Name: **Datum:**

CZ21 - He+ - Atom - Aufgabe

Auf das einfach ionisierte Heliumatom He^+, dessen Kern die Ladung $+2e$ trägt und der von einem Elektron auf der Kreisbahn vom Radius r umlaufen wird, soll zunächst die *Rutherford*sche Modellvorstellung vom Atom angewandt werden.

a) Mit welcher Feldkraft wird das Elektron vom Kern angezogen?

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen potentieller und kinetischer Energie des Elektrons?

c) Zeigen Sie, daß die Gesamtenergie gegeben ist durch

$$E = -\frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}.$$

Aus den Grundannahmen des *Rutherford*schen Atommodells werden durch Hinzunahme der beiden *Bohr*schen Postulate die Grundannahmen des *Bohr*schen Atommodells.

d) Berechnen Sie den Bahnradius des He^+-Elektrons für die 1. Bohrsche Bahn.

e) Welche Energie in eV muß dem im Grundzustand befindlichen He^+-Atom zugeführt werden, um ihm sein Elektron zu entreißen?

f) Geben Sie eine Beziehung an zur Berechnung der Frequenz der emittierten Lichtquanten.

g) Welche Beziehung besteht nach diesen Voraussetzungen zwischen den Spektren des H-Atoms und des He^+-Atoms?

Lösung:

a) Nach dem Coulombschen Gesetz gilt für den Betrag der anziehenden Feldkraft

$$F_e = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (1)$$

b) Die potentielle Energie E_p findet man aus dem Arbeitsintegral

$$E_p = \int_{\infty}^{r} \frac{2 \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot x^2}\, dx = -\frac{2e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \qquad (2)$$

Die potentielle Energie ist auf $r = \infty$ als Nullpunkt bezogen. Jede potentielle Energie hat ihre Ursache in der anziehenden Kraft zweier Körper (hier ist es die Coulombkraft). Damit ist die potentielle Energie genau da null, wo die anziehenden Kräfte zu wirken aufhören, also im Unendlichen.

Die kinetische Energie E_k folgt unmittelbar aus dem Kräftegleichgewicht (Zentripetalkraft $\frac{mv^2}{r}$ gleich Coulombscher Anziehungskraft $\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$)

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (4)$$

Also

$$E_p = -2E_k$$

c) Ihre Rechnung:

d) Zeigen Sie, daß für den Radius der n-ten Bohrschen Bahn die Beziehung gilt

$$(r_n)_{He} = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2 \cdot n^2}{2\pi \cdot e^2 \cdot m}. \qquad (5)$$

Welcher Zusammenhang besteht somit zwischen $(r_n)_{He}$ und $(r_n)_H$? Benutzen Sie dies, um $(r_1)_{He}$ möglichst „rasch" berechnen zu können.

Ihre Rechnung:

L1

e) Ihre Rechnung:

Ergebnis: $(E_{ion})_{He} = 54{,}4$ eV

Vergleichen Sie mit $(E_{ion})_H$!

L2

f) Beim Übergang $E_n \rightarrow E_k$ mit $n > k$ wird ein Lichtquant der Energie $h \cdot f_{nk}$ emittiert:

$$f_{nk} = \frac{1}{h}(E_n - E_k) \qquad (6)$$

Dabei ist

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \text{ und } E_k = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_k} \qquad (7)$$

Zusammen mit (5) wird

$$f_{nk} = \frac{e^4 m}{2\epsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right), n > k \qquad (8)$$

g)

Ihre Rechnung:

L1

Lösung L1

Aufgabe 21: He^+-Atom

d) Die Auswahl der Umlaufbahnen erfolgt über die Quantenbedingung

$$2\,\pi \cdot r_n \cdot m \cdot v_n = n \cdot h,$$

woraus folgt

$$v_n = \frac{n \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot r_n \cdot m}.$$

Zusammen mit

$$\frac{m \cdot v_n^2}{r_n} = \frac{2 \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_n^2} \quad \text{(Bez. (4) !)}$$

erhält man

$$(r_n)_{He} = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2 \cdot n^2}{2 \cdot e^2 \cdot m \cdot \pi}.$$

Ein Vergleich mit der entsprechenden Beziehung beim H-Atom ergibt

$$(r_n)_{He} = \tfrac{1}{2} \cdot (r_n)_H$$

Mit $(r_1)_H \approx 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m wird

$$(r_1)_{He} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$$

g) *Helium* He^+:

$$f_{nk} = \frac{e^4 \cdot m}{2\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{k_{He}^2} - \frac{1}{n_{He}^2} \right)$$

Wasserstoff H:

$$f_{nk} = \tfrac{1}{4} \frac{e^4 \cdot m}{2\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{k_H^2} - \frac{1}{n_H^2} \right)$$

Die Spektrallinien beider Atome müssen nahezu übereinstimmen, wenn gilt

$$n_{He} = 2 \cdot n_H \ \text{ und } \ k_{He} = 2 \cdot k_H.$$

Der geringe Unterschied (wie er im Experiment tatsächlich beobachtet wird) erklärt sich durch die Differenz der beiden Kernmassen, die sich auf die Rydbergkonstante auswirkt.

Lösung L2

Aufgabe 21: He^+-Atom

e) Aus der Beziehung für die Gesamtenergie des Elektrons folgt unmittelbar für die Ionisierungsenergie

$$(E_{ion})_{He} = +\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_1}.$$

Zahlenwerte eingesetzt, ergibt $(E_{ion})_{He} = 54{,}4\ \text{eV}$

Zum Vergleich: $(E_{ion})_H = 13{,}6\ \text{eV} = \tfrac{1}{4}\,(E_{ion})_{He}$