E_4}$: $\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_4}=\begin{pmatrix}\frac{13h-1600}{80}\\-\frac{7h}{80}\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{7h}{80}\\\frac{13h-1600}{80}\\0\end{pmatrix}=0$		15	
d)	Da hier Geschosse betrachtet werden, spielt die x_3-Koordinate keine Rolle – der Drehwinkel kann in der x_1-x_2-Ebene betrachtet werden. Die Verbindungslinie von U_1 zum Ursprung schließt mit der x_1-Achse einen Winkel von 45° ein. Für $h = 40$ betrachten wir die Verbindungslinie von E_1 zum Zentrum des Geschosses. Diese schließt mit der x_1-Achse den Winkel α ein, der sich bestimmen lässt durch $\alpha=\arctan\left(\frac{8{,}5}{5}\right)\approx 59{,}53°$. Das mittlere Geschoss ist also um 14,53° gegenüber dem Grundgeschoss gedreht.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	Diese Aussage ist nicht richtig, wie aus d) folgt: Nehmen wir dazu der Einfachheit halber an, das Gebäude hätte nur zwei Geschosse, und ein drittes Geschoss würde noch oben draufgesetzt. Die Bodenflächen des untersten und des ersten Geschosses sind dann nach d) um 14,5° gegeneinander gedreht. Die Bodenflächen des ersten und des zweiten Geschosses sind aber gegeneinander um 30,5° (45°-14,5°, denn das unterste und das zweite Geschoss sind um 45° gegeneinander gedreht).		10	
f)	Wir zeigen, dass die Geraden g_1 und g_2 keinen Punkt gemeinsam haben: Zu lösen ist also das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-10\\-3\\80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-10\\80\end{pmatrix}$ für λ und μ. Die letzte Zeile ergibt $\lambda = \mu$, und es zeigt sich leicht, dass das LGS keine Lösung aufweist. Dieses Resultat ist noch schneller einzusehen, wenn man sich klar macht, dass anderenfalls aus Symmetriegründen dann je zwei benachbarte Kanten einen gemeinsamen Punkt hätten und dass alle diese vier Punkte in gleicher Höhe sein müssten. Dann fielen diese vier Punkte aber in einem Punkt auf der x_3-Achse zusammen, in einer Spitze also und der Turm wäre eine gewöhnliche quadratische Pyramide. Das widerspricht aber der Lage der oberen vier Eckpunkte.		10	
g)	Da benachbarte Gebäudekanten windschief aber nicht parallel sind, müssen z.B. horizontale Verbindungsstrecken (Fußbodenseiten) sich in ihrer Länge in jeder Höhe unterscheiden und irgendwo minimal sein. Beim Weiterbauen müssten die Fußbodenquadrate irgendwann wieder größer werden.			10
h)	Die Aussage aus g) wird hier quantitativ genauer untersucht. Wir schließen an an das Ergebnis von c) und berechnen die Fläche des Quadrates E_1, E_2,.E_3, E_4. Für diese Fläche $A(h)$ gilt: $A(h)=(\overrightarrow{E_1E_2})^2=\frac{109h^2-20\,800h+1\,280\,000}{3\,200}$. Das ist ein quadratische Funktion, die ihr Minimum bei $h_{Min}=\frac{10\,400}{109}\approx 95{,}4$ hat. Also ist im 25. Geschoss (Bodenhöhe 96 m) die minimale Bodenfläche zu erwarten. $A(96)=89{,}92$. Das 25. Geschoss hätte die kleinste Bodenfläche von 89,9 Quadratmeter und die Miete betrüge dort 1798,40 €. Das Erdgeschoss hat übrigens 400 m^2 und das höchste Geschoss hätte 104,3 m^2.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20