## Aufgabe 8 Kugel und Ebene

Gegeben seien eine Kugel $K$ mit dem Mittelpunkt $M(4 \mid 4 \mid 3)$ und dem Radius $r = 7$ LE sowie eine Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u, v \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Ebene $E$ und die Kugel $K$ mehr als einen Punkt gemeinsam haben. Berechnen Sie den Mittelpunkt $S$ und den Radius $r_s$ des Schnittkreises.

b) Die Kugel $K$ soll an der Ebene $E$ gespiegelt werden.

Begründen Sie die folgende Aussage:

> „Die Strecke von $M$ zum Mittelpunkt $M^*$ der Bildkugel $K^*$ verläuft durch den Mittelpunkt des Schnittkreises."

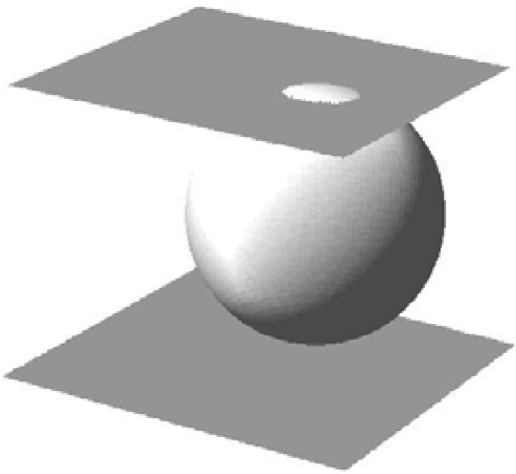
Bestimmen Sie die Gleichung der Bildkugel $K^*$.

c) Berechnen Sie $z > 0$ so, dass $P(6 \mid 1 \mid z)$ auf der Kugeloberfläche $K$ liegt.

d) Genauso, wie es zu jedem Punkt auf einem Kreis eine Tangente mit diesem Punkt als Berührpunkt gibt, gibt es zu jedem Punkt auf einer Kugel eine Ebene, die die Kugel in diesem Punkt berührt – die so genannte Tangentialebene. Beim Kreis steht der Radius zum Berührpunkt senkrecht zur Tangente. Entsprechendes gilt bei der Kugel.

Ermitteln Sie die Koordinatenform derjenigen Tangentialebene $T$, welche die Kugel $K$ im Punkt $P$ berührt.

e) Bestimmen Sie alle zu $T$ parallelen Ebenen, die die Kugel $K$ schneiden.
Ermitteln Sie, wie von diesen Ebenen diejenigen gefunden werden können, für die der Radius des Schnittkreises mit der Kugel 2 LE ist.
Bestimmen Sie die Koordinatenform einer dieser Ebenen.



## Aufgabe 8 Kugel und Ebene

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |

a) 1. Lösungsvorschlag:

Die Kugel schneidet die Ebene in mehr als einem Punkt, wenn der Abstand des Mittelpunktes von der Ebene kleiner als der Radius der Kugel ist. Dieser Abstand lässt sich mit Hilfe eines Normalenvektors der Ebene bestimmen:
Der Schnittpunkt einer Geraden längs dieses Vektors durch $M$ mit der Ebene wäre zugleich der gesuchte Punkt $S$, falls $|\overrightarrow{MS}| < r$.
$(1 \mid 1 \mid 1)^{\mathrm{T}}$ ist offenbar ein Normalenvektor von $E$.

$$\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[II+I]{} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[III+II]{} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & -3 & 7\end{array}\right) \text{ und damit}$$

$\sigma = -\frac{7}{3}$. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $\left(\frac{5}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{2}{3}\right)$.

Der Abstand diese Punktes von $M$ ist $\left|\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}\right| = \frac{7}{3}\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{7}{3}\cdot\sqrt{3} \approx 4 < 7$.

Die Behauptung ist somit gezeigt und $S$ bereits berechnet: $S\left(\frac{5}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{2}{3}\right)$.
Der Radius $r_s$ des Schnittkreises ergibt sich aus dem berechneten Abstand und dem Kugelradius mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$$r_s^{\,2} = 7^2 - \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow r_s \approx 5{,}7\,LE$$

2. Lösungsvorschlag: *(Abweichungen vom 1. Vorschlag)*

Aus der Abstandsformel folgt $\left|\left(\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{7}{\sqrt{3}} < 7$,

wobei $A\,(1 \mid 2 \mid 1)$ ein Punkt der Ebene ist und der Normalenvektor hier normiert ist. $E$ und $K$ haben also mehr als einen Punkt gemeinsam.
Der Mittelpunkt $S$ liegt auf einer Geraden durch $M$ mit dem Richtungsvektor $(1 \mid 1 \mid 1)^{\mathrm{T}}$ d.h. $(4+s)+(4+s)+(3+s) = 4 \Rightarrow s = -\frac{7}{3}$, und eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich $\vec{s} = \begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} - \frac{7}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow S\left(\frac{5}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{2}{3}\right)$

| | | I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| | | 10 | 25 | 10 |

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Spiegelung der Kugel an der Ebene bedeutet im Wesentlichen die Spiegelung ihres Mittelpunktes M. Die Verbindungsstrecke von M zum Bildpunkt M* schneidet die Spiegelebene senkrecht, verläuft aus Symmetriegründen durch S und hat S als Mittelpunkt. Es gilt also:<br>$$\vec{m}^* = \vec{s} - (\vec{m} - \vec{s}) = 2\vec{s} - \vec{m} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow K^*: \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \right)^2 = 49$$</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Für z gilt : $\left( \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^2 = 49 \Leftrightarrow 4 + 9 + (z-3)^2 = 49 \Leftrightarrow z = -3 \vee z = 9$<br>$z = 9$ ist der gesuchte positive Wert.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Sei X ein beliebiger Punkt der Tangentialebene. Dann stehen die Vektoren $\overrightarrow{PX}$ und $\overrightarrow{MP}$ senkrecht aufeinander. Mit P (6 | 1 | 9) gilt daher<br>$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (x_1 - 6) - 3 \cdot (x_2 - 1) + 6 \cdot (x_3 - 9) = 0$$und damit lautet die Gleichung der Tangentialebene $T: 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 63$.</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Prinzipiell können bei a) und e) gleiche Lösungsstrategien verwendet werden.<br>Alle zu T parallelen Ebenen haben die Gleichungen: $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = C, C \in \mathbb{R}$.<br>Mit der Kugel K gemeinsame Punkte haben diejenigen zu T parallelen Ebenen, die Punkte mit der Strecke $\overline{MP}$ oder mit dem am Punkt M gespiegelten Bild dieser Strecke gemeinsam haben.<br>Für die Ebene durch P ist C = 63, für die Ebene durch M gilt C = 14. Für die „letzte“ parallele Ebene durch den Spiegelpunkt von P folgt C = 14 – 49 = –35.<br>Die Ebenen sind also bestimmt durch $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = C$ mit $C \in [-35; 63]$.<br><br>Ist der Radius des Schnittkreises 2, folgt nach Pythagoras für den Abstand a seines Mittelpunktes vom Mittelpunkt der Kugel: $2^2 + a^2 = 49 \Rightarrow |a| = \sqrt{45}$<br>Mit einem Normaleneinheitsvektor der Ebenen gilt für die Mittelpunkte der beiden Kreise also $\vec{m}_{1/2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \sqrt{45} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$,<br>gerundet: $M_1(5{,}92 \mid 1{,}13 \mid 8{,}75)$ bzw. $M_2(2{,}08 \mid 6{,}87 \mid -2{,}75)$.<br>Durch Einsetzen der Punkte erhält man die beiden möglichen Ebenengleichungen, von denen nur eine berechnet werden muss:<br>$$2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 60{,}95 \quad \text{und} \quad 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -32{,}95 .$$</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>55</td><td>25</td></tr>
</table>