

**Aufgabe 9 Eckpyramide**

Gegeben ist die Ebenenschar  $\mathbf{E}_a$  mit  $\mathbf{E}_a: (a+1) \cdot x_1 + a \cdot x_2 + (a-1) \cdot x_3 = a, \quad a \in \mathbb{R}$ .

a) Beschreiben Sie die Lage von  $\mathbf{E}_0$ .

b) Beschreiben Sie, warum die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$  in jeder der Ebenen  $\mathbf{E}_a$  liegt.

c) Mit  $S_1, S_2$  und  $S_3$  seien die Schnittpunkte der jeweiligen Ebene mit den Koordinatenachsen bezeichnet.

Berechnen Sie  $S_1, S_2$  und  $S_3$  in Abhängigkeit von  $a$ .

Fassen Sie die Punkte  $S_1, S_2$  und  $S_3$  sowie den Koordinatenursprung  $O$  als Eckpunkte einer Pyramide auf, der so genannten Eckpyramide.

Zeigen Sie, dass für das Volumen  $V_a$  einer Eckpyramide gilt:  $V_a = \frac{1}{6} \cdot |\overline{OS_1}| \cdot |\overline{OS_2}| \cdot |\overline{OS_3}|$ .

Bestimmen Sie diejenigen positiven  $a$ , bei denen die zugehörige Eckpyramide das Volumen 1 aufweist.

d) Beschreiben Sie, welche Bedingung die Parameter  $m$  und  $a$  zweier Ebenen  $\mathbf{E}_m$  und  $\mathbf{E}_a$  dieser Schar erfüllen müssen, damit diese beiden Ebenen senkrecht zueinander stehen und begründen Sie Ihre Angaben.

Ermitteln Sie für  $a = 2$  den Parameter  $m$  der zu  $\mathbf{E}_2$  senkrechten Ebene  $\mathbf{E}_m$ .

e) Bestimmen Sie die Ebenen aus der gegebenen Ebenenschar, die vom Ursprung  $O$  den Abstand 0,5 aufweisen.

f) Es wird das Volumen  $V_a$  der Eckpyramiden der Ebenenschar  $\mathbf{E}_a$  betrachtet.  
Zeigen Sie:

Für  $a \rightarrow \pm\infty$  geht  $V_a$  gegen den Wert  $\frac{1}{6}$ .

$V_a$  hat ein Minimum, aber kein Maximum.

## Aufgabe 9 Eckpyramide

|    | Lösungsskizze                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Zuordnung, Bewertung |    |     |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----|-----|
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | I                    | II | III |
| a) | <p><math>E_0: x_1 - x_3 = 0</math></p> <p>Die Ebene enthält alle Punkte der Form <math>(a \mid x_2 \mid a)</math>, <math>a \in \mathbb{R}</math>. Also enthält die Ebene die <math>x_2</math>-Achse (<math>a = 0</math>) und insbesondere auch den Nullpunkt. Ihr Schnitt mit der <math>x_1</math>-<math>x_3</math>-Ebene ist die Gerade <math>x_1 = x_3</math>, d. h. die Winkelhalbierende dieser Ebene.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 5                    | 5  |     |
| b) | <p>Lösung z.B. über die Form von <math>g</math> mit dem allgemeinen Vektor:</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 1-2k \\ k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$ <p>Eingesetzt in die Koordinatenform von <math>E_a</math> ergibt dies die Gleichung <math>(a+1) \cdot k + a \cdot (1-2k) + (a-1) \cdot k = a</math>. Diese Gleichung vereinfacht sich zu der für alle <math>a</math> richtigen Beziehung <math>a = a</math>.</p> <p>Damit liegt <math>g</math> in jeder der Ebenen <math>E_a</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 10                   | 5  |     |
| c) | <p><u>Schnittpunkte</u></p> <p><math>S_1 (x_{S_1} \mid 0 \mid 0)</math>.</p> <p>Einsetzen in die Koordinatenform von <math>E_a</math> ergibt <math>S_1 \left( \frac{a}{a+1} \mid 0 \mid 0 \right)</math>, <math>a \neq -1</math>.</p> <p>Analog ergeben sich <math>S_2 (0 \mid 1 \mid 0)</math> und <math>S_3 \left( 0 \mid 0 \mid \frac{a}{a-1} \right)</math>, <math>a \neq 1</math>.</p> <p>Die Ebene <math>E_1</math> hat keinen Schnittpunkt mit der <math>x_3</math>-Achse, denn die <math>x_3</math>-Komponente ist gleich Null und das absolute Glied ungleich Null. Entsprechend schneidet die Ebene <math>E_{-1}</math> die <math>x_1</math>-Achse nicht. (Nach Aufgabenteil a) schneidet die Ebene <math>E_0</math> alle drei Achsen – im Nullpunkt.)</p> <p><u>Volumen der Eckpyramide:</u></p> <p>Das Volumen der von den Vektoren <math>\overrightarrow{OS_1}</math>, <math>\overrightarrow{OS_2}</math> und <math>\overrightarrow{OS_3}</math> aufgespannten dreiseitigen Pyramide ist <math>\frac{1}{6}</math> des Volumens des von <math>\overrightarrow{OS_1}</math>, <math>\overrightarrow{OS_2}</math> und <math>\overrightarrow{OS_3}</math> aufgespannten Spats, denn die Grundfläche der dreiseitigen Pyramide ist halb so groß wie die Grundfläche des Spats und eine Pyramide hat das Volumen „<math>\frac{1}{3}</math> mal Grundfläche mal Höhe“. Der Spat ist ein Quader mit den Seitenlängen <math> \overrightarrow{OS_1} </math>, <math> \overrightarrow{OS_2} </math> und <math> \overrightarrow{OS_3} </math>, also berechnet sich das Spatvolumen als <math> \overrightarrow{OS_1}  \cdot  \overrightarrow{OS_2}  \cdot  \overrightarrow{OS_3} </math>. Beide Überlegungen zusammen ergeben die gesuchte Formel. (Hier sind natürlich auch Rechnungen möglich.)</p> <p>Eine andere Argumentation wäre die folgende:</p> <p>Die Eckpyramide hat am Ursprung drei Flächen, die paarweise senkrecht aufeinander stoßen. Damit ist ihr kleinster Umhüllungsquader der Quader mit den drei Kantenlängen <math>x_{S_1}</math>, <math>x_{S_2}</math> und <math>x_{S_3}</math>. Dessen Volumen ist <math>V_Q =  x_{S_1} \cdot x_{S_2} \cdot x_{S_3} </math>.</p> <p>Wählt man eine dieser Flächen als rechteckige Umhüllung der Grundfläche der Eckpyramide aus, so hat die Grundfläche der Eckpyramide als rechtwinkliges Dreieck mit den entsprechenden Seitenlängen genau die Hälfte des Inhalts des Rechtecks.</p> |                      |    |     |

|    | Lösungsskizze                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Zuordnung, Bewertung |    |     |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----|-----|
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | I                    | II | III |
|    | <p>Andererseits weist jede Pyramide als Volumen nur ein Drittel des Volumens des sie umhüllenden Prismas auf.</p> <p>Da <math>x_{s_1} =  \overline{OS_1} </math> (und entsprechend für die anderen Punkte), ergibt sich das gewünschte Resultat.</p> <p><u>Bestimmung der <math>a</math>-Werte:</u></p> <p>Für die Eckpyramide der Ebenen <math>E_a</math> gilt (mit Einsetzen): <math>V_a = \frac{1}{6} \cdot \left  \frac{a}{a+1} \right  \cdot \left  \frac{a}{a-1} \right </math>.</p> <p>Je nachdem, ob <math>a &gt; 1</math> oder <math>0 &lt; a &lt; 1</math> gilt, ergeben sich die beiden Bestimmungsgleichungen für <math>a</math>:</p> $1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{a^2 - 1} \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{1 - a^2}.$ <p>Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen <math>6a^2 - 6 = a^2</math> oder <math>6 - 6a^2 = a^2</math>.</p> <p>Diese haben die positiven Lösungen <math>a_1 = \sqrt{\frac{6}{5}} \wedge a_2 = \sqrt{\frac{6}{7}}</math>.</p> | 5                    | 25 |     |
| d) | <p>Grundsätzlich gilt:<br/>Zwei Ebenen stehen genau dann senkrecht zueinander, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal zueinander sind.</p> <p>Es gilt dabei <math>\vec{n}_m = \begin{pmatrix} m+1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}</math> und <math>\vec{n}_a = \begin{pmatrix} a+1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Die Orthogonalitätsbedingung ergibt die Gleichung<br/><math>\vec{n}_m \cdot \vec{n}_a = 0 \Leftrightarrow (m+1)(a+1) + m \cdot a + (m-1)(a-1) = 0</math>.</p> <p>Dies führt zu der Bedingung <math>m \cdot a = -\frac{2}{3}</math>.</p> <p>Für <math>a = 2</math> liefert Einsetzen die Lösung <math>m = -\frac{1}{3}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                      | 15 |     |
| e) | <p>Aus der Tafel folgt für den Abstand: <math>dis_a = \left  (\vec{0} - \vec{v}_0) \cdot \vec{n}_0 \right </math>, wobei <math>\vec{v}_0</math> ein beliebiger Punkt der Ebene ist und <math>\vec{n}_0</math> der Normaleneinheitsvektor der Ebene ist.</p> $dis_a = \left  \vec{v}_0 \cdot \frac{\vec{n}}{ \vec{n} } \right  = \left  \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{n}}{ \vec{n} } \right  = \left  \frac{(0 1 0)^T \cdot (a+1 a a-1)^T}{\sqrt{(a+1)^2 + a^2 + (a-1)^2}} \right $ $= \left  \frac{a}{\sqrt{(a+1)^2 + a^2 + (a-1)^2}} \right $ $= \left  \frac{a}{\sqrt{2+3a^2}} \right $ <p>Zu lösen sind die beiden Gleichungen <math>\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}} = 0,5</math> und <math>\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}} = -0,5</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                     |                      |    |     |

|    | Lösungsskizze                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Zuordnung, Bewertung |    |     |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----|-----|
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | I                    | II | III |
|    | <p>Für die erste Gleichung folgt durch Quadrieren:</p> $\frac{a^2}{2+3a^2} = \frac{1}{4}$ <p>und weiter</p> $4a^2 = 2 + 3a^2$ $a^2 = 2,$ <p>also <math>a = \sqrt{2}</math> oder <math>a = -\sqrt{2}</math>.</p> <p>Durch Einsetzen erhält man, dass nur <math>a = \sqrt{2}</math> Lösung der ersten Gleichung ist. Entsprechend erhält man die Lösung der zweiten Gleichung: <math>a = -\sqrt{2}</math>.</p> <p>Die Ebenen <math>E_{\sqrt{2}}</math> und <math>E_{-\sqrt{2}}</math> sind diejenigen, die vom Nullpunkt den Abstand 0,5 haben.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                      | 15 |     |
| f) | <p>Es gilt <math>V_a = \left  \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{a+1} \cdot \frac{a}{a-1} \right  = \left  \frac{a^2}{6(a^2-1)} \right </math>.</p> <p>Für <math>a &gt; 1</math> oder <math>a &lt; -1</math> gilt: <math>V_a = \frac{a^2}{6 \cdot (a^2-1)}</math>.</p> <p>Für diesen Bereich gilt also <math>V_a = V_{-a}</math> und man kann sich auf die Betrachtung des Verhaltens der Funktion auf den Bereich <math>a &gt; 1</math> beschränken, für das asymptotische Verhalten auf <math>x \rightarrow \infty</math>. Es ergibt sich <math>\lim_{a \rightarrow \infty} V_a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{a^2}{6(a^2-1)} \right) = \frac{1}{6}</math>.</p> <p>Für <math>a = 0</math> ist ersichtlich das Volumen gleich Null. Da das Volumen aber größer oder gleich Null sein muss, liegt hier ein Minimum vor.</p> <p>Andererseits liegt bei <math>a = 1</math> eine Polstelle vor. Da das Volumen immer positiv ist, ist gesichert, dass <math>V_a</math> für beide Richtungen der Annäherung an die Polstelle über alle Grenzen wächst.</p> <p>Damit hat <math>V_a</math> kein Maximum.</p> |                      |    | 15  |
|    | Insgesamt 100 BWE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 20                   | 65 | 15  |