Aufgabe 7 Flugbahnen

Die Aufgabe entspricht mit Veränderungen einer Aufgabe in der KMK-EPA.

In einem räumlichen Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse weise in die Ostrichtung und die x_2-Achse in die Nordrichtung. Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 näherungsweise geradlinig auf.

Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -10{,}5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich entlang der Geraden $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -9{,}6 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.

Das Flugzeug F_1 überfliegt in 6 km Höhe das Zentrum einer Stadt.
Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebepunkt P.

Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1.

b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von 37 km. Bestimmen Sie die Höhe, in welcher F_1 in die Wolkendecke eintaucht.

Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 und F_2 auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 genau über F_1 befindet. Entscheiden Sie, ob dieser Abstand mit dem Abstand der beiden Flugbahnen übereinstimmt.

c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt $R\,(-10{,}2 \mid -13{,}6 \mid 0)$ eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich mit dem Radius 85 km.
Ermitteln Sie, wie viele Kilometer das Flugzeug F_2 im Überwachungsbereich des Radars fliegt.

d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte $G_1\ (84 \mid -3 \mid 0)$ und $G_2\ (12 \mid -99 \mid 0)$.
Bestimmen Sie, wie weit hinter der Grenze ein im Nachbarland landendes Flugzeug von dem Radar theoretisch noch erfasst werden kann.
Nennen Sie begründet Argumente, welche die errechnete Lösung in Frage stellen können.

e) Im letzten Teil wird die Landschaft nicht mehr als Ebene, sondern als Teil der Erdkugel ($r = 6376$km) angesehen.

Die Radarstation kann nur Objekte registrieren, die sich oberhalb ihres „Horizonts“ befinden.

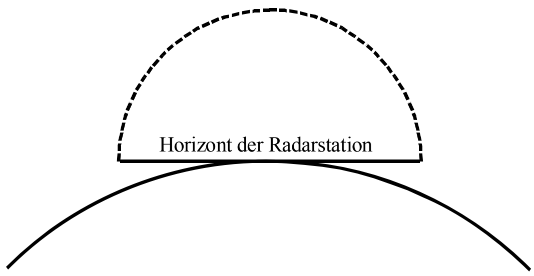
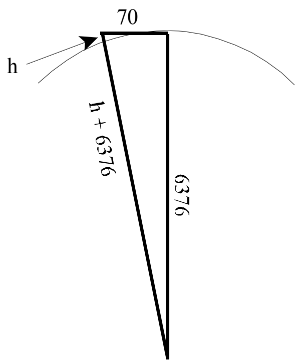
Bestimmen Sie die maximale Flughöhe, bis zu der ein „unbekanntes Flugobjekt“ in 70km Entfernung von der Radarstation unentdeckt bliebe.

Erstellen Sie dazu eine Skizze.

Aufgabe 7 Flugbahnen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Richtung von F_1 (über Grund): $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, zwischen NO und N; Richtung von F_2 (über Grund): $\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$, zwischen SO und O. Der Abhebepunkt liegt in $P\,(-10{,}5 \mid -14 \mid 0)$ als Schnittpunkt der Geraden g mit der x_1-x_2-Ebene, das Zentrum der Stadt in $Z\,(0 \mid 0 \mid 0)$, denn $s = 0{,}5$ liefert $x_3 = 6$. Abstand $\lvert\overline{PZ}\rvert = \lvert Z - P\rvert = \sqrt{10{,}5^2 + 14^2} = 17{,}5$ (km). Steigungswinkel für F_1: $\tan\varphi = \frac{6}{17{,}5} \Rightarrow \varphi \approx 18{,}9°$	15		
b)	<u>Flugzeug 1 verschwindet in Wolkendecke:</u> Aus $37 = \lvert s\rvert \cdot \sqrt{21^2 + 28^2 + 12^2} = \lvert s\rvert \cdot 37$ folgt im Kontext der Aufgabenstellung $s = 1$; das Flugzeug taucht also in 12 km Höhe in die Wolken ein. <u>Flugzeuge 1 und 2 kollidieren nicht:</u> F_2 bewegt sich parallel zur Erdoberfläche in der Ebene mit $x_3 = 12$. F_1 durchstößt diese Ebene im Punkt $T\,(10{,}5 \mid 14 \mid 12)$. T liegt nicht auf der Flugbahn von F_2, denn $-7{,}2 + 4t = 10{,}5$ liefert $t_0 = 4{,}425$, aber $-9{,}6 + t_0(-3) \neq 14$. <u>Abstand:</u> F_1 befindet sich genau über F_2 , wenn die x_1- und x_2-Koordinaten der Flugbahn übereinstimmen, also $\begin{array}{ll} I & -10{,}5 + 21\cdot s = -7{,}2 + 4\cdot t \\ II & -14 + 28\cdot s = -9{,}6 - 3\cdot t \end{array} \xrightarrow{3\cdot I + 4\cdot II} -87{,}5 + 175\cdot s = -60$, woraus folgt $175\cdot s = 27{,}5 \Rightarrow s = \frac{11}{70}$. Eingesetzt z.B. in II folgt $t = 0$. Damit erhält man als Orte der Flugzeuge die Punkte $H_1\,(-7{,}2 \mid -9{,}6 \mid \approx 1{,}9)$ bzw. $H_2\,(-7{,}2 \mid -9{,}6 \mid 12)$. Die Flugzeuge befinden sich somit ca. 10,1 km übereinander. $\lvert H_2H_2\rvert$ ist nicht der Abstand der Flugbahnen, da $\overrightarrow{H_1H_2}$ nicht senkrecht auf der Flugbahn von F_1 steht: $\overrightarrow{H_1H_2} = \begin{pmatrix}-7{,}2\\-9{,}6\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-7{,}2\\-9{,}6\\\frac{66}{35}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{354}{35}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}21\\28\\12\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{354}{35}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$		30	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Schnittpunkte der Flugbahn mit der Kugel um R mit dem Radius 85 km: In die Kugelgleichung $(x_1+10,2)^2+(x_2+13,6)^2+x_3{}^2=85^2$ werden die Koordinaten der Flugbahn von F_2 eingesetzt, also $(-7,2+4t+10,2)^2+(-9,6-3t+13,6)^2+12^2=85^2 \Rightarrow$ $(4t+3)^2+(-3t+4)^2=7081 \Rightarrow$ $16t^2+24t+9+9t^2-24t+16=7081 \Leftrightarrow 25t^2=7056$ bzw. $t^2=282,24$ Lösung: $t=\pm 16,8$. Damit ist $S_1\,(-7,2-16,8\cdot 4 \mid -9,6-16,8\cdot(-3) \mid 12)$ und $S_2\,(-7,2+16,8\cdot 4 \mid -9,6+16,8\cdot(-3) \mid 12)$. F_2 fliegt zwischen den Punkten $S_1\,(-74,4 \mid 40,8 \mid 12)$ und $S_2\,(60 \mid -60 \mid 12)$ im Überwachungsbereich; seine Flugstrecke dazwischen beträgt 168 km, denn $\left\|S_2-S_1\right\|=\left\|\begin{pmatrix}60\\-60\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-74,4\\40,8\\12\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}134,4\\100,8\\0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{134,4^2+100,8^2}=\sqrt{28224}=168$.		15	15
d)	Gerade g_1 durch die beiden Punkt G_1 und G_2 $g_1: \vec{x}=\vec{v}+r\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}84\\-3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}72\\96\\0\end{pmatrix}$. Abstand der Geraden g_1 von R: Ein Normalenvektor zu g_1 ist $\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}$ und $\left\|\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}\right\|=120$. $\frac{1}{120}\left\|\left(\begin{pmatrix}-10,2\\-13,6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}84\\-3\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{120}\left\|\begin{pmatrix}-94,2\\-10,6\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}\right\|=$ $\frac{1}{120}\left\|9043,2-763,2\right\|=\frac{8280}{120}=69$ Ein im Nachbarland landendes Flugzeug kann hiernach noch 16 km hinter der Grenze vom Radar erfasst werden. Die berechnete Lösung berücksichtigt die Erdkrümmung nicht. Theoretisch erreicht der Radarstrahl den Erdboden schon in geringer Entfernung von der Station nicht mehr, so dass tieffliegende Objekte vom Strahl nicht getroffen werden.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Skizze:   Die gesuchte Höhe *h* ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras : $(h+6\,376)^2 = 6376^2 + 70^2 = 40\,658\,276 \Rightarrow$ $h + 6\,376 = \sqrt{40\,658\,276} \approx 6\,376{,}3842$ Damit ist die Höhe *h* etwa 384 m. Die maximale Flughöhe, bis zu der ein Flugobjekt in 70 km Entfernung von der Radarstation unentdeckt bliebe, beträgt etwa 381 m.	5	5	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20