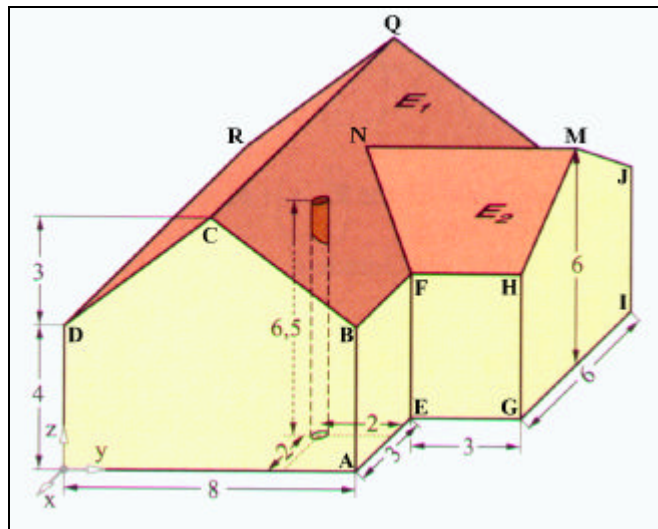


Name:

Datum:

Haus - Aufgabenstellung

1. Arbeitsmaterial:



Hinweis: Das Hauptgebäude ist hinter dem Anbau noch weitere 3 Meter lang.

2. Ermittle die Koordinaten folgender Punkte:

A(| |); B(| |); C(| |); D(| |); E(| |); F(| |); G(| |);
H(| |); I(| |); J(| |); K(| |); L(| |); M(| |); O(| |);
P(| |); Q(| |); R(| |); S(| |).

3. Die Maße in der Zeichnung sind in Meter angegeben.

Erstelle für die Dachflächen E_1 und E_2 jeweils eine Ebenengleichung, zunächst in Parameterform und dann in Normalenform.

Kontrollergebnisse: $E_1 : 3y + 4z = 40$ $E_2 : 2x + 3z = 6$

4. Berechne den Schnittwinkel von E_1 und E_2 .

5. Ermittle für das Schornsteinrohr die Koordinaten des Punktes, an dem es die Dachfläche E_1 durchstößt.

6. Ermittle für das Schornsteinrohr den Winkel, den es mit der Ebene E_1 hat.

7. Ermittle für das Schornsteinrohr den Abstand, den sein oberer Punkt von der Dachfläche E_1 hat.

8. Ermittle die Koordinaten des Punktes N (!).

9. Ermittle die Schnittgerade zwischen E_1 und E_2 .

10. Ermittle die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle FLN$.

11. Das Dach soll neu gedeckt werden. Berechne dazu A, die Fläche des Dachs.

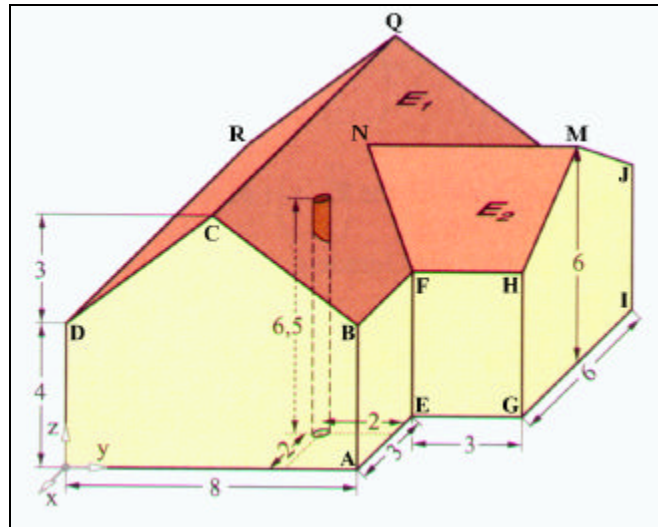
12. Alle senkrechten Wände sollen gestrichen werden. Berechne die Fläche dieser senkrechten Wände.

Name:

Datum:

Haus - Lösung

1. Arbeitsmaterial:



Hinweis: Das Hauptgebäude ist hinter dem Anbau noch weitere 3 Meter lang.

2. Ermittle die Koordinaten folgender Punkte:

$A(0|8|0)$; $B(0|8|4)$; $C(0|4|7)$; $D(0|0|4)$; $E(-3|8|0)$; $F(-3|8|4)$; $G(-3|11|0)$;
 $H(-3|11|4)$; $I(-9|11|0)$; $J(-9|11|4)$; $K(-9|8|0)$; $L(-9|8|4)$; $M(-6|11|6)$;
 $O(-12|8|0)$; $P(-12|8|4)$; $Q(-12|4|7)$; $R(-12|0|4)$; $S(-12|0|0)$.

3. Die Maße in der Zeichnung sind in Meter angegeben.

Erstelle für die Dachflächen E_1 und E_2 jeweils eine Ebenengleichung, zunächst in Parameterform und dann in Normalenform.

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ +4 \\ +7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ +4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} +12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ +4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} +12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -36-0 \\ 0-48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ -48 \end{pmatrix} = -12 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ +4 \\ +7 \end{pmatrix} = 12 + 28 = 40; \quad E_1: \begin{pmatrix} 0 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix} * \vec{x} = 40$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ +11 \\ +6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ +2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ +2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+6 \\ 0-0 \\ 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} +2 \\ 0 \\ +3 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} +2 \\ 0 \\ +3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -6 \\ +11 \\ +6 \end{pmatrix} = -12 + 18 = 6; \quad E_2: \begin{pmatrix} +2 \\ 0 \\ +3 \end{pmatrix} * \vec{x} = 6$$

Kontrollergebnisse: $E_1: 3y + 4z = 40$ $E_2: 2x + 3z = 6$

4. Berechne den Schnittwinkel von E_1 und E_2 .

$$\cos(\alpha) = \frac{12}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{13}} \approx 0,66 \text{ also } \alpha \approx 48,27^\circ$$

5. Ermittle für das Schornsteinrohr die Koordinaten des Punktes, an dem es die Dachfläche E_1 durchstößt.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6,5 \end{pmatrix}$$

$$g \cap E: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6,5 \end{pmatrix} \right] = 40 \Leftrightarrow 0 + 18 + 0 + 26 \cdot v = 40 \Leftrightarrow v = \frac{11}{13}$$

$$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{11}{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 5,5 \end{pmatrix}$$

Also: $S(-2 | 6 | 5,5)$

6. Ermittle für das Schornsteinrohr den Winkel, den es mit der Ebene E_1 hat.

$$\sin(\alpha) = \frac{26}{\sqrt{42,25} \cdot \sqrt{25}} = 0,8 \quad \text{also } \alpha \approx 53,13^\circ$$

7. Ermittle für das Schornsteinrohr den Abstand, den sein oberer Punkt von der Dachfläche E_1 hat.
 $T(-2 | 6 | 6,5)$

$$\text{Abst}(T; E_1) = \frac{1}{\sqrt{25}} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 6,5 \end{pmatrix} - 40 \right] = \frac{1}{5} \cdot (44 - 40) = \frac{4}{5} = 0,8$$

8. Ermittle die Koordinaten des Punktes N (!).

$N(-6 | y | 6)$

$$N \cap E_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -6 \\ y \\ 6 \end{pmatrix} = 40 \Leftrightarrow 3y + 24 = 40 \Leftrightarrow y = \frac{16}{3}$$

$N(-6 | 5,\bar{3} | 6)$

9. Ermittle die Schnittgerade zwischen E_1 und E_2 .

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot (\vec{x}_F - \vec{x}_N) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 5,\bar{3} \\ 6 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2,\bar{6} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

10. Ermittle die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle FLN$.

$$A = \frac{g \cdot h_g}{2} = \frac{|\overline{FL}| \cdot h_g}{2}$$

$$h_g = \text{Abst}(N; g(F; L))$$

$$g(F; L): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt L_g von N zu $g(F; L)$ hat die Koordinaten $L_g(-6 | 8 | 4)$. Damit gilt:

$$h_g = |\vec{x}_N - \vec{x}_{L_g}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 5,3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2,6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{36}{9}} = \frac{10}{3}$$

$$|\overline{FL}| = 6$$

$$A = \frac{6 \cdot \frac{10}{3}}{2} = 10$$

Die Fläche beträgt also 10m^2 .

11. Das Dach soll neu gedeckt werden. Berechne dazu A , die Fläche des Dachs.

Die Dachfläche A setzt sich zusammen aus A_1 (der Fläche des Rechtecks $DCQR$), A_2 (der Fläche von E_1 vermindert um die Fläche des Dreiecks NFL) und A_3 (der doppelten Fläche des Trapezes $FHMN$ (E_2)).

$$A_1 = |\overline{DC}| \cdot |\overline{CQ}| = \sqrt{16+9} \cdot 12 = 60 \text{ (nach Pythagoras und 1.)}$$

$$A_2 = 60 - 10 = 50 \text{ (nach 10. und 11.)}$$

Die Fläche von E_2 also die Fläche des Trapezes $FHMN$ ergibt sich als Produkt aus der halben Summe der parallelen Gegenseiten und dem Abstand der beiden parallelen Gegenseiten, also:

$$A_3 = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \left(3 + 5 \frac{2}{3} \right) \cdot \sqrt{9+4} \right] = \frac{26}{3} \cdot \sqrt{13} \approx 31,25. \text{ Also:}$$

$$A = 60 + 50 + \frac{26}{3} \cdot \sqrt{13} \approx 141,25$$

Die Dachfläche beträgt etwa $141,25\text{m}^2$.

12. Alle senkrechten Wände sollen gestrichen werden. Berechne die Fläche dieser senkrechten Wände.

Die gesuchte Fläche lässt sich elementar berechnen als Summe entsprechender Rechteckflächen und Dreiecksflächen.

Doppelte Fläche von $OABD$ plus doppelte Fläche von DBC plus doppelte Fläche von $SODR$ plus doppelte Fläche von $EGHF$ plus Fläche von HJM .

$$A = 2 \cdot (8 \cdot 4) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \right) + 2 \cdot (12 \cdot 4) + 2 \cdot (3 \cdot 4) + \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \right) = 64 + 24 + 96 + 24 + 6 = 214.$$

Die Fläche aller senkrechten Wände beträgt 214m^2 .